WTNA112 – Pressurisation thermique d'une éprouvette cylindrique saturée non drainée

Résumé :

Il s'agit d'un problème de THM saturé et élastique. On augmente la température d'un échantillon non drainé maintenu à confinement constant (contrainte totale constante au bord). La pression d'eau résultante varie alors linéairement avec la température selon un coefficient de pressurisation thermique que l'on calcule analytiquement. La solution obtenue ici est donc à comparer avec une solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

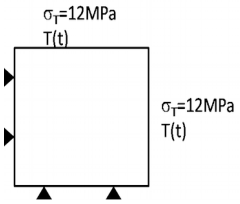
On considère un cylindre de rayon $1\,cm$ et de hauteur $1\,cm$ (soit un maillage correspondant à un domaine carré de $1\,cm \times 1\mathrm{cm}$, la modélisation étant axisymétrique).

1.2 Propriétés du matériau

On choisit ici des paramètres correspondant à une argilite de manière à obtenir un coefficient de pressurisation thermique réaliste.

Eau liquide	Masse volumique $(kg.m^{-3})$	10^3
	Chaleur massique à pression constante $(J.K^{-1})$	4180
	Viscosité dynamique de l'eau liquide $(Pa.s)$	0.001
	Coefficient de dilatation thermique du liquide (K^{-1}) (si constant, cf. section suivante)	1.10^{-4}
	Compressibilité (Pa^{-1})	$K_e = 5.10^{-10}$
Solide	Module d'Young drainé $E(Pa)$	$3{,}14\,10^9$
	Coefficient de Poisson	0.375
	Coefficient de dilatation thermique du solide (K^{-1})	10^{-5}
Etat de référence	Porosité	0.18
	Température (K)	273
	Pression liquide (Pa)	0
Coefficients homogénéisés	Masse volumique homogénéisée $(kg.m^{-3})$	2410
	Coefficient de Biot	0.6
	Perméabilité intrinsèque (m^2)	$K_{\mathrm{int}} = 10^{-21}$
	Conductivité thermique	$\lambda_T = 1.61$

1.3 Conditions aux limites et chargements



On impose :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Sur les bords bas et gauche : déplacements nuls, flux hydraulique nul, flux thermique nuls. Ce sont des conditions de symétrie.
- Sur les bords haut et droit : Contrainte totale imposée à $12\,MPa$, flux hydraulique nul, température imposée fonction du temps $T(t)$ suivant une rampe linéaire telle que :

  $T(t)=T_0+\frac{\Delta T}{t_{sim}}$ où t_{sim} correspond au temps de simulation (ici $t_{sim}=1\mathrm{h}$) et ΔT la variation de température imposée pendant ce temps (ici $\Delta T=40\,°C$).

1.4 Conditions initiales

$P(x)=4\mathrm{MPa}$ et $T(x)=T_0=20\,°C$ partout.

2 Solution de référence

On rappelle que l'apport de masse d'eau s'écrit : $m_w=\varphi\,.\,\rho_w\,.(1+\varepsilon_v)$, ce que l'on peut dériver sous la forme suivante : $dm_w=d\varphi\,\rho_w(1+\varepsilon_v)+d\,\rho_w\varphi\,(1+\varepsilon_v)+\rho_w\varphi\,d\,\varepsilon_v$ avec φ la porosité eulérienne.

Si l'on se place en hypothèse de petits déplacements, on aura donc :

$$dm_w=d\varphi\,\rho_w+d\,\rho_w\varphi+\rho_w\varphi\,d\,\varepsilon_v \tag{1}$$

La variation de porosité s'écrit suivant la relation :

$$d\,\varphi=(b-\varphi)\left(d\,\varepsilon_V-3\,\alpha_0\,dT+\frac{dp_w}{K_s}\right) \tag{2}$$

avec α_0 la dilatation linéique du squelette (assimilable au milieu poreux). On rappelle que le coefficient de Biot b et le module de compressibilité des grains solides K_s sont reliés au module de compressibilité « drainé » du milieu poreux K_0, tel que :

$$b=1-\frac{K_0}{K_s}$$

Par ailleurs, la variation de la masse volumique de l'eau s'écrit :

$$\frac{d\,\rho_w}{\rho_w}=\frac{dp_w}{K_w}-3\,\alpha_w\,dT \tag{3}$$

avec le module de compressibilité de l'eau K_w et son module de dilatation α_w.

Enfin, si la loi de comportement est élastique, on rappelle que la déformation est reliée à la contrainte effective tel que :

$$d\,\varepsilon_V=\frac{d\,\sigma'}{K_0}+3\,\alpha_0\,dT \tag{4}$$

Par ailleurs, la formulation en contrainte totale, nous indique que :

$d\,\sigma'=d\,\sigma+b\,dp_w$, considérant ici que le milieux est à confinement constant, on a donc :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$d\sigma' = b\, dp_w$, ce qui nous donne au final

$$d\varepsilon_V = \frac{b\, dp_w}{K_0} + 3\alpha_0 dT \tag{5}$$

On peut maintenant injecter (2), (3), (4) et (5) dans l'équation (1) et on obtient que :

$$\frac{dm_w}{\rho_w} = \left(\frac{b^2}{K_0} + \frac{(b-\varphi)}{K_s} + \frac{\varphi}{K_w} \right) dp_w + \varphi \left(3\alpha_0 - 3\alpha_w \right) dT \tag{6}$$

Considérant que le milieu est non drainé on a donc :

$$\left(\frac{b^2}{K_0} + \frac{(b-\varphi)}{K_s} + \frac{\varphi}{K_w} \right) dp_w = \varphi \left(3\alpha_w - 3\alpha_0 \right) dT \tag{7}$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$dp_w = \Lambda\, dT \tag{8}$$

Avec Λ le coefficient de pressurisation thermique tel que :

$$\Lambda = \frac{\phi \left(3\alpha_w - 3\alpha_0 \right)}{\left(\frac{b^2}{K_0} + \frac{(b-\phi)}{K_s} + \frac{\phi}{K_w} \right)}$$

On remarque que ce coefficient fait apparaître le différentiel thermique $(\alpha_w - \alpha_0)$

2.1 Dilatation thermique de l'eau constante

Dans le cas où $\alpha_w = cte$ l'application numérique est immédiate.

Application numérique :

Avec les données définies précédemment, on obtient :

$\Lambda = 2{,}25\, 10^5\, Pa.K^{-1}$

Ce qui donne pour une variation de température $\Delta T = 40°C$, une variation de pression de $\Delta p = 9{,}01\, Mpa$ (soit une pression de 13,01 MPa).

2.2 Dilatation thermique de l'eau fonction de la température

Dans ce cas, on écrira

$$\Lambda(T) = \frac{\phi \left(3\alpha_w(T) - 3\alpha_0 \right)}{\left(\frac{b^2}{K_0} + \frac{(b-\phi)}{K_s} + \frac{\phi}{K_w} \right)}$$ et

$dp_w = \Lambda(T) dT$

Pour pouvoir intégrer cette formule, on considère que la dilatation thermique de l'eau est une fonction linéaire de la température telle que $\alpha_w = a.T + b$. $\Lambda(T)$ est alors également une fonction linéaire que l'on intègre entre la température initiale T0 et la température finale T1, ce qui donne :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\Delta\ p=\frac{A}{2}.(T2^2-T1^2)+\ B(T2-T1)$ avec

$$A=\frac{3\phi\ a}{\left(\frac{b^2}{K_0}+\frac{(b-\phi)}{K_s}+\frac{\phi}{K_w}\right)}$$

et

$$B=\frac{\phi\left(3b-3\alpha_0\right)}{\left(\frac{b^2}{K_0}+\frac{(b-\phi)}{K_s}+\frac{\phi}{K_w}\right)}$$

Application numérique :

On prend ici

$a=2{,}63\,10^{-6}$ et $b=-7\,10^{-4}$ ce qui correspond à $\alpha_w(293)=6{,}67.10^{-5}K^{-1}$ et $\alpha_w(333)=1{,}72.10^{-4}K^{-1}$ et qui constituent des valeurs réalistes pour l'eau.

Tout calcul fait, on obtient pour une variation de température entre 20°C et 60°C, une variation de pression de $\Delta\ p=10{,}9\,MPa$ et donc une pression finale de $14{,}9\,MPa$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation A

- Modélisation plane 'AXIS_THMS'. Loi mécanique 'ELAS'. Couplage 'LIQU_SATU'.
- 20×20 éléments $Q4$ de largeur égale.
- Dilatation thermique de l'eau constante

3.2 Résultats de la modélisation A

Discrétisation en temps : 10 pas de temps de $180\,s$ chacun. La solution calculée par Aster tenant compte des mouvements du fluide et de la chaleur (phénomènes diffusifs), il est normal de ne pas obtenir exactement la solution de référence. Les différences restent très faibles.

Résultat à l'instant final $3600\,s$:

$N°$ **NŒUD**	$COOR_X$	$COOR_Y$	**Référence** $PRE1(MPa)$	**Aster** $PRE1(MPa)$	**Différences** $(\%)$	**Tolérance** $(\%)$
1	0	0	13,01	12,99	0,1	1
2	0	0.01	13,01	12,99	0,1	1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation B

- Modélisation plane 'AXIS_THMS'. Loi mécanique 'ELAS_ORTH'. Couplage 'LIQU_SATU'. 20×20 éléments $Q4$ de largeur égale. Termes de couplages également anisotropes.

Il s'agit de la même modélisation que précédemment mais en passant par les modules d'orthotropie (bien que l'éprouvette soit considérée comme isotrope et que les caractéristiques demeurent les mêmes dans chaque direction). En théorie les résultats devraient donner exactement la même chose. Le modèle diffère cependant ici légèrement et la solution analytique indiquée précédemment n'est plus tout à fait exacte. En effet au lieu de la relation utilisée en isotrope :

$$d\varphi=(b-\varphi)\left(d\varepsilon_V-3\alpha_0 dT+\frac{dp_w}{K_s}\right)$$

La relation utilisée dans ce cas devient tensorielle (cf. doc R7.01.11) et est :

$$d\varphi=\boldsymbol{B}:\boldsymbol{d}\varepsilon-\varphi\, d\varepsilon_V-3\alpha_\varphi dT+\frac{dp_{gz}-S_{lq}dp_c}{M_\varphi}$$

avec

$$\frac{1}{M_\varphi}=(\boldsymbol{B}-\varphi\boldsymbol{\delta}):\boldsymbol{S_0^S}:\boldsymbol{\delta}$$

où $\boldsymbol{S_0^S}$ la matrice de souplesse du squelette, fonction du module de Young de la matrice solide E^S et du coefficient de Poisson de la matrice solide ν^S .
Par ailleurs la porosité ne peut ici être intégrée analytiquement et l'est donc de manière explicite (porosité prise au temps précédent). La résolution est donc ici moins précise.

Cette modélisation a pour objectif de quantifier la différence obtenue en passant par cette modélisation. On passe également par la matrice sécante afin de tester la possibilité de cette prédiction dans le cas orthotrope.

4.2 Résultats de la modélisation B

On teste les mêmes résultats que précédemment d'abord sur 10 pas de temps comme pour la modélisation A

Résultat à l'instant final $3600\,s$ **:**

$N°$ **NŒUD**	$COOR_X$	$COOR_Y$	**Référence** $PRE1\,(MPa)$	**Aster** $PRE1\,(MPa)$	**Différences** $(\%)$	**Tolérance** $(\%)$
1	0	0	13,01	12,99	0,1	1
2	0	0.01	13,01	12,99	0,1	1

Les résultats obtenus ici sont aussi précis que dans le cas isotrope.

Pour s'en assurer on teste le même cas mais avec 15 pas de temps :

Résultat à l'instant final $3600\,s$ **:**

$N°$ **NŒUD**	$COOR_X$	$COOR_Y$	**Référence** $PRE1\,(MPa)$	**Aster** $PRE1\,(MPa)$	**Différences** $(\%)$	**Tolérance** $(\%)$
1	0	0	13,01	12.99	0,1	1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2	0	0.01	13,01	12.99	0,1	1

On converge parfaitement vers la solution analytique.

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation C

- Modélisation plane 'AXIS_THMS'. Loi mécanique 'ELAS'. Couplage 'LIQU_SATU'.
- 2 éléments triangulaires
- Dilatation thermique de l'eau suivant une loi linéaire (cf. section 2.2)

5.2 Résultats de la modélisation C

Discrétisation en temps : 30 pas de temps de $120\,s$ chacun. La solution calculée par Aster tenant compte des mouvements du fluide et de la chaleur (phénomènes diffusifs), il est normal de ne pas obtenir exactement la solution de référence. Les différences restent très faibles.

Résultat à l'instant final $3600\,s$:

$N°$ NŒUD	$COOR_X$	$COOR_Y$	Référence $PRE1(MPa)$	Aster $PRE1(MPa)$	Différences $(\%)$	Tolérance $(\%)$
4	0	0	14,9	14,84	0,7	1
1	0	0.01	14,9	14,84	0,7	1

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation D

- Modélisation plane 'AXIS_THMS'
- Deux lois de comportement sont testées : La loi mécanique 'MOHR-COULOMB' avec les propriétés suivantes :
  - $COHESION=100\,GPa$
  - $PHI=25$
  - $ANGDIL=10$

  Loi mécanique 'RANKINE' avec les propriétés suivantes :
  - $SIGMA_T=10\,Pa$

  Les propriétés élastiques restent inchangées ;
- Couplage 'LIQU_SATU'
- 20×20 éléments $Q8$ de largeur égale
- Dilatation de l'eau constante

La cohésion de la loi de Mohr-Coulomb et la limite de traction de Rankine sont prises suffisament grandes pour que le comportement reste élastique lors du chargement.

6.2 Résultats de la modélisation D

Discrétisation en temps : 10 pas de temps de $180\,s$ chacun. La solution calculée par Aster tenant compte des mouvements du fluide et de la chaleur (phénomènes diffusifs), il est normal de ne pas obtenir exactement la solution de référence. Les différences restent très faibles.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Résultat à l'instant final $3600\,s$ **:**

$N°$ **NŒUD**	$COOR_X$	$COOR_Y$	**Référence** $PRE1\,(MPa)$	**Aster** $PRE1\,(MPa)$	**Différences** $(\%)$	**Tolérance** $(\%)$
1	0	0	13,01	12,98	0,133	1
2	0	0.01	13,01	12,99	0,073	1

7 Synthèse des résultats

Les résultats sont en cohérence avec la solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)