HPLV101 - Homogénéisation d'un matériau homogène

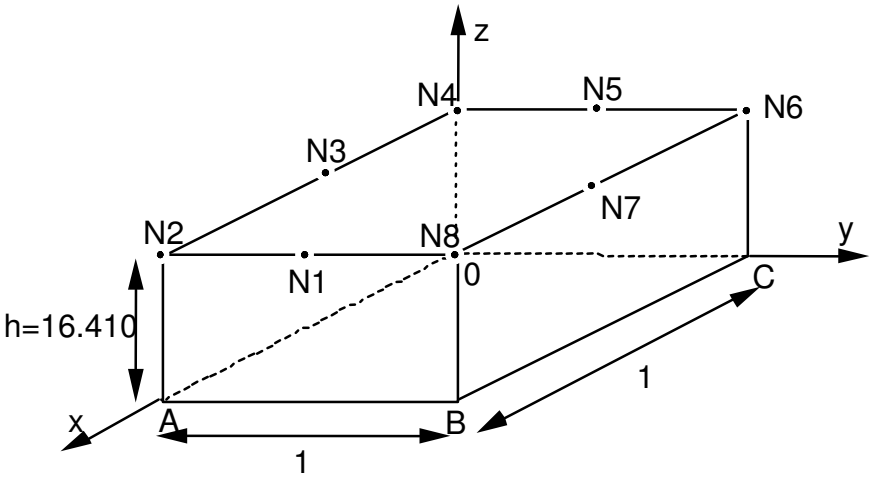
Résumé :

Ce test éprouve, dans une situation triviale où le matériau est homogène, la résolution des problèmes thermiques et mécaniques stationnaires, avec des chargements correspondant à un gradient de température et à une déformation imposée, voisins de ceux correspondant aux problèmes élémentaires de la méthode d'homogénéisation périodique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



	x	y	z
N4	0	0	16.410
N8	1.	1.	16.410
N3	0.5	0	16.410

1.2 Propriétés de matériaux

Modélisation A

$$E = 1.0\,MPa$$
$$\nu = 0.3$$
$$k = 1.0\,W/(m.°C)$$
$$C_p = 0\,J/(°C.m^3)$$

Modélisation B

$$E_L = 1.0\,MPa$$
$$E_T = 0.9\,MPa$$
$$E_N = 0.8\,MPa$$
$$\nu_{LT} = 0.1$$
$$\nu_{LN} = 0.25$$
$$\nu_{TN} = 0.3333333$$
$$k = 1.0\,W/(m.°C)$$
$$C_p = 0\,J/(°C.m^3)$$

1.3 Conditions aux limites et chargements

- Mécanique 3D :

Plan $z=0$:	$dz=0$	pour le chargement membranaire ;
	$dx=0$, $dy=0$	pour le chargement de flexion
Plans $y=0$, $y=1$:	$dy=0$	
Plans $x=0$, $x=1$:	$dx=0$	
Nœud : O	$dz=0$	(pour le seul chargement de flexion)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Chargement :

déformation membranaire: $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

flexion uniforme imposée: $E = \begin{pmatrix} \frac{z}{z_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$z_0 = 1\text{m}$

- Mécanique 2D, contraintes planes :
  Axe : $x=0$ $dx=0$
  Nœud : O $dy=0$
  (ces conditions ne correspondent pas à l'application de la méthode d'homogénéisation).

  Chargement : déformation $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ uniforme imposée

- Thermique 3D et 2D :
  Plan $x=0$ $temp=0$ (cette condition ne correspond pas à l'application de la méthode d'homogénéisation).
  Chargement : gradient $\mathbf{G} = (-1,0,0)$ uniforme imposé.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

- En thermique : on résout le problème thermique stationnaire :

$$\int_\Omega \nabla T.\mathbf{K}.\nabla\theta = \int_\Omega \mathbf{G}.\mathbf{K}.\nabla\theta \quad , \quad \forall\theta \in V \quad , \quad \text{avec } \mathbf{G} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarque :

Les conditions aux limites choisies ici ne sont pas celles nécessaires à la méthode d'homogénéisation : on trouverait en effet $T=0$ partout.

La solution est alors (vérifiant les conditions définies en [§1.3]) : $T(x,y,z) = -x$

L'énergie potentielle est alors à l'équilibre : $W^{th} = -\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla T.\mathbf{K}.\nabla T = -\frac{1}{2}|\Omega|$ ici

- En mécanique : on résout le problème d'élastostatique :

$$\int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}).\mathbf{A}.\varepsilon(\mathbf{v}) = \int_\Omega E.\mathbf{A}.\varepsilon(\mathbf{v}) \quad , \quad \forall \mathbf{v}\, \varepsilon\, W \quad ,$$

pour les cas :

chargement 3D membranaire	chargement 3D de flexion	chargement 2D contraintes planes
$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$E = \begin{pmatrix} \frac{z}{z_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Les solutions sont :

- en 3D, chargement **membranaire** et élasticité isotrope: $\mathbf{u}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0,0,-\frac{\nu z}{(1-\nu)} \end{pmatrix}$

  l'énergie potentielle à l'équilibre est :

$$W^{pot} = -\frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}).\mathbf{A}.\varepsilon(\mathbf{u}) = -\left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)^2.\frac{|\Omega|}{2}(\lambda+2\mu)$$

- en 3D, chargement **membranaire** et élasticité orthotrope: $\mathbf{u}(x,y,z) = (0,0,-\beta z)$ avec $\beta = \frac{C_{13}}{C_{33}}$

  soit $\beta = \frac{\frac{E_N}{E_L}(\nu_{LN} + \nu_{LT}\nu_{TN})}{1 - \frac{E_N}{E_T}\nu_{TN}^2}$ car le repère local n'est pas confondu avec le repère global (les angles nautiques valant tous 90°).

$$W^{pot} = -\frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}).\mathbf{A}.\varepsilon(\mathbf{u}) = -\beta^2.\frac{|\Omega|}{2}C_{33}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

où $C_{33} = \frac{1 - \nu_{NT}\nu_{TN}}{E_T E_N \Delta}$ et $\Delta = \frac{1 - \nu_{LT}\nu_{TL} - \nu_{LN}\nu_{NL} - \nu_{TN}\nu_{NT} - 2\nu_{LT}\nu_{TN}\nu_{NL}}{E_L E_T E_N}$

- en 3D, chargement de **flexion** : $\mathbf{u}(x,y,z) = \left(0,0,\frac{+\nu z^2}{2z_0(1-\nu)}\right)$;

$$W^{pot} = -\left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)^2 . \frac{|\Omega|}{2}(\lambda + 2\mu).\frac{h^2}{3z_0^2}$$

- en 3D, chargement **de flexion** et élasticité orthotrope: $\mathbf{u}(x,y,z) = \left(0,0,-\beta\frac{z}{L}\right)$ avec $\beta = \frac{C_{13}}{C_{33}}$

soit $\beta = \frac{\frac{E_N}{E_L}(\nu_{LN} + \nu_{LT}\nu_{TN})}{1 - \frac{E_N}{E_T}\nu_{TN}^2}$ car le repère local n'est pas confondu avec le repère global (les angles nautiques valant tous 90°).

$$W^{pot} = -\frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}).\mathbf{A}.\varepsilon(\mathbf{u}) = -\beta^2 . \frac{|\Omega|}{2} C_{33}\frac{h^2}{3z_0^2}$$

où $C_{33} = \frac{1 - \nu_{NT}\nu_{TN}}{E_T E_N \Delta}$ et $\Delta = \frac{1 - \nu_{LT}\nu_{TL} - \nu_{LN}\nu_{NL} - \nu_{TN}\nu_{NT} - 2\nu_{LT}\nu_{TN}\nu_{NL}}{E_L E_T E_N}$

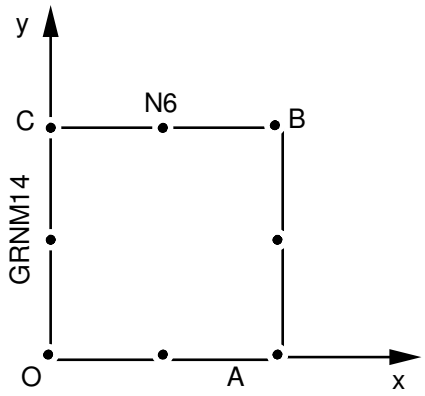
- en 2D, chargement plan : $\mathbf{u}(x,y) = (-x,\ 0)$;

$$W^{pot} = \frac{-|\Omega|}{2(1-\nu^2)}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



Conditions aux limites et chargement :

Thermique :
```
GROUP_NO : GRNM14 : TEMP : 0.0
PRE_GRAD_TEMP : FLUX_X : -1.0
```

Mécanique : (contraintes planes)
```
GROUP_NO : GRNM14 : DX : 0.0
NOEUD :    O        DY : 0.0
PRE_EPSI : EPXX : -1.0
```

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8

Nombre de mailles et types : 1 QUAD8

3.3 Valeurs testées

Point	Grandeur	Référence
	CMP	
A	*TEMP*	–1.0000
A	*DX*	–1.0000
N6	*DX*	–0.5000

Maille	Energie potentielle à l'équilibre	Référence
M1	Thermique	–0.500000000
M1	Mécanique	–0.549450550

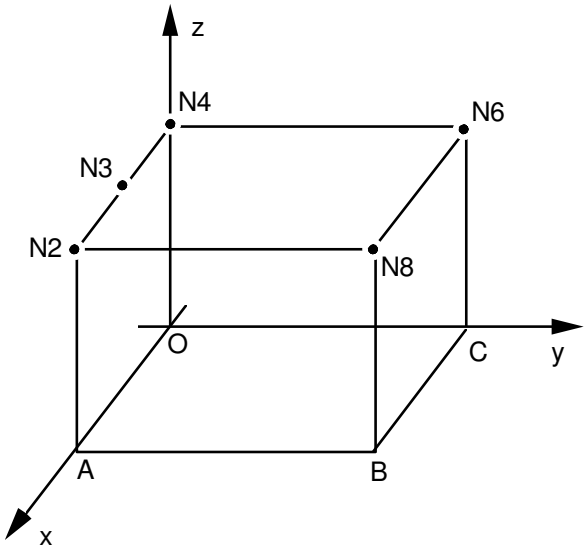
3.4 Remarques

Code_Aster fournit la valeur de l'énergie de déformation, égale à l'opposé de l'énergie potentielle à l'équilibre (cas élastique).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation



Nom des mailles des faces :	*ZEGAL0*	*YEGAL0*	*YEGAL1*	*XEGAL0*	*XEGAL1*
Sommets :	*B C O A*	*O A N2 N4*	*B C N6 N8*	*C O N4 N6*	*A B N8 N2*

Conditions aux limites :

Thermique :
```
ZERO : DEFI_CONSTANTE (VALE : 0.0)  ;
FCT1:DEFI_FONCTION(Nom_para:'Z',VALE: (0.0 0.0 1.0 1.0));
GROUP_NO : XEGAL0 : TEMP : 0.0
```

Mécanique :
```
PRE_GRAD_TEMP : FLUX_X : -1.0
GROUP_NO :  YEGALO : DY = 0.0
            XEGAL1 : DX = 0.0
            YEGAL1 : DY = 0.0
            XEGALO : DZ = 0.0
```

Cas membranaire :
```
GROUP_NO :  ZEGALO : DZ = 0.0
PRE_EPSI : EPXX : -1.0
```

Cas flexion :
```
GROUP_NO :  ZEGALO : DX = ZERO,  DY = ZERO
NOEUD : 0                         DZ = ZERO
PRE_EPSI :                      EPXX : FCT1
```

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20
Nombre de mailles et types : 1 HEXA20

4.3 Valeurs testées

En élasticité isotrope

Cas	Grandeur	Point	Référence
Thermique	*temp*	*N8*	–1.000000
	temp	*N3*	–0.500000
Mécanique	*dz*	*N4*	–7.03285714
membrane	*dz*	*N8*	–7.03285714
Mécanique	*dz*	*N4*	57.70459285

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

flexion	*dz*	*N8*	57.70459285

Maille	Energie potentielle à l'équilibre	Référence
M1	Thermique	–8.20500
M1	Mécanique	
	Membrane	–2.0287088
	Flexion	$-1.8210238\ 10^{2}$

En élasticité orthotrope

Cas	Grandeur	Point	Référence
Thermique	*temp*	*N8*	–1.000000
	temp	*N3*	–0.500000
Mécanique membrane	*dz*	*N4*	– 6.63044894
	dz	*N8*	– 6.63044894
Mécanique flexion	*dz*	*N4*	54.40283358
	dz	*N8*	54.40283358

Maille	Energie potentielle à l'équilibre	Référence
M1	Thermique	–8.20500

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Synthèse des résultats

Les résultats sont exacts à des erreurs d'arrondi près, puisque les solutions cherchées font partie de l'espace des éléments finis choisis pour la modélisation.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)