# HSNV122 - Thermo-plasticité et métallurgie en grandes déformations en traction simple

**Résumé :**

On traite la détermination de l'évolution mécanique d'un barreau cylindrique soumis à des évolutions thermiques et métallurgiques connues et uniformes (la transformation métallurgique est de type bainitique) et à un chargement mécanique de traction.

La relation de comportement est un modèle de plasticité en grandes déformations (commande STAT_NON_LINE, mot–clé DEFORMATION : 'SIMO_MIEHE') avec écrouissage isotrope linéaire et plasticité de transformation.

La limite élastique et la pente de la courbe de traction dépendent de la température et de la composition métallurgique. Le coefficient de dilatation dépend de la composition métallurgique.

Le barreau est modélisé par des éléments axisymétriques.

Le chargement mécanique appliqué est une pression suiveuse.

Ce cas test est identique au cas test HSNV101 (modélisation B, [V7.22.101]) dans le sens où il s'agit du même matériau, du même chargement et des mêmes évolutions thermiques et métallurgiques mais dans une version en grandes déformations.

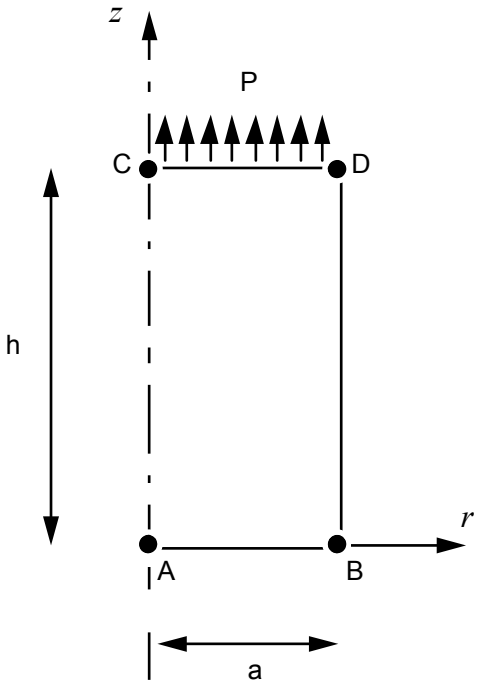


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Problème de référence

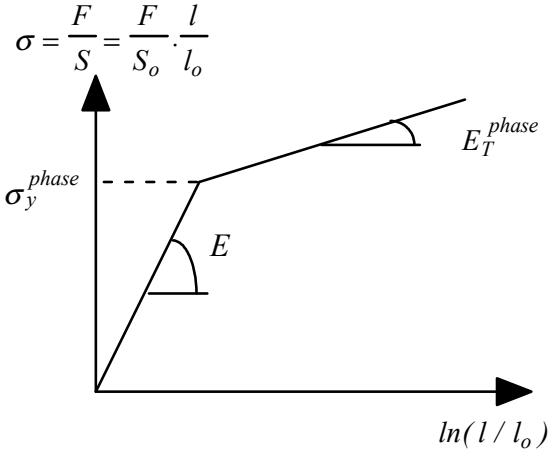
## 1.1 Géométrie

Rayon : a = 0.05 m
Hauteur : h = 0.2 m




## 1.2 Propriétés du matériau

Le matériau obéit à une loi de comportement en grandes déformations avec écrouissage isotrope linéaire et plasticité de transformation. Pour chaque phase métallurgique, la pente d'écrouissage est donnée dans le plan déformation logarithmique - contrainte rationnelle.




$l_o$ et $l$ sont, respectivement, la longueur initiale et la longueur actuelle de la partie utile de l'éprouvette.

$S_o$ et $S$ sont, respectivement, les surfaces initiale et actuelle.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$C_p = 2000000.\ \text{J m}^{-3}{}^\circ\text{C}^{-1}$ $\lambda = 9999.9\ \text{W m}^{-1}{}^\circ\text{C}^{-1}$

$E = 200000.\ 10^6\text{Pa}$ $\sigma_y^{aust} = 400.\ 10^6\text{Pa} + 0.5\ (T - T^o)\ 10^6\text{Pa}$

$\nu = 0.3$ $\sigma_y^{fbm} = 530.\ 10^6\text{Pa} + 0.5\ (T - T^o)\ 10^6\text{Pa}$

$\alpha_{fbm} = 15.\ 10^{-6}\ {}^\circ\text{C}^{-1}$ $h_{aust} = 1250.\ 10^6\text{Pa} - 5.\ (T - T^o)\ 10^6\text{Pa}$

$\alpha_{aust} = 23.5\ 10^{-6}\ {}^\circ\text{C}^{-1}$ $h_{fbm} = -50.\ 10^6\text{Pa} - 5.\ (T - T^o)\ 10^6\text{Pa}$

$\varepsilon_{fbm}^{ref} = 2.52\ 10^{-3}$ $K_f = 0.\ \text{Pa}^{-1}$

$T^{ref} = 900^\circ\text{C}$ $K_b = K_M = 10^{-10}\text{Pa}^{-1}$

$F'_{fbm} = 2.\ (1 - Z_{fbm})$

avec

| | | |
|---|---|---|
| $C_p$ | = | capacité calorifique |
| $\lambda$ | = | conductivité thermique |
| $E$ | = | module de YOUNG |
| $\nu$ | = | coefficient de Poisson |
| $*^{aust}$ | = | caractéristiques relatives à la phase austénitique |
| $*^{fbm}$ | = | caractéristiques relatives aux phases ferritique, bainitique et martensitique |
| $\alpha$ | = | coefficient de dilatation thermique |
| $\varepsilon_{fbm}^{ref}$ | = | déformation des phases ferritique, bainitique et martensitique à la température de référence, l'austénite étant considérée comme non déformée à cette température |
| $\sigma_y$ | = | limite élastique |
| $h$ | = | $\dfrac{EE_T}{E - E_T}$ |
| $K$ | = | coefficient relatif à la plasticité de transformation |
| $F$ | = | fonction relative à la plasticité de transformation |

Le TRC utilisé permet de modéliser une évolution métallurgique de type bainitique, sur toute la structure, de la forme :

$$Z_{fbm} = \begin{cases} 0. & \text{si } t \le \tau_1 \quad \tau_1 = 60\text{s} \\ \dfrac{t - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} & \text{si } \tau_1 \le t < \tau_2 \quad \tau_2 = 112\text{s} \\ 1. & \text{si } t \ge \tau_2 \end{cases}$$

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

- $u_Z = 0$ sur la face $AB$ (condition de symétrie).
- traction imposée (pression suiveuse) sur la face $CD$ :

$$p(t) = \begin{cases} p_o\ t & \text{pour } t \le \tau_1 \quad p_o = 6\ 10^6\ \text{Pa} \\ 360\ 10^6\ \text{Pa} & \text{pour } t \ge \tau_1 \quad \tau_1 = 60\text{s} \end{cases}$$

**Remarque :**

*En grandes déformations, il est indispensable d'utiliser la pression suiveuse pour tenir compte de la surface actuelle et non de la surface initiale (avant déformation).*



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- $T = T^o + \mu t$ , $\mu = -5 \,^\circ C.s^{-1}$ sur toute la structure.

## 1.4 Conditions initiales

$T^o = 900^\circ \text{C} = T^{ref}$

# 2 Solution de référence

## 2.1 Calcul de la solution de référence (cf. bib [1] et [3])

Pour un essai de traction suivant la direction $x$ , les tenseurs de Kirchhoff $\tau$ et de Cauchy $\sigma$ sont de la forme :

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } \tau = J\sigma$$

La variation de volume $J$ est donnée par la résolution de

$$J^3 - (3\varepsilon^{th} + \frac{2\sigma}{3K})J^2 - J - 3\varepsilon^{th} = 0$$

où $\varepsilon^{th}$ est la déformation thermique. Celle–ci vaut pour une transformation austénitique – bainitique :

$$\varepsilon^{th} = Z_{aust}\ \alpha_{aust}(T - T^{ref}) + Z_b\left[\alpha_{fbm}(T - T^{ref}) + \varepsilon^{ref}_{fbm}\right]$$

**Remarque :**

*Le coefficient K est le module de compression (à ne pas confondre avec les coefficients $K_{phase}$ relatifs à la loi de plasticité de transformation)*

En charge plastique, pour un écrouissage isotrope $R$ linéaire, tel que :

$$R = (Z_{aust}\ h_{aust} + Z_b\ h_{fbm})p$$

la déformation plastique cumulée $p$ vaut

$$p = \frac{J\sigma - \sigma_y}{Z_{aust}\ h_{aust} + Z_b\ h_{fbm}}$$

avec

$$\sigma_y = Z_{aust}\ \sigma_y^{aust} + Z_b\ \sigma_y^{fbm}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les tenseurs gradients de la transformation $\boldsymbol{F}$ et $\overline{\boldsymbol{F}}$ et le tenseur de déformations plastiques $\mathbf{G}^p$ sont de la forme :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & F_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & F_{yy} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J = \det \mathbf{F} = F F_{yy}^2 \Rightarrow F_{yy} = \sqrt{J/F}$$

$$\overline{\mathbf{F}} = J^{-1/3}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \overline{F} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{F}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{F}_{yy} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \det \overline{\mathbf{F}} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \overline{F} = J^{-1/3} F \\ \overline{F}_{yy} = \overline{F}^{-1/2} \end{cases}$$

$$\mathbf{G}^p = \begin{bmatrix} G^p & 0 & 0 \\ 0 & G^p_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & G^p_{yy} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \det \mathbf{G}^p = 1 \Rightarrow G^p_{yy} = (G^p)^{-1/2}$$

La loi d'évolution de la déformation plastique $G^P$ s'écrit :

$$\dot{G}^p / G^p = -2\dot{p} - 4\tau K_b (1 - Z_b) \langle \dot{Z}_b \rangle$$

- Pour $0\text{s} \leq t \leq 60\text{s}$, on a $\dot{Z}_b = 0$. Il n'y a pas de plasticité de transformation. On obtient alors :

$$G^p = e^{-2p}$$

- Pour $60\text{s} \leq t \leq 176\text{s}$, on a $\sigma = \text{constante}$.

Pour intégrer la loi d'évolution de la déformation plastique, il faut supposer que la contrainte de Kirchhoff $\tau$ varie très peu, c'est-à-dire que la variation de volume $J$ est très petite. Sous cette hypothèse, on obtient

$$G^p = e^{-2p}\, e^{-4\tau K_b \left(Z_b - Z_b^2/2\right)}$$

La composante $\overline{F}$ du gradient de la transformation est donnée par la résolution de :

$$\overline{F}^3 - \frac{\tau}{\mu G^p}\overline{F} - \frac{1}{(G^p)^{3/2}} = 0$$

Enfin, le champ de déplacement $u$ (dans la configuration initiale) est de la forme $\mathbf{u} = u_x \mathbf{X} + u_y \mathbf{Y} + u_z \mathbf{Z}$. Les composantes sont données par :

$$u_x = (F - 1) X$$
$$u_y = \left(\sqrt{J/F} - 1\right) Y$$
$$u_z = \left(\sqrt{J/F} - 1\right) Z$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 2.2 Remarque

Dans le cas test HSNV101 (modélisation B), les coefficients du matériau ont été choisis de telle manière à ne pas avoir de plasticité classique $\dot{p}=0$ pendant la transformation métallurgique qui a lieu entre les instants $60$ et $122\text{s}$. En effet si on écrit le critère de charge–décharge dans cet intervalle de temps, on obtient

$$f=\sigma-2750\,p-250 \text{ avec } \sigma = 360 \text{ MPa}$$

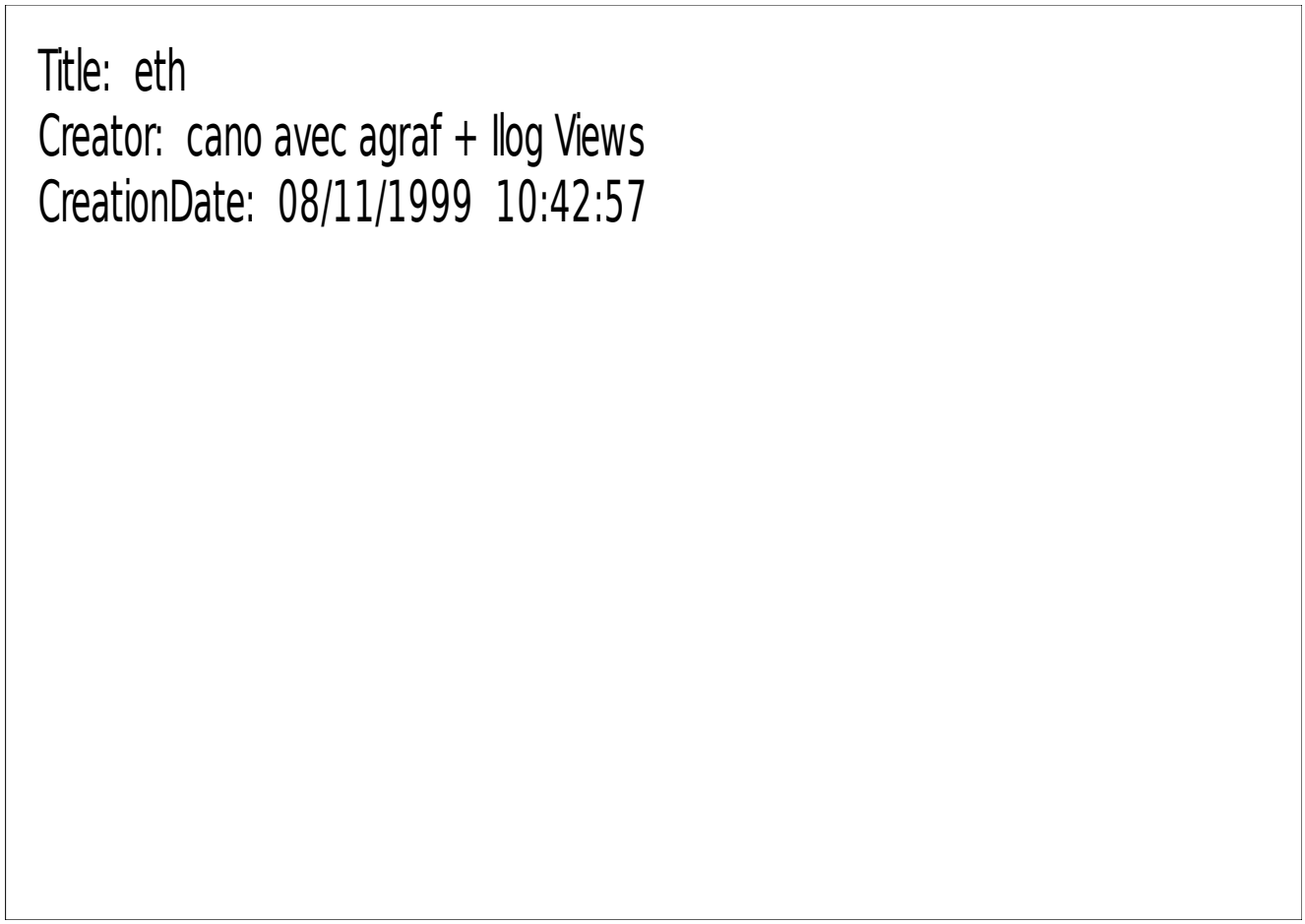
qui ne s'annule que pour une seule valeur de la déformation plastique cumulée $p$.
Pour la loi de comportement écrite en grandes déformations, le critère de charge–décharge s'écrit entre ces deux instants

$$f=J(t)\sigma-2750\,p-250 \text{ avec } \sigma = 360 \text{ MPa}$$

Dans ce cas, tant que la variable $J$ reste inférieure à la valeur obtenue au temps $t=60\text{s}$, on aura $\dot{p}=0$. Or la valeur de $J$ est fonction uniquement de la valeur de la déformation thermique (la contrainte $\sigma$ est constante et le coefficient $K$ est indépendant des phases métallurgiques et de la température).
Dans cet intervalle de temps, la déformation thermique $\varepsilon^{th}$ est donnée par l'équation suivante :

$$\varepsilon^{th}=8.173\,10^{-7}\,t^2-1.1807\,10^{-4}\,t-2.90763\,10^{-3}$$

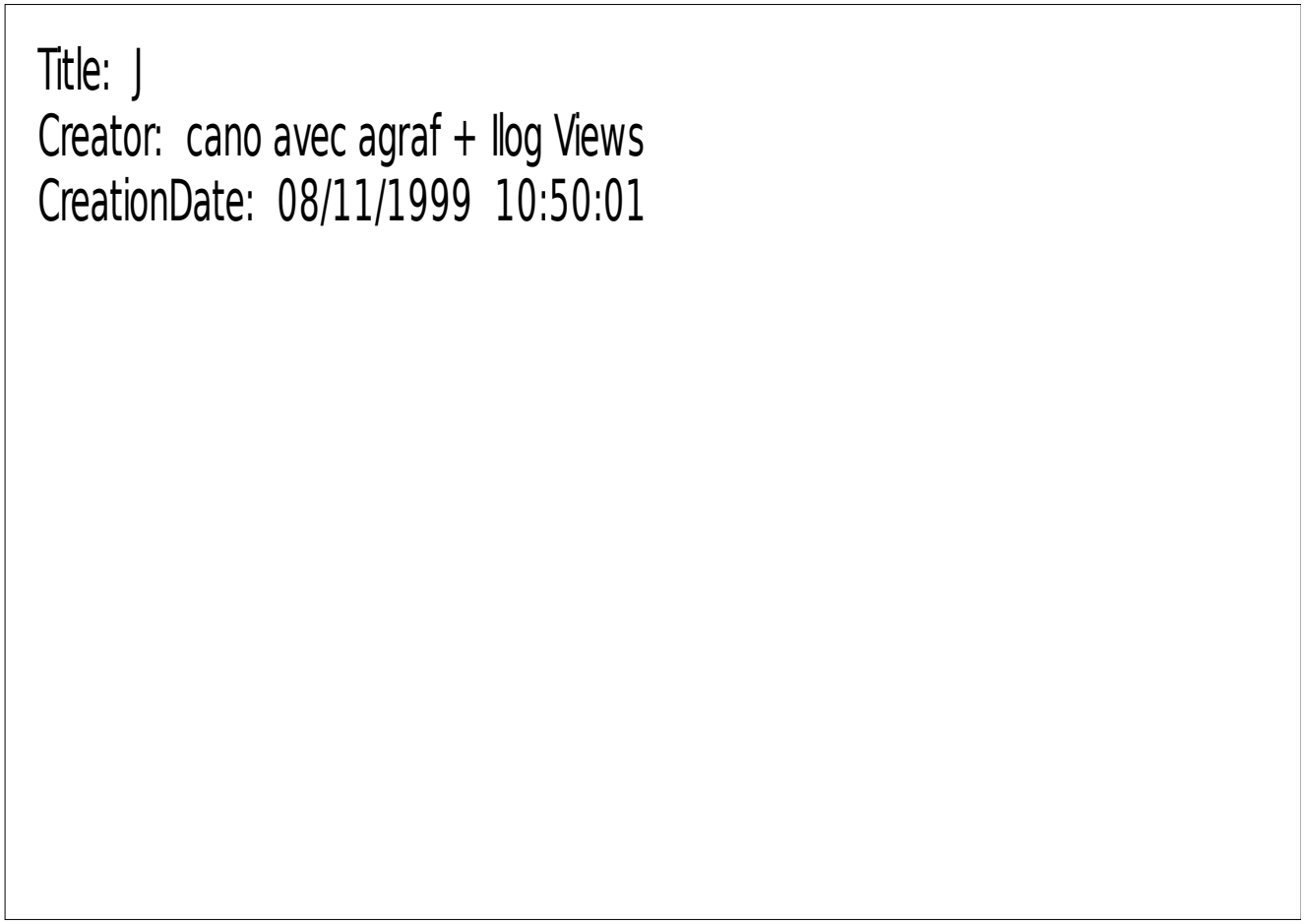
On trace ci–dessous la déformation thermique ainsi que la variation de volume $J$, solution de l'équation du 3ème degré, en fonction du temps.




**Déformation thermique en fonction du temps**



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)




**Variation du volume $J$ en fonction du temps**

On constate que la variable $J$ diminue et augmente de la même manière que la déformation thermique. Dans ce cas, pour connaître l'instant à partir duquel la variable $J$ est supérieure à la valeur obtenue au temps $60\text{s}$, il suffit de connaître l'instant pour lequel la déformation thermique est identique à celle obtenue au temps $t=60\text{s}$. On trouve par la résolution de l'équation ci–dessus $t=84.46\text{s}$.

## 2.3 Incertitude sur la solution

La solution est analytique. Deux erreurs sont commises sur cette solution. La première porte sur le calcul de la proportion de phase bainitique créée. Le calcul métallurgique préalable ne restitue pas exactement l'équation du [§1.2] donnant $Z_{fbm}$ en fonction du temps, c'est pourquoi les résultats de référence présentés ci–dessous sont calculés avec la proportion de phase bainitique calculée par *Code_Aster*.

La seconde erreur est l'hypothèse faite sur la contrainte de Kirchhoff $\tau$ qui n'est pas constante sur l'intervalle de temps compris entre $60$ et $176\text{s}$. Ceci impactera le calcul du déplacement $u_x$ et de la déformation plastique $G^P$.

## 2.4 Résultats de référence

On adoptera comme résultats de référence le déplacement dans la direction du chargement de traction, la contrainte de Cauchy $\sigma$, l'indicateur booléen de plasticité $\chi$ et la déformation plastique cumulée $p$. Les différents instants de calculs sont $t=47,48,60,83,84,85$ et $176\text{s}$. Pour le calcul du déplacement, la longueur initiale du barreau dans la direction de chargement est de $0.2\text{m}$.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans tous les cas, on a

- $3\mathrm{K}=500\,000\,MPa$ (module de compression) $\mu=76923.077\,MPa$

**Au temps** $t=47\mathrm{s}$ , on a $Z_b=0$ , $T=665^\circ C$ , $\sigma=282$ MPa

$\varepsilon^{th}=-5.5225\ 10^{-3}$ $J=0.983855$ $\tau=277.45$ MPa

$\sigma_y=282.5$ MPa $p=0$ $\chi=0$

$G^p=1$ $\overline{F}=1.0012$ $u=-8.4347\ 10^{-4}$m

**Au temps** $t=48\mathrm{s}$ , on a $Z_b=0$ , $T=660^\circ C$ , $\sigma=288$ MPa

$\varepsilon^{th}=-5.64\ 10^{-3}$ $J=0.983508$ $\tau=283.25$ MPa

$\sigma_y=280.$ MPa $p=1.327\ 10^{-3}$ $\chi=1$

$G^p=0.997$ $\overline{F}=1.00256$ $u=-5.9639\ 10^{-4}$m

**Au temps** $t=60\mathrm{s}$ , on a $Z_b=0$ , $T=600^\circ C$ , $\sigma=360$ MPa

$\varepsilon^{th}=-7.05\ 10^{-3}$ $J=0.979337$ $\tau=352.56$ MPa

$\sigma_y=250.$ MPa $p=3.7295\ 10^{-2}$ $\chi=1$

$G^p=0.9281$ $\overline{F}=1.03959$ $u=6.47595\ 10^{-3}$m

**Au temps** $t=83\mathrm{s}$ , on a $Z_b=0.442138$ , $T=485^\circ C$ , $\sigma=360$ MPa

$\varepsilon^{th}=-7.07867\ 10^{-3}$ $J=0.979249$ $\tau=352.53$ MPa

$\sigma_y=249.978$ MPa $p=3.7295\ 10^{-2}$ $\chi=0$

$G^p=0.8841277$ $\overline{F}=1.06514$ $u=1.15441\ 10^{-2}$m

**Au temps** $t=84$ **s**, on a $Z_b=0.461361$ , $T=480^\circ C$ , $\sigma=360$ MPa

$\varepsilon^{th}=-7.06031\ 10^{-3}$ $J=0.979305$ $\tau=352.55$ MPa

$\sigma_y=249.977$ MPa $p=3.7296\ 10^{-2}$ $\chi=1$

$G^p=0.8828104$ $\overline{F}=1.06593$ $u=1.17051\ 10^{-2}$

**Au temps** $t=85\mathrm{s}$ , on a $Z_b=0.480584$ , $T=475^\circ C$ , $\sigma=360$ MPa

$\varepsilon^{th}=-7.04032\ 10^{-3}$ $J=0.979367$ $\tau=352.57$ MPa

$\sigma_y=249.976$ MPa $p=3.73044\ 10^{-2}$ $\chi=1$

$G^p=0.8815276$ $\overline{F}=1.06671$ $u=1.18644\ 10^{-2}$

**Au temps** $t=176\mathrm{s}$ , on a $Z_b=1$ , $T=20^\circ C$ , $\sigma=360$ MPa

$\varepsilon^{th}=-1.068\ 10^{-2}$ $J=0.968132$ $\tau=348.527$ MPa

$\sigma_y=90.$ MPa $p=5.9432\ 10^{-2}$ $\chi=1$

$G^p=0.82814$ $\overline{F}=1.10053$ $u=1.7743\ 10^{-2}$m



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 2.5 Références bibliographiques

On pourra se référer à :

1) V. CANO, E. LORENTZ : Introduction dans le *Code_Aster* d'un modèle de comportement en grandes déformations élastoplastique avec écrouissage isotrope – Note interne EDF DER HI-74/98/006/0

2) A.M. DONORE, F. WAECKEL : Influence des transformations structurales dans les lois de comportement élasto–plastiques Note HI–74/93/024

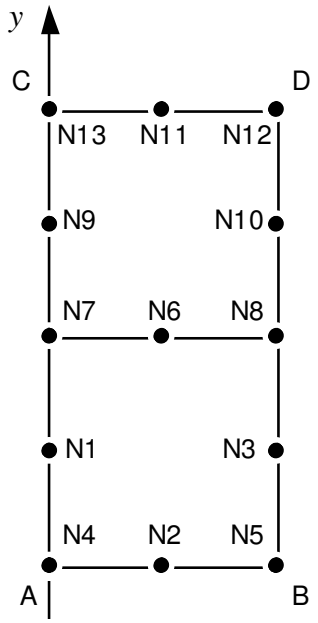
3) F. WAECKEL, V. CANO : Loi de comportement grandes déformations élasto(visco)plastique avec transformations métallurgiques [R4.04.03]



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Modélisation A

## 3.1 Caractéristiques de la modélisation




$A=N4$ , $B=N5$ , $C=N13$ , $D=N12$ .

Charge : le nombre total d'incréments est de 102 (4 incréments de 0 à 46s, 2 incréments de $46$ à $48\text{s}$ , 6 incréments de $48$ à $60\text{s}$ , 26 de $60$ à $112\text{s}$ , 4 de $112$ à $116\text{s}$ et 60 incréments jusqu'à $176\text{s}$ ). La convergence est réalisée si le résidu (RESI_GLOB_RELA) est inférieur ou égal à $10^{-6}$.

## 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 13
Nombre de mailles et types : 2 mailles QUAD8, 6 mailles SEG3

## 3.3 Valeurs testées

| Identification | Référence |
|---|---|
| $t=47$ Déplacement $DY\ (N13)$ | –8.4347 $10^{-4}$ m |
| $t=47$ Variable $p\ \ VARI\ (M1,PG1)$ | 0. |
| $t=47$ $\chi\ \ VARI\ (M1,PG1)$ | 0 |
| $t=47$ Contrainte $SIGYY\ (M1,PG1)$ | 282. $10^{-6}$ Pa |
| $t=48$ Déplacement $DY\ (N13)$ | –5.9639 $10^{-4}$ m |
| $t=48$ Variable $p\ \ VARI\ (M1,PG1)$ | 1.3260 $10^{-3}$ |
| $t=48$ $\chi\ \ VARI\ (M1,PG1)$ | 1 |
| $t=48$ Contrainte $SIGYY\ (M1,PG1)$ | 288. $10^{6}$ Pa |
| $t=60$ Déplacement $DY\ (N13)$ | 6.476 $10^{-3}$ m |
| $t=60$ Variable $p\ \ VARI\ (M1,PG1)$ | 3.7295 $10^{-2}$ |
| $t=60$ $\chi\ \ VARI\ (M1,PG1)$ | 1 |
| $t=60$ Contrainte $SIGYY\ (M1,PG1)$ | 360. $10^{6}$ Pa |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

| | |
|---|---|
| $t=83$ Déplacement $DY\ (N13)$ | 1.1544 $10^{-2}$ m |
| $t=83$ Variable $p\ VARI\ (M1,PG1)$ | 3.7295 $10^{-2}$ |
| $t=83$ $\chi\ VARI\ (M1,PG1)$ | 0 |
| $t=83$ Contrainte $SIGYY$ (M1,PG1) | 360. $10^6$ Pa |
| $t=84$ Déplacement $DY\ (N13)$ | 1.1705 $10^{-2}$ m |
| $t=84$ Variable $p\ VARI\ (M1,PG1)$ | 3.7296 $10^{-2}$ |
| $t=84$ $\chi\ VARI\ (M1,PG1)$ | 1 |
| $t=84$ Contrainte $SIGYY\ (M1,PG1)$ | 360. $10^6$ Pa |
| $t=85$ Déplacement $DY\ (N13)$ | 1.1864 $10^{-2}$ m |
| $t=85$ Variable $p\ VARI\ (M1,PG1)$ | 3.7304 $10^{-2}$ |
| $t=85$ $\chi\ VARI\ (M1,PG1)$ | 1 |
| $t=85$ Contrainte $SIGYY$ (M1,PG1) | 360. $10^6$ Pa |
| $t=176$ Déplacement $DY\ (N13)$ | 1.7743 $10^{-2}$ m |
| $t=176$ Variable $p\ VARI\ (M1,PG1)$ | 5.943 $10^{-2}$ |
| $t=176$ $\chi\ VARI\ (M1,PG1)$ | 1 |
| $t=176$ Contrainte $SIGYY\ (M1,PG1)$ | 360. $10^6$ Pa |

# 4 Synthèse des résultats

Les résultats trouvés avec *Code_Aster* sont très satisfaisants avec des pourcentages d'erreur inférieurs à 0.9%, sachant que la solution analytique de référence fait l'impasse sur certains aspects que prend en compte justement la solution de *Code_Aster*. Ceci peut expliquer les différences observées.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)