Introduction aux méthodes Hybrid High-Order (HHO)

Résumé :

Ce document présente les méthodes HHO pour les problèmes en mécanique non-linéaire (petites et grandes déformations). Les mots clés correspondant pour les modélisations dans *code_aster* sont `D_PLAN_HHO_*` et `3D_HHO_*`. Des détails plus complets sont données dans [1].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

1 Introduction 3
2 Description de la méthode 5
2.1 Cas de l'élasticité linéaire 5
2.2 Cadre discret 5
2.2.1 Maillage 5
2.2.2 Approximation 5
2.3 Opérateurs locaux de reconstruction et de stabilisation 6
2.4 Problème global discret HHO 8
3 Implémentation 10
3.1 Préliminaires 10
3.2 Inconnues HHO et numérotation 11
3.3 Combinaison et condensation statique 13
3.4 Opérateur STAT_NON_LINE 16
3.5 Conditions aux limites de Dirichlet 17
3.6 Post-traitement 17
3.7 Périmètre d'usage 17
4 Bibliographie 18

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Les méthodes HHO sont développées depuis quelques années par Di Pietro, Ern et leurs collaborateurs. Les premiers travaux portent sur les problèmes de la diffusion linéaire [2] et de l'élasticité linéaire [3]. Depuis, les méthodes HHO ont été étendues à des physiques différentes pour traiter des problèmes aussi bien linéaires que non-linéaires (voir [1] pour les références qui suivent). Pour les problèmes linéaires, nous pouvons citer les travaux sur le problème de Stokes, sur la diffusion linéaire à coefficients variables, sur l'advection-diffusion-réaction, sur le problème de Cahn-Hilliard, et sur les écoulements en milieux poreux fracturés. L'utilisation de maillages courbes est considérée pour le problème de la diffusion linéaire. Pour les problèmes non-linéaires, nous pouvons citer les travaux sur le problème de Leray-Lions, sur les équations de Navier-Stokes stationnaires, sur les problèmes spectraux, et sur les fluides de Bingham. En ce qui concerne plus particulièrement la mécanique des solides, il y a eu l'extension au problème de l'élasticité non-linéaire en petites déformations, au problème de Biot, aux équations des plaques de Kirchhoff--Love, et les travaux réalisés dans [1] sur l'hyperélasticité en grandes déformations [4], la plasticité en petites [5] et grandes [6]déformations et le contact unilatéral avec frottement de Tresca. D'un point de vue numérique, un intérêt particulier a été porté à l'implémentation de ces méthodes de manière générique de façon à inclure les maillages polyédriques en dimension quelconque. Ces développements sont capitalisés au sein du code open-source *DiSk++* au CERMICS.

Les méthodes HHO sont des méthodes non-conformes comme les méthodes de type Galerkin discontinu (dG), mais contrairement à ces dernières, elles sont formulées en termes d'inconnues de faces (portées par le squelette du maillage). Des inconnues dans les cellules sont aussi ajoutées pour des propriétés de stabilité et d'approximation (d'où le terme Hybrid). Ces inconnues de cellules peuvent être éliminées localement par condensation statique (ou complément de Schur). Le terme High-Order vient du fait que les méthodes HHO permettent de faire de l'ordre bas comme de l'ordre élevé sans modification de la méthode. La construction des méthodes HHO repose sur deux idées :

1 la reconstruction locale d'un gradient ou d'un potentiel à partir des inconnues de la cellule et des inconnues des faces en ``mimant'' une intégration par parties ;
2 un opérateur de stabilisation locale afin d'imposer faiblement sur chaque face de la cellule la consistance entre les inconnues de la face et la trace des inconnues de la cellule.

Les méthodes HHO présentent de nombreux avantages :

1 ordre d'approximation arbitraire ($k \geq 0$ pour la diffusion linéaire et $k \geq 1$ pour l'élasticité linéaire) ;
2 utilisation de maillages polyédriques avec des interfaces possiblement non-conformes (voir Fig. 1-1 pour des exemples de maillages);
3 robustesse vis à vis des paramètres physiques (incompressibilité élastique, advection dominante...) ;
4 coûts numériques attractifs grâce à la condensation statique qui permet d'éliminer les inconnues portées par les cellules tout en maintenant un stencil compact ; et *(v)* conservation locale des flux sur chaque cellule du maillage.

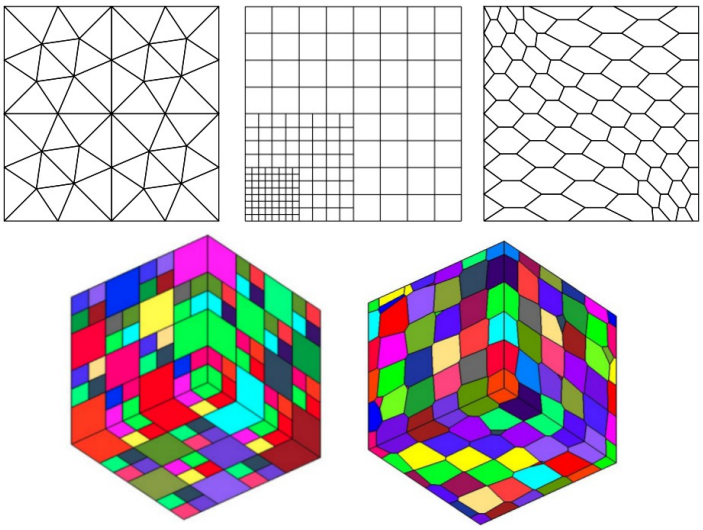


Figure 1-1: Exemples de maillages polyédriques supportés par les méthodes HHO.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le point *(3)* est particulièrement pertinent dans le contexte de ce manuscrit, où nous nous intéressons aux problèmes de la mécanique des solides car les méthodes HHO vont nous permettre d'utiliser une formulation purement primale (sans ajout de multiplicateurs de Lagrange contrairement aux formulations mixtes) afin d'éliminer le verrouillage numérique issu de l'incompressibilité qui est habituellement présent pour les méthodes H^1-conformes. Quand au point *(2)*, une motivation est de pouvoir réaliser un raffinement local du maillage sans devoir se préoccuper de l'éventuelle présence de nœuds orphelins comme dans les méthodes H^1-conformes. En effet, comme illustré à la Fig. 1-2 , la présence des nœuds orphelins est gérée simplement en traitant la maille correspondante comme un polygone (ou un polyèdre).

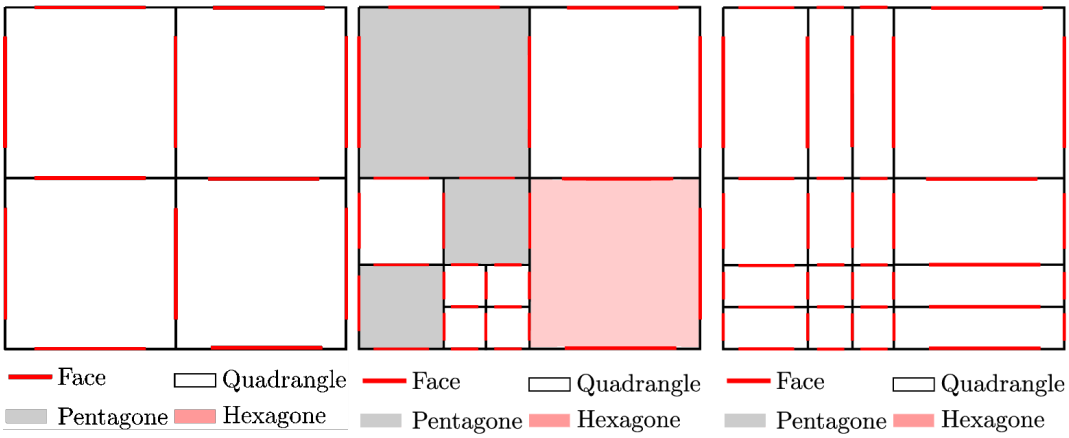


Figure 1-2: Exemple de raffinement local traité par les méthodes HHO (milieu) et par les méthodes H^1-conformes (droite) en partant d'un même maillage initial (gauche).

Les méthodes HHO présentent des connections plus ou moins étroites avec d'autres méthodes numériques développées ces dernières années. Pour les méthodes d'ordre bas, il existe des liens avec les méthodes volumes finis Hybrid Finite Volumes et Mixed Finite Volumes, avec les méthodes Mimetic Finite Differences (voir [8] pour un cadre unfié des trois méthodes précédentes), ainsi qu'avec les méthodes Compatible Discrete Operator et les Gradient Schemes . Pour les méthodes d'ordre supérieur, une connexion a été établie entre les méthodes HHO, Hybridizable Discontinuous Galerkin (HDG) et nonconforming Virtual Element Methods (ncVEM) . Les principales similitudes et différences entre les méthodes HHO, HDG, et ncVEM sont :

- la reconstruction des opérateurs discrets pour HHO remplace les équations de flux pour HDG et ces opérateurs jouent le même rôle que les opérateurs de projection utilisés par ncVEM ;
- les opérateurs de stabilisation pour HHO et HDG sont définis d'un point de vue fonctionnel (et sont différents dans le cas où les inconnues de cellule ont le même degré que les inconnues de face) alors que pour ncVEM, ces opérateurs sont définis d'un point de vue algébrique tout en conduisant à des formes quadratiques équivalentes à HHO.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Description de la méthode

2.1 Cas de l'élasticité linéaire

Nous allons présenter dans cette section les méthodes Hybrid High-Order (HHO) par l'intermédiaire du problème de l'élasticité linéaire. Le but est de décrire les grands principes de construction des méthodes HHO. Par simplicité, nous supposons que le domaine $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$, avec $2 \le d \le 3$, est un domaine polyédrique borné, connexe et avec un bord Lipschitzien $\Gamma = \partial\Omega_0$. Le domaine Ω_0 se déforme sous l'action d'un chargement volumique $f \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ et des conditions de type Dirichlet homogène sont imposées sur le bord Γ (pour simplifier). La formulation faible du problème est :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ tel que :

$$2\mu(\nabla^s u, \nabla^s v)_{L^2(\Omega_0)} + \lambda(\nabla\cdot u, \nabla\cdot v)_{L^2(\Omega_0)} = (f, v)_{L^2(\Omega_0)} \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega_0;\mathbb{R}^d) \tag{1}$$

où $H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^d) = \{v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d) : v = 0 \; sur \; \Gamma\}$ et $\mu > 0$ et $\lambda \ge 0$ sont les paramètres de Lamé du matériau. De plus, ∇^s désigne la partie symétrique de l'opérateur gradient et $\nabla\cdot$ l'opérateur divergence.

2.2 Cadre discret

2.2.1 Maillage

Nous considérons une famille de maillages $(T_h)_{h>0}$, où pour chaque $h>0$, le maillage T_h est composé de polyèdres ouverts, disjoints non-vides, qui ont des faces planes, et tels que $\overline{\Omega}_0 = \cup_{T\in T_h} \overline{T}$. La taille globale du maillage est décrite par le paramètre $h = max_{T\in T_h} h_T$, où h_T est le diamètre de la cellule T . Un sous-ensemble fermé F de $\overline{\Omega}_0$ est appelé une face si c'est un sous-ensemble ayant un intérieur relatif non-vide contenu dans un hyperplan affine H_F et si :

- soit il existe deux cellules distinctes $T_1, T_2 \in T_h$ telles que $F = \partial T_1 \cap \partial T_2 \cap H_F$ (et F est alors appelée une interface)
- s oit il existe une cellule $T \in T_h$ telle que $F = \partial T \cap \Gamma \cap H_F$ (et F est alors appelée une face de bord).

Les faces du maillage sont réunies dans l'ensemble F_h qui est ainsi partitionné en deux sous-ensembles, F_h^i l'ensemble des interfaces et F_h^b l'ensemble des faces de bord. Pour tout $T \in T_h$, F_T désigne l'ensemble des faces du maillage qui sont incluses dans ∂T et n_T la normale sortante unitaire à la cellule T . Nous supposons dans la suite que la famille de maillages $(T_h)_{h>0}$ est régulière au sens spécifié dans [3], c'est-à-dire pour tout $h>0$, il existe un sous-maillage conforme de T_h composé de simplexes qui appartient à une famille régulière de maillages simpliciaux dans le sens habituel de Ciarlet et tel que chaque cellule $T \in T_h$ du maillage (respectivement, chaque face $F \in F_h$) peut être décomposée en un nombre uniformément borné de sous-cellules (respectivement, sous-faces) qui appartiennent à seulement une cellule du maillage (respectivement, à seulement une face ou à l'intérieur d'une cellule) avec un diamètre uniformément comparable.

2.2.2 Approximation

Soit $k \ge 1$ un degré polynomial fixé. Dans chaque cellule $T \in T_h$ du maillage, les inconnues HHO locales sont la paire $(v_T, v_{\partial T})$, où l'inconnue de cellule $v_T \in P_d^k(T;\mathbb{R}^d)$ est un polynôme à valeurs vectorielles à d -variables de degré au plus k dans la cellule T , et $v_{\partial T} \in P_{d-1}^k(F_T;\mathbb{R}^d) := \prod_{F\in F_T} P_{d-1}^k(F;\mathbb{R}^d)$ est un polynôme à valeurs vectorielles défini par morceaux à $(d-1)$ -variables de degré au plus k sur chaque face $F \in F_T$ de la cellule T . Nous écrivons de manière plus concise dans la suite que :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\hat{v}_T := (v_T, v_{\partial T}) \in U_T^k := P_d^k(T;\mathbb{R}^d) \times P_{d-1}^k(F_T;\mathbb{R}^d) \quad (2)$$

Les degrés de liberté sont illustrés en figure 2.2.2-1 , où un point représente un degré de liberté (mais pas forcément un point physique d'évaluation) et la forme géométrique de la cellule est uniquement illustrative. Les degrés de liberté n'ont pas de sens physique a priori et d'un point de vue algébrique, ils correspondent simplement aux coefficients dans une base polynomiale.

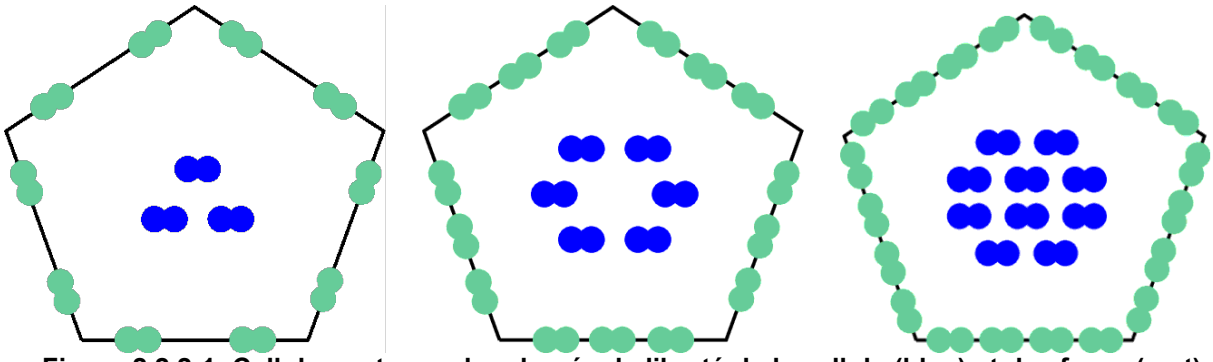


Figure 2.2.2-1: Cellule pentagonale : degrés de liberté de la cellule (bleu) et des faces (vert) pour différentes valeurs de l'ordre d'approximation k={1,2,3} dans le cas bidimensionnel.

L'espace U_T^k est muni de la semi-norme discrète locale suivante :

$$|\hat{v}_T|_{1,T}^2 := \|\nabla^s v_T\|_{L^2(T)}^2 + \|\gamma_{\partial T}^{\frac{1}{2}}(v_T - v_{\partial T})\|_{L^2(\partial T)}^2 \quad (3)$$

avec la fonction constante par morceaux $\gamma_{\partial T|F}$ telle que :

$$\gamma_{\partial T|F} = h_F^{-1} \quad \forall F \in F_T \quad (4)$$

où h_F est le diamètre de F . Nous introduisons également l'espace $RM(T)$ des mouvements de corps rigide sur T tel que :

$$RM(T) := \{v : T \to \mathbb{R}^d \mid v(x) = c + \omega x, \text{ où } c \in \mathbb{R}^d \text{ et } \omega \in SO^d\} \quad (5)$$

où SO^d est l'ensemble des matrices de rotation dans l'espace euclidien réel. Notons que $\nabla^s = 0$ est équivalent à $v \in RM(T)$ et que $P_d^0(T;\mathbb{R}^d) \subset RM(T) \subset P_d^1(T;\mathbb{R}^d)$.

Lemme 1 :
Pour tout $\hat{v}_T \in U_T^k$, on a $|\hat{v}_T|_{1,T} = 0$ si et seulement si v_T est un mouvement de corps rigide et que $v_{\partial T}$ est la trace de v_T sur ∂T .

Preuve :
Remarquons que $|\hat{v}_T|_{1,T} = 0$ *équivaut à :*

$$\nabla^s v_T = 0 \text{ et } v_T - v_{\partial T} = 0 \quad (6)$$

Nous en déduisons que v_T *est un mouvement de corps rigide car* $\nabla^s v_T = 0$ *et que* $v_{\partial T}$ *est la trace de* v_T *sur* ∂T *car* $v_T - v_{\partial T} = 0$. .■

2.3 Opérateurs locaux de reconstruction et de stabilisation

Les méthodes HHO se basent sur la reconstruction de différentes quantités discrètes qui vont venir jouer le rôle de leur contre-partie continue dans la formulation du problème discret. Dans le cas de la discrétisation du problème de l'élasticité linéaire, le premier ingrédient clé est l'opérateur de reconstruction du gradient symétrique $E_T^k : U_T^k \to P_d^k(T;\mathbb{R}_{sym}^{d\times d})$ à partir de l'inconnue de cellule $v_T \in P_d^k(T;\mathbb{R}^d)$ et des inconnues de face $v_{\partial T} \in P_{d-1}^k(F_T;\mathbb{R}^d)$ composant la paire $\hat{v}_T = (v_T, v_{\partial T})$. Pour tout $\hat{v}_T \in U_T^k$, le gradient

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

symétrique reconstruit $E_T^k(\hat{v}_T) \in P_d^k(T;\mathbb{R}_{sym}^{d\times d})$ est obtenu en résolvant le problème local suivant: pour tout $\tau \in P_d^k(T;\mathbb{R}_{sym}^{d\times d})$:

$$(E_T^k(\hat{v}_T),\tau)_{L^2(T)} = (\nabla^s v_T,\tau)_{L^2(T)} + (v_{\partial T} - v_T, \tau n_T)_{L^2(\partial T)} \quad (7)$$

Résoudre ce problème implique de choisir une base polynomiale de $P_d^k(T;\mathbb{R})$ seulement et d'inverser la matrice de masse associée pour chaque composante du tenseur $E_T^k(\hat{v}_T)$.
Le second ingrédient clé pour construire les méthodes HHO est l'opérateur de stabilisation locale qui permet d'imposer faiblement l'égalité entre les inconnues de face $v_{\partial T}$ et la trace de l'inconnue de cellule v_T par le biais d'une pénalisation au sens des moindres carrés de la différence $v_{\partial T} - v_T \in P_{d-1}^k(F_T;\mathbb{R}^d)$. L'opérateur de stabilisation $v_{\partial T} - v_T \in P_{d-1}^k(F_T;\mathbb{R}^d)$ est défini tel que, pour tout $\hat{v}_T = (v_T, v_{\partial T})$:

$$S_{\partial T}^k(\hat{v}_T) = \Pi_{\partial T}^k(v_{\partial T} - D_T^{k+1}(\hat{v}_T)) + \Pi_T^k(v_T - D_T^{k+1}(\hat{v}_T)) \quad (8)$$

où $\Pi_{\partial T}^k$ et Π_T^k sont les projecteurs L^2 -orthogonaux sur $P_{d-1}^k(F_T;\mathbb{R}^d)$ et $P_d^k(T;\mathbb{R}^d)$ respectivement. De plus, l'opérateur local de reconstruction d'un champ de déplacement d'ordre supérieur $D_T^{k+1}: U_T^k \to P_d^{k+1}(T;\mathbb{R}^d)$ est défini tel que, pour tout $\hat{v}_T \in U_T^k$, $D_T^{k+1}(\hat{v}_T) \in P_d^{k+1}(T;\mathbb{R}^d)$ est obtenu en résolvant le problème de Neumann suivant: pour tout $w \in P_d^{k+1}(T;\mathbb{R}^d)$:

$$(\nabla D_T^{k+1}(\hat{v}_T), \nabla w)_{L^2(T)} = (\nabla v_T, \nabla w)_{L^2(T)} + (v_{\partial T} - v_T, \nabla w n_T)_{L^2(\partial T)} \quad (9)$$

Cette reconstruction est définie de manière unique en imposant la valeur moyenne :

$$\int_T D_T^{k+1}(\hat{v}_T) = \int_T v_T \quad (10)$$

Comme $E_T^k(\hat{v}_T)$ n'est pas stable au sens où $E_T^k(\hat{v}_T) = 0$ n'implique pas nécessairement que $v_{\partial T} = v_T = cst$, il est nécessaire de coupler l'opérateur E_T^k à l'opérateur de stabilisation $S_{\partial T}^k$. Ainsi, l'ajout de ce terme de stabilisation permet de retrouver une propriété de stabilité locale qui est nécessaire pour démontrer la coercivité du problème discret.

Lemme 2 (Stabilité et caractère borné)
Soit l'opérateur de reconstruction du gradient symétrique défini par (7) et l'opérateur de stabilisation défini par (8) . Soit $\gamma_{\partial T}$ défini par (4). Alors, il existe $0 < \alpha_s < \alpha_b < +\infty$, indépendants de h, tels que, pour tout $T \in T_h$ et tout $\hat{v}_T \in U_T^k$:

$$\alpha_s |\hat{v}_T|_{1,T} \le \sqrt{\|E_T^k(\hat{v}_T)\|^2 + \|\gamma_{\partial T}^{\frac{1}{2}} S_{\partial T}^k(\hat{v}_T)\|^2} \le \alpha_b |\hat{v}_T|_{1,T} \; v \in H^1(T;\mathbb{R}^d) \quad (11)$$

Preuve :
voir Lemme 4 dans [3].■

Une autre propriété importante du gradient symétrique reconstruit est une propriété de commutativité qui est essentielle pour prouver la robustesse de la méthode dans la limite incompressible.

Lemme 3 (Commutativité)
Pour tout $T \in T_h$ et tout $v \in H^1(T;\mathbb{R}^d)$, l'égalité suivante est vraie :

$$E_T^k(\hat{I}_T^k(v)) = \Pi_T^k(\nabla^s v) \quad (12)$$

où $\hat{I}_T^k: H^1(T;\mathbb{R}^d) \to U_T^k$ est l'opérateur local de réduction tel que :

$$\hat{I}_T^k(v) = (\Pi_T^k(v), \Pi_{\partial T}^k(v)) \quad (13)$$

Preuve :
voir Proposition 3 dans [3] . ■

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour la suite, nous définissons également l'opérateur de divergence discret $D_T^k : U_T^k \to P_d^k(T;\mathbb{R})$ tel que :

$$D_T^k(\hat{v}_T) = trace\left(E_T^k(\hat{v}_T)\right) \quad \forall\, \hat{v}_T \in U_T^k \tag{14}$$

Remarque (Variantes des méthodes HHO) :
Il existe plusieurs variantes de la méthode HHO présentée ici. Une fois le degré polynomial k fixé pour les inconnues de face, l'inconnue de cellule peut être de degré polynomial $l \in \{k-1, k, k+1\}$, $l \geq 1$, sans changement des propriétés d'approximation et de stabilité (cf. [7]).

2.4 Problème global discret HHO

Définissons maintenant le problème global discret. Posons :

$$P_d^k(T_h;\mathbb{R}^d) := \times_{T\in T_h} P_d^k(T;\mathbb{R}^d) \text{ et } P_{d-1}^k(F_h;\mathbb{R}^d) := \times_{F\in F_h} P_{d-1}^k(F;\mathbb{R}^d) \tag{15}$$

L'espace global des inconnues HHO est défini tel que :

$$U_h^k := P_d^k(T_h;\mathbb{R}^d) \times P_{d-1}^k(F_h;\mathbb{R}^d) \tag{16}$$

Pour un élément générique $\hat{v}_h \in U_h^k$, nous utilisons la notation $\hat{v}_h := (v_{T_h}, v_{F_h})$. Pour toute cellule $T \in T_h$ du maillage, nous notons $\hat{v}_T \in U_T^k$ les composantes locales de $\hat{v}_h$ liées à la cellule T et aux faces composant son bord ∂T , et pour toute face $F \in F_h$, nous notons v_F la composante de $\hat{v}_h$ liée à la face F . Des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sont appliquées de manière forte sur les inconnues liées aux faces de bord $F \in F_h^b$. Nous introduisons pour cela le sous-espace :

$$U_{h,0}^k := \{\hat{v}_h \in U_h^k \ : \ v_F = 0, \ \forall F \in F_h^b\} \tag{17}$$

Nous définissons la fonction $\|.\|_{U_{h,0}^k}$ telle que :

$$\|\hat{v}_h\|_{U_{h,0}^k}^2 = \sum_{T\in T_h} |\hat{v}_T|_{1,T}^2, \ \forall\, \hat{v}_h \in U_{h,0}^k \tag{18}$$

Proposition 1
La fonction $\|.\|_{U_{h,0}^k}$ définit une norme sur $U_{h,0}^k$.

Preuve :
Il suffit de montrer que pour tout $\hat{v}_h \in U_{h,0}^k$, $\|\hat{v}_h\|_{U_{h,0}^k}^2 = 0$ implique $v_T = 0$ pour tout $T \in T_h$ et $v_F = 0$ pour tout $F \in F_h$. Remarquons que $\|\hat{v}_h\|_{U_{h,0}^k}^2 = 0$ implique que pour tout $T \in T_h$:

$$\nabla^s v_T = 0, \quad et \quad v_T|_F - v_F = 0, \ \forall F \in F_T \tag{19}$$

Prenons une cellule $T \in T_h$ ayant au moins une face de bord $F \in F_T \cap F_h^b$, si bien que $v_F = 0$. Alors $v_T|_F = 0$ car $v_T|_F - v_F = 0$. En combinant cela à $\nabla^s v_T = 0$ et avec une inégalité de Korn, nous obtenons $v_T = 0$. De plus, comme $v_T|_{F'} - v_{F'} = 0, \ \forall F' \in F_T \setminus F$, nous en déduisons $v_{F'} = 0$ pour tout $F' \in F_T$. Il suffit de prolonger ce raisonnement couche par couche de cellules jusqu'à avoir parcouru toutes les cellules $T \in T_h$ et toutes les faces $F \in F_h$.■

Le problème discret est le suivant :

Trouver $\hat{v}_h \in U_{h,0}^k$ tel que

$$\sum_{T\in T_h} a_T(\hat{u}_T, \hat{v}_T) = \sum_{T\in T_h} (f, \hat{v}_T)_{L^2(T)}, \quad \forall\, \hat{v}_T \in U_{h,0}^k \tag{20}$$

Avec :

$$a_T(\hat{u}_T, \hat{v}_T) = 2\mu\{(E_T^k(\hat{u}_T), E_T^k(\hat{v}_T))_{L^2(T)} + (S_{\partial T}^k(\hat{u}_T), S_{\partial T}^k(\hat{v}_T))_{L^2(\partial T)}\} + \lambda (D_T^k(\hat{u}_T), D_T^k(\hat{v}_T))_{L^2(T)} \tag{21}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le membre de droite dans (21) est obtenu en remplaçant les opérateurs continus par leurs versions discrètes et en ajoutant le terme de stabilisation. Nous pouvons montrer qu'il existe une unique solution $\hat{u}_h \in U_{h,0}^k$ au problème (1) (cela découle de la propriété de stabilité locale du Lemme 2). De plus, comme les contributions dans (21) sont calculées de manière locale aux cellules, il est très facile de paralléliser ces calculs.

Les méthodes HHO ont des taux de convergence optimaux sur des maillages généraux aussi bien en norme de l'énergie qu'en norme L^2 (sans hypothèse de régularité elliptique).

Théorème 1 (Erreur en norme de l'énergie)
Soit k≥1 et soit $u \in H_0^1(T;\mathbb{R}^d)$, l'unique solution du problème (1) et $\hat{u}_h \in U_{h,0}^k$ l'unique solution du problème (20). En supposant également la régularité additionnelle $u \in H^{k+2}(T;\mathbb{R}^d)$, il existe une constante C>0, indépendante de h, μ , et λ , telle que :

$$\left(\sum_{T\in T_h} |\hat{I}_T^k u - \hat{u}_T|_{1,T}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C h^{k+1}\left(2\mu |u|_{H^{k+2}(\Omega_0)} + \lambda |\nabla\cdot u|_{H^{k+1}(\Omega_0)}\right) \quad (22)$$

Preuve :
voir Théorème 8 dans [3] . ■

Théorème 2 (Erreur en norme L^2)
Sous les hypothèses du Théorème 1 et en supposant la régularité elliptique pour le problème du modèle (1), il existe une constante $C>0$, indépendante de h , μ , et λ , telle que :

$$\left(\sum_{T\in T_h} \|\Pi_T^k u - u_T\|_{L^2(T)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C h^{k+2}\left(2\mu |u|_{H^{k+2}(\Omega_0)} + \lambda |\nabla\cdot u|_{H^{k+1}(\Omega_0)}\right) \quad (23)$$

Preuve :
voir Théorème 11 dans [3] . ■

Les estimations du théorème 1 et du théorème 2 sont robustes à limite incompressible puisqu'elles ne font intervenir que la régularité de $\nabla\cdot u$ en fonction de λ . Ces taux de convergence sont confirmés numériquement ainsi que la robustesse. Enfin, il est important de rappeler que ces taux de convergence sont supérieurs d'un ordre à ceux obtenus pour des éléments finis H^1 -conformes en utilisant des polynômes de degré k dans les cellules.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Implémentation

L'implémentation dans *code_aster* de nouvelles méthodes numériques qui diffèrent des éléments de Lagrange peut être difficile. Nous listons les principales raisons :

- Nombre limité de supports géométriques possible dans le maillage : triangle et quadrangle en 2D, et tétraèdre, hexaèdre , prisme et pyramide en 3D (pas de support des maillages polyédriques) ;
- Connexion forte entre le support géométrique et l'élément choisi. Le degré d'approximation de la méthode est déterminé par le support géométrique. Par exemple, une approximation linéaire pour des triangles à 3 nœuds (`TRIA3`) et quadratique pour des triangles à 6 nœuds (`TRIA6`) ;
- L es inconnues élément fini sont supportées uniquement par des nœuds physiques du maillage (et non par des faces ou des cellules du maillage comme c'est le cas pour les méthodes volumes finis, Galerkin discontinu, et HHO).

Le principale objectif pour l'implémentation des méthodes HHO dans *code_aster* est de réutiliser autant que possible l'architecture du code et de ne pas modifier les points critiques du code que sont :

- Les structures de données
- Les catalogues éléments finis
- La localité des calculs élémentaires
- L'opération d'assemblage

Nous nous limitons nous même à l'implémentation des méthodes HHO pour la mécanique non-linéaire dans *code_aster* pour un nombre limité de support géométriques, triangle et quadrangle en 2D et tétraèdre et hexaèdre en 3D. De plus, uniquement les approximations linéaires $k=1$ et quadratiques $k=2$ sont implémentés. Les différentes modifications sont limités à deux opérateurs :

- `CREA_MAILLAGE`
- `STAT_NON_LINE`

3.1 Préliminaires

Pour implémenter les méthodes HHO dans *code_aster*, deux étapes sont particulièrement importantes et nécessitent une attention spéciale. La première est la condensation statique (ou complément de Schur) qui permet d'éliminer localement les inconnues de cellule dans les contributions élémentaires (à la fin, un problème plus petit composé uniquement des inconnues de face est résolu). La seconde étape importante est la phase d'assemblage du problème global composé uniquement des inconnues de face à partir des contributions élémentaires après condensation statique. Ces deux étapes importantes sont illustrées sur la figure 3.1-1. Nous allons expliquer dans les prochaines sections comment réaliser ces opérations dans *code_aster* en réalisant des modifications mineures de l'architecture du code.

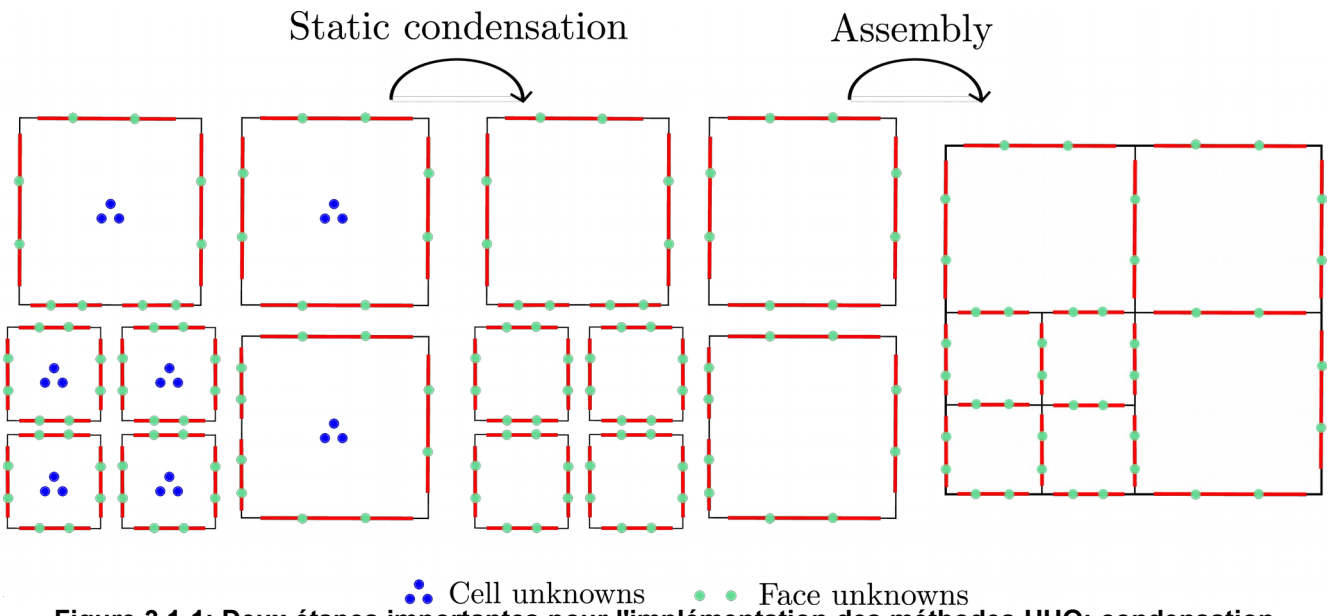


Figure 3.1-1: Deux étapes importantes pour l'implémentation des méthodes HHO: condensation statique et assemblage.

3.2 Inconnues HHO et numérotation

Nous rappelons que les inconnues HHO $\hat{v}_T=(v_T, v_{\partial T})\in U_T^k$ que nous calculons sont les coefficients des polynômes des cellules et des faces (ces coefficients n'ont a priori aucun sens physique). Après la condensation statique, un problème global formulé en termes d'inconnues de face doit être assemblé. Puisque, l'assemblage doit être réalisé face par face et que les inconnues HHO ne peuvent être supportées que par des nœuds physiques du maillage dans *code_aster*, nous avons besoin que chaque face du maillage possède au moins un nœud qui n'est partagé avec aucune autre face du maillage (typiquement un nœud localisé au barycentre de la face). C'est le cas en 2D pour le triangle à 7 nœuds (TRIA7) et le quadrangle à 9 nœuds (QUAD9), et en 3D pour l'hexaèdre à 27 nœuds (HEXA27). Ces supports géométriques correspondent aux éléments quadratiques pour les éléments isoparamétriques. Malheureusement, il n'y a pas dans *code_aster* de tétraèdre avec cette propriété. C'est pourquoi, nous avons ajouté un convertisseur de maillage dans CREA_MAILLAGE nommé TETRA4_9 et qui permet de transformer un tétraèdre à 4 nœuds en un tétraèdre à 9 nœuds. Les nouveaux nœuds sont localisés au barycentre des faces.

Les inconnues de face v_F pour les faces $F\in F_h$ sont supportées par le nœud qui est localisé au barycentre de la face F. Ces nœuds physiques du maillage qui supportent les inconnues de face sont nommés *unknown_nodes*. De plus, comme les faces sont supposées planes, nous utilisons les nœuds sommets pour décrire la géométrie des cellules et des faces et pour calculer les différentes intégrales. Ces nœuds physiques du maillage qui décrivent la géométrie sont nommés *geometric_nodes*. Finalement, dans le cas de l'HEXA27, les nœuds localisés aux milieux des segments ne sont pas utilisés et sont nommés *empty_nodes*. Ces différents catégories de nœuds sont illustrés sur la figure.3.2-2. De plus, les inconnues de cellule v_T sont stockés dans un CHAM_ELEM (un champ constant par élément).

Ces astuces sur la localisation des inconnues HHO permettent de réutiliser les structures de données et l'assemblage sans modifications. La numérotation utilisée pour l'assemblage est nommé *global numbering car* c'est la numérotation utilisée pour assembler le problème global. Une autre numérotation est aussi utilisée, nommée l*ocal numbering*, qui est utilisée pour sommer les différentes contributions élémentaires d'une cellule donnée avant la condensation statique (cette numérotation n'est jamais utilisée pour assembler un problème global). Cela est fait en ajoutant au noeud barycentre de la cellule, nommé Cell node, les inconnues de cellule. Ces deux numérotations sont présentées sur la Fig.3.2-1.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

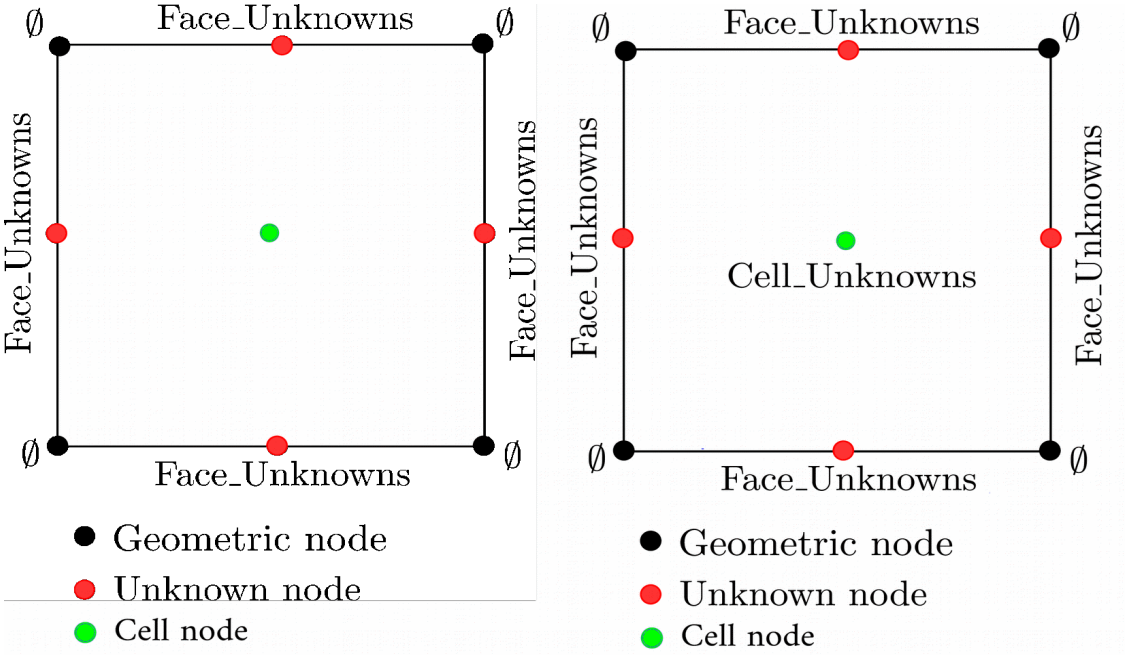
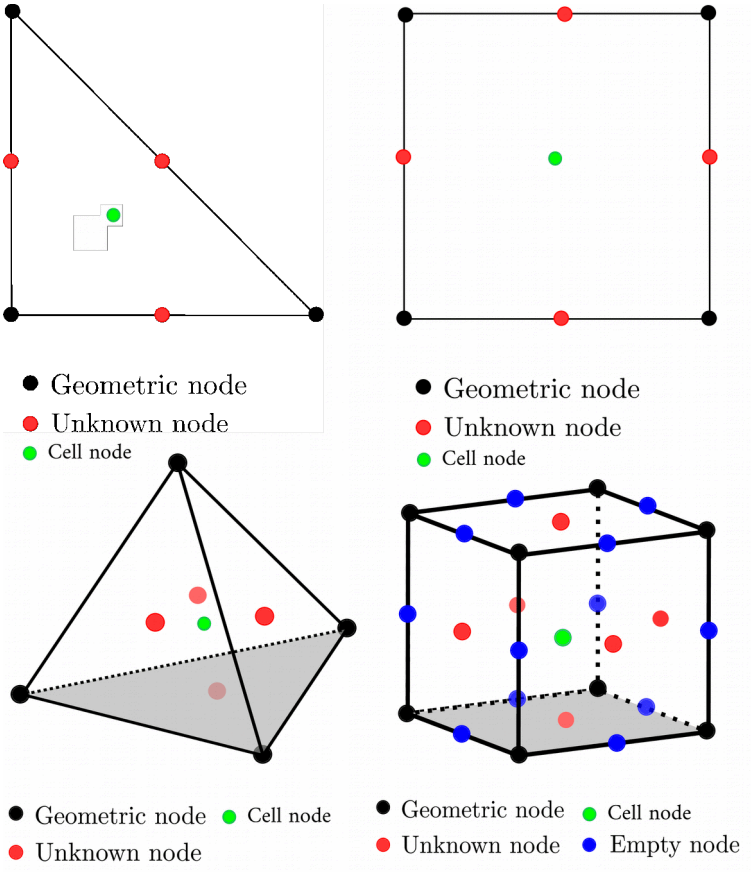


Figure 3.2-1: Deux numérotations sont utilisées: globale (gauche) et locale (droite).

Figure 3.2-2: Différents catégories de nœuds utilisés pour les supports géométriques `TRIA7`, `QUAD9`, `TETRA9` et `HEXA27`.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 Combinaison et condensation statique

Une des difficultés principales est la condensation statique car pour les éléments finis de Lagrange, les contributions élémentaires sont calculées localement à l'élément (cellule ou face) puis assemblées directement dans le problème global en utilisant la numérotation globale (voir Fig. 3.3-2). Alors que pour les méthodes HHO, la condensation statique doit être réalisée avant l'assemblage. Ainsi, nous devons ajouter une étape intermédiaire. Pour commencer, toutes les contributions élémentaires venant d'une même cellule sont sommées localement dans A_{loc} et b_{loc} en utilisant la numérotation locale. Cette opération est nommée *Summation.* De plus, en supposant que les inconnues de cellule v_T sont ordonnées avant les inconnues des faces $v_{\partial T}$, le problème local à assembler est le suivant :

$$\begin{bmatrix} A_{loc}^{T,T} & A_{loc}^{T,\partial T} \\ A_{loc}^{\partial T,T} & A_{loc}^{\partial T,\partial T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_T \\ v_{\partial T} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} b_{loc}^{T} \\ b_{loc}^{\partial T} \end{bmatrix} \tag{24}$$

où A_{loc} et b_{loc} ont été décomposés par bloc. Le bloc $A_{loc}^{T,T}$, composé uniquement des inconnues de cellule v_T , est défini positif (le bloc est dense). Ainsi, nous pouvons éliminer les inconnues de cellule v_T pour garder uniquement les inconnues des faces , ce qui mène à :

$$A_{cond}\, v_{\partial T} := b_{cond} \tag{25}$$

Où :

$$A_{cond} = A_{loc}^{\partial T,\partial T} - A_{loc}^{\partial T,T} \left(A_{loc}^{T,T}\right)^{-1} A_{loc}^{T,\partial T} \tag{26}$$

$$b_{cond} = b_{loc}^{\partial T} - A_{loc}^{\partial T,T} \left(A_{loc}^{T,T}\right)^{-1} A_{loc}^{T,\partial T} b_{loc}^{T} \tag{27}$$

où A_{cond} et b_{cond} sont formulés uniquement en termes d'inconnues de face $v_{\partial T}$. Cette opération est nommée *Static condensation*. La difficulté principale de la condensation statique est que ses entrées A_{loc} et b_{loc} utilisent la numérotation locale, alors que ses sorties A_{cond} et b_{cond} utilisent la numérotation globale. Finalement, A_{glob} et b_{glob} sont assemblés dans le problème global en utilisant la numérotation globale. L'enchaînement de ces différentes opérations (calculs élémentaires, sommation, condensation statique) pour les méthodes HHO est résumé en Fig.3.3-1. Notons que les contributions venant des chargements de Neumann sont assemblées directement dans le problème global car ils ne font intervenir que les inconnues des faces.

De plus, après la résolution du problème global, la valeur des inconnues de face $v_{\partial T}$ sont connues. La décondensation statique permet de recalculer la valeur des inconnues de cellule v_T à partir des inconnues de face $v_{\partial T}$ telle que :

$$v_T = \left(A_{loc}^{T,T}\right)^{-1} \left(b_{loc} - A_{loc}^{T,\partial T}\, v_{\partial T}\right) \tag{28}$$

Pour économiser du temps de calcul, la matrice $\left(A_{loc}^{T,T}\right)^{-1} A_{loc}^{T,\partial T}$ et le vecteur $\left(A_{loc}^{T,T}\right)^{-1} b_{loc}$ sont stockés localement dans deux `CHAM_ELEM` durant la condensation statique puis réutilisés pendant la décondensation statique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

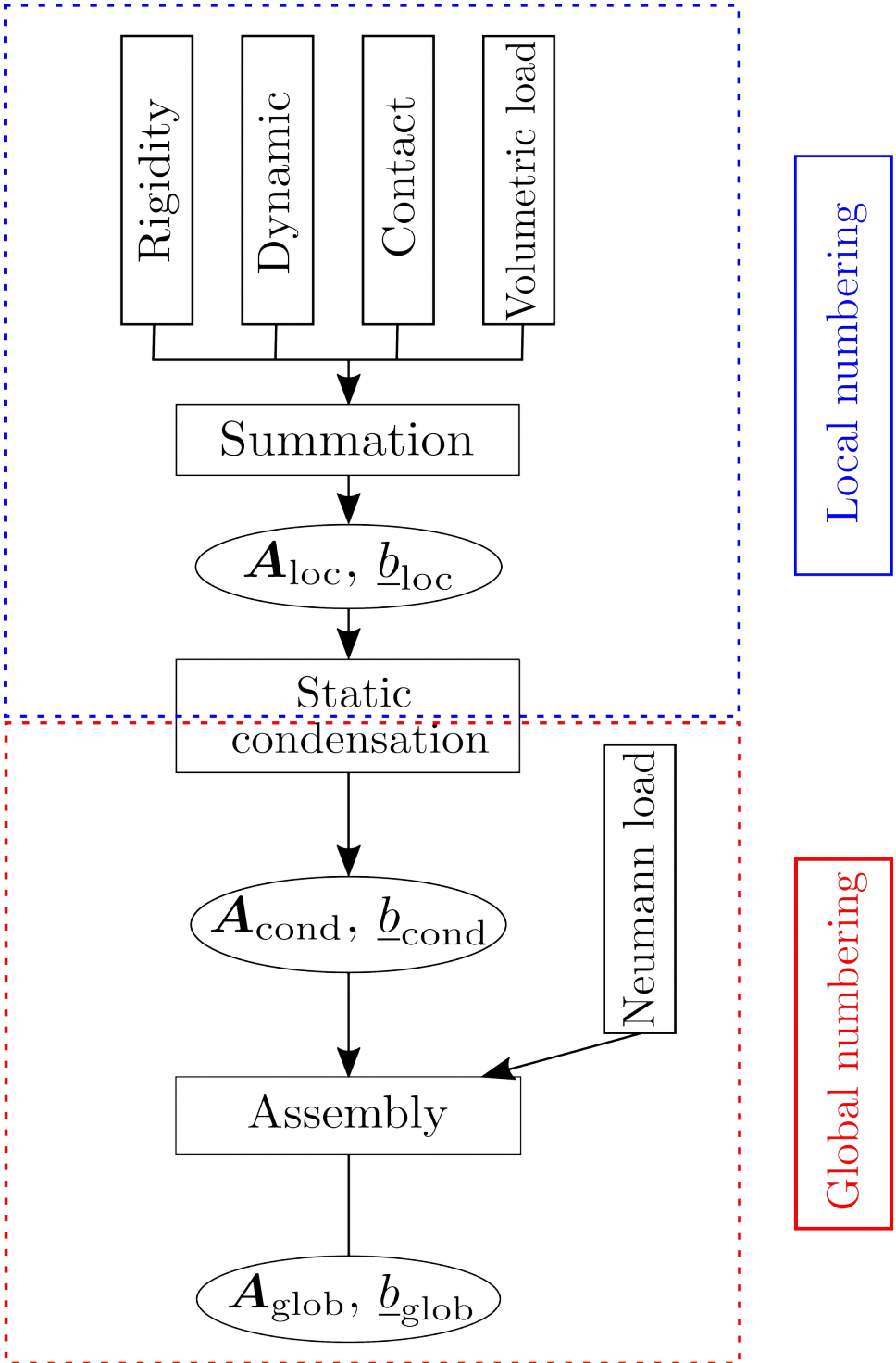


Figure 3.3-1: Séquence des opérations pour assembler le problème global en utilisant les numérotations locale et globale pour les méthodes HHO.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

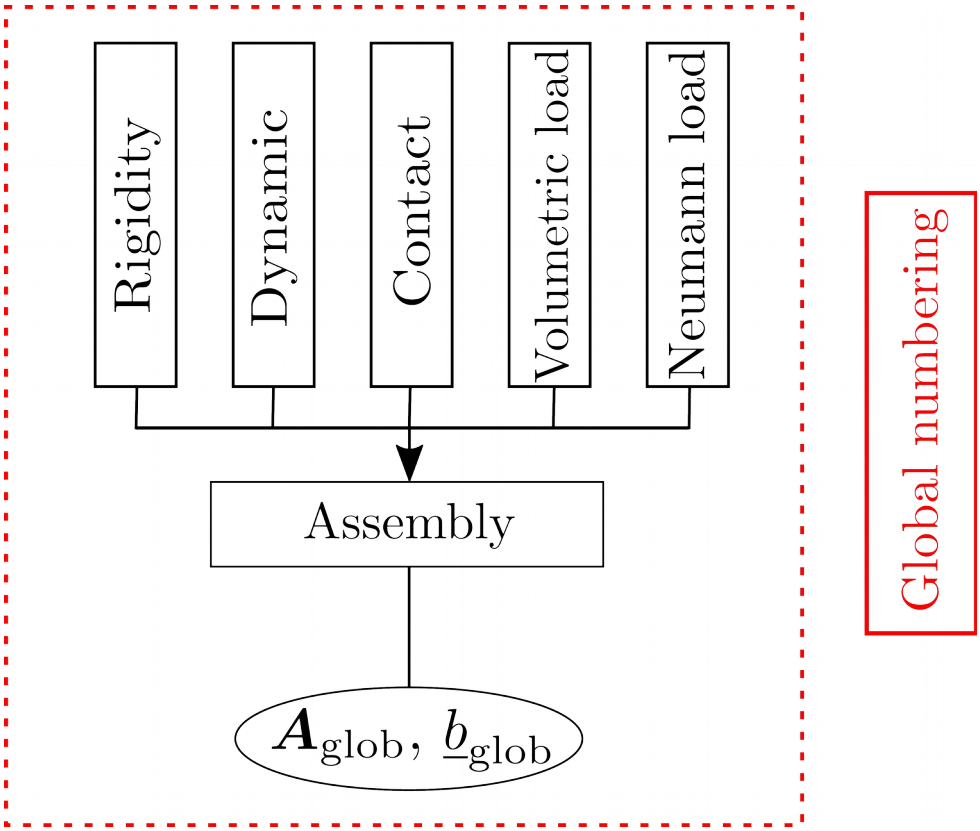


Figure 3.3-2: Séquence des opérations pour assembler le problème global en utilisant la numérotation globale pour les éléments finis de Lagrange.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.4 Opérateur STAT_NON_LINE

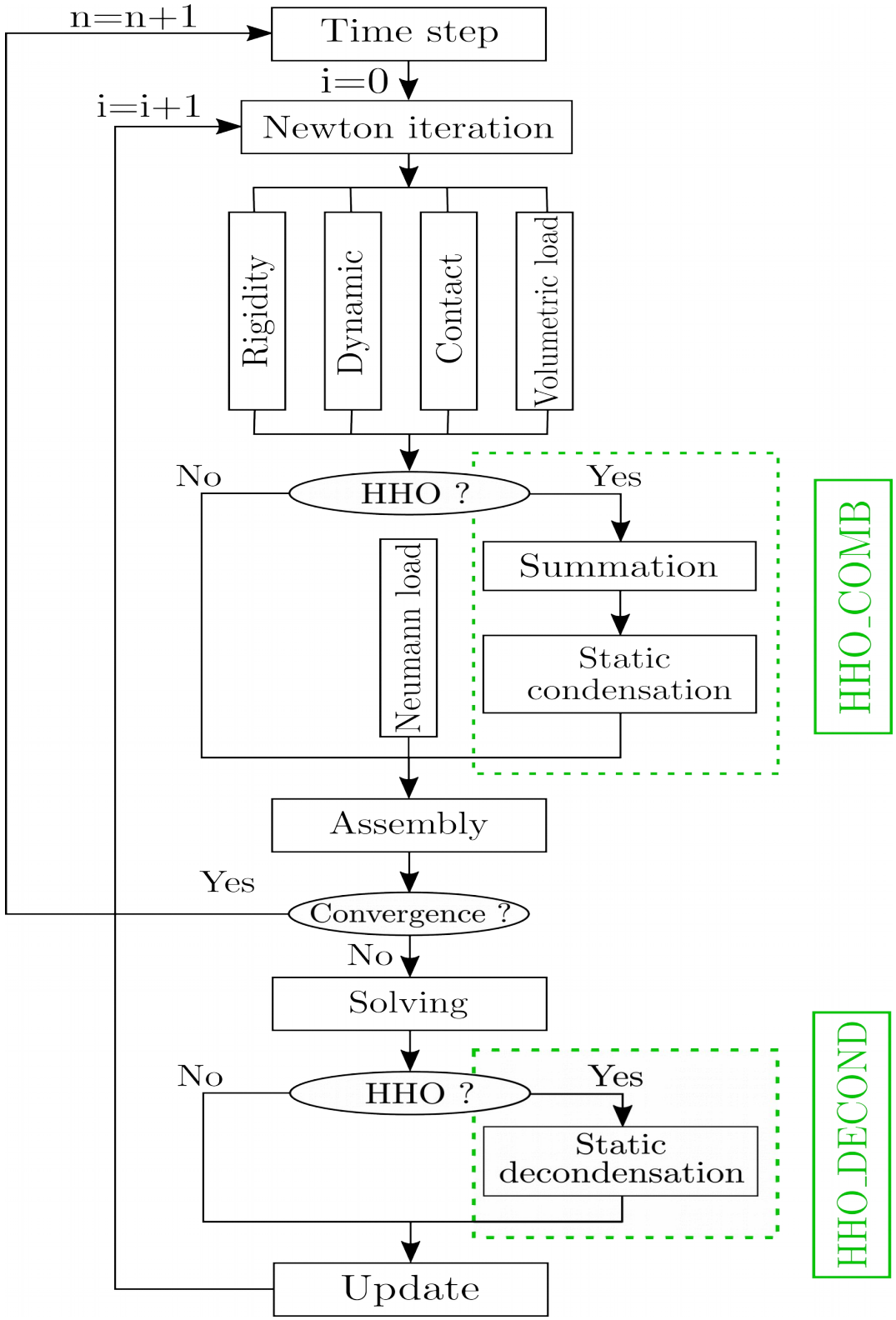


Figure 3.4-1: Description du solveur non-linéaire STAT_NON_LINE où les modifications pour implémenter les méthodes HHO sont ajoutées (en vert).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le problème non-linéaire est résolu avec une méthode de Newton. Pour intégrer les méthodes HHO dans cet opérateur, deux étapes intermédiaires sont ajoutées. La première, nommée HHO_COMB[1], réalise la sommation et la condensation statique. Cette opération est appelée entre le calcul des contributions élémentaires et l'assemblage. La seconde, nommée HHO_DECOND[2], permet de réaliser la décondensation statique après la résolution du problème global. Il est suffisant d'ajouter deux conditions booléennes dans l'opérateur STAT_NON_LINE pour utiliser ces deux opérations si les méthodes HHO sont utilisées dans le calcul. Ces modifications sont présentées sur la Fig. 3.4-1 . Notons que ces modifications sont très limitées dans le code.

3.5 Conditions aux limites de Dirichlet

Les conditions aux limites de Dirichlet sont imposées fortement en modifiant la matrice et le chargement. L'utilisateur doit spécifier les déplacements imposés sur le bord de Dirichlet. Cependant, il n'est pas évident pour l'utilisateur de donner les valeurs des inconnues de faces car ces coefficients n'ont a priori pas de sens physique. Nous avons ajouté un traducteur automatique qui calcule la projection L^2 $\Pi_F^k(u_D)$ et impose la valeur $v_F=\Pi_F^k(u_D)$ à partir du déplacement donné u_D aux nœuds de la face (au sens de Lagrange). En pratique, dans AFFE_CHAR_CINE, il suffit de donner les conditions sur DX, DY et/ou DZ et l'opérateur le traduit automatiquement en conditions sur les polynômes HHO.

3.6 Post-traitement

Les inconnues HHO sont les coefficients de polynômes. Ces coefficients n'ont a priori pas de sens physique. Ainsi, un post-traitement doit être appliqué afin de pouvoir visualiser ces résultats. Nous créons un nouveau champ ELNO qui viendra remplacer les inconnues HHO dans le champ DEPL à la fin du calcul. La valeur du déplacement en un nœud du maillage est la moyenne des valeurs des inconnues de cellule qui contient ce nœud. Notons que ce champ est globalement continu contrairement aux champs HHO.

3.7 Périmètre d'usage

La méthode HHO est utilisable uniquement en statique non-linéaire (STAT_NON_LINE), les fonctionnalités suivantes sont exclues : contact/frottement, pilotage, recherche linéaire, réduction de modèle, macro-éléments, dynamique, calcul de modes vibratoires ou de critères de flambement.
La méthode est utilisable pour les lois de comportement en petites et grandes déformations (modèle GDEF_LOG).
Par ailleurs, la méthode HHO ne peut être utilisée simultanément avec une méthode élément fini standard (dans AFFE_MODELE). Les conditions limites ne peuvent être affectées que par élimination (AFFE_CHAR_CINE) et les chargements volumiques (comme la pesanteur) sont exclus.
La méthode fonctionne sur des triangles et des quadrangles en 2D, des tétraèdres et des hexaèdres en 3D.

Remarque : ces limitations ne sont pas nécessairement d'origine théorique mais simplement qu'il n'existe pas de tests vérifiant son bon fonctionnement.

1 Nom de l'option de calcul
2 Nom de l'option de calcul

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Bibliographie

[1] N. Pignet, Thèse de doctorat, Hybrid High-Order methods for nonlinear solids mechanics, 2019.

[2] D. Di Pietro., A. Ern, S. Lemaire (2014) An arbitrary-order and compact-stencil discretization of diffusion on general meshes based on local reconstruction operators. Comput Methods Appl Math **14(4)** , 461-472.

[3] D. Di Pietro, A. Ern (2015) A Hybrid High-Order locking-free method for linear elasticity on general meshes. Comput Methods Appl Mech Engrg **283,** 1-21.

[4] M. Abbas, A. Ern, N. Pignet (2018) Hybrid High-Order methods for finite deformations of hyperelastic materials. Comput Mech **62(4)** , 909-928.

[5] M. Abbas, A. Ern, N. Pignet (2019) A Hybrid High-Order method for incremental associative plasticity with small deformations. Comput Methods Appl Mech Engrg **346** , 891-912.

[6] M. Abbas, A. Ern, N. Pignet (2019) A Hybrid High-Order methods for finite elastoplastic deformations within a logarithmic strain framework. Int. J. Num. Meth. Engng.

[7] B. Cockburn, D. Di Pietro, A. Ern (2016) Bridging the Hybrid High-Order and Hybrydisable Discontinuous Galerkin methods. ESAIM Math Model Numer Anal **50(3)** , 635-650.

[8] J. Droniou, R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin (2010) A unified approach to mimetic finite difference, hybrid finite volume and mixed finite volume methods. Math. Models. Methods Appl. Sci. **20(2)** , 265–295.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)