HPLA100 - Cylindre creux thermoélastique pesant en rotation uniforme

Résumé

Ce test a pour but d'éprouver les seconds membres correspondants aux effets de la pesanteur, d'une dilatation thermique et de l'accélération due à une rotation uniforme. Pour les modélisations C et D (coque $3\mathrm{D}$), un calcul thermo-élastique chaîné et un calcul thermoélastoplastique sans évolution plastique ont été effectués.

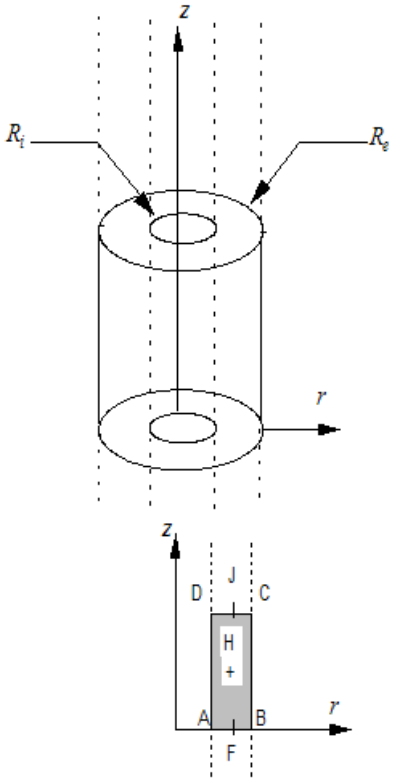
On présente les résultats pour les modélisations :

- $2\mathrm{D}$ axisymétrique : éléments finis isoparamétriques axisymétriques sur des mailles QUAD8,
- coques axisymétriques : éléments finis isoparamétriques axisymétriques sur des mailles SEG3 (maillage linéique de la section méridienne),
- coques $3\mathrm{D}$: éléments finis MEC3QU9H, MEC3TR7H sur des mailles QUAD9 et TRIA7, respectivement,
- plaques DKT : éléments finis plans DKQ, DKT sur des mailles QUAD4 et TRIA3, respectivement. On teste aussi les coques orthotropes de DEFI_COMPOSITE pour deux couches d'un même matériau isotrope et le mot clé ELAS_COQU de DEFI_MATERIAU pour l'affectation de caractéristiques de plaques homogénéisées.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Géométrique du cylindre (m) :

Rayon intérieur	$R_i = 19.5$
Rayon extérieur	$R_e = 20.5$
Point F	$R = 20.0$
Épaisseur	$h = 1.0$
Hauteur	$L = 10.0$

1.2 Propriétés du matériau

Le matériau est homogène isotrope, thermoélastique linéaire, l'état initial est vierge.

Module d'Young	$E = 2.0\,E-5\,N.mm^{-2}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Densité volumique	$\rho = 8.0\,E^{-6}\,kg.mm^{-3}$
Coefficient de dilatation	$\alpha = 1.0\,E^{-5} \circ C^{-1}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.3 Conditions aux limites et chargements

- Déplacement imposé :
  - $\Omega = 1.0\, s^{-1}$ selon l'axe OZ
- Chargement imposé :
  - pesanteur, $g = 10.0\, m.s^{-2}$ selon l'axe OZ
  - force de traction sur la face supérieure : $-160.0\, E^{-4}\, N$ équivalent à une force répartie sur CD de $-8.0\, E^{-4}\, N.mm^{-1}$
- Dilatation thermique : $T(\rho) - T_{ref}(\rho) = \frac{(T_s + T_i)}{2} + \frac{(T_s - T_i).(r - R)}{h}$ avec :
  - cas 1 : $T_s = 0.5\,°C$, $T_i = -0.5\,°C$, $T_{ref} = 0.0\,°C$
  - cas 2 : $T_s = 0.1\,°C$, $T_i = 0.1\,°C$, $T_{ref} = 0.0\,°C$

Ces champs de température sont calculés avec THER_LINEAIRE, à l'aide d'un calcul stationnaire sur le même maillage, mais avec un modèle PLAN afin d'avoir une solution affine dans l'épaisseur.

Les conditions aux limites en déplacement (et rotation) étant différentes selon la modélisation considérée, elles seront décrites ultérieurement (dans les paragraphes relatifs aux modélisations).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La méthode de calcul utilisée pour la solution de référence a été déterminée par F. Voldoire (EDF R&D / AMA) et est présentée dans l'annexe.

Les résultats de référence analytiques sont :

- les déplacements et rotations,
- la contrainte axiale, les efforts généralisés (en théorie de coques),

en peaux interne et externe sur les sections AB et CD.

En 2D axisymétrique, les solutions complètes données en annexe sont telles que $\varepsilon_{rz}=0$ où r et z sont les directions radiale et axiale du cylindre, respectivement. Pour les chargements de rotation uniforme et de dilatation thermique, les conditions aux limites sont choisies de telle sorte que les solutions ne dépendent pas de z (on a notamment $\varepsilon_{zz}=0$).

Pour les coques, avec des conditions aux limites équivalentes, la rotation θ_θ autour de l'axe orthoradial est nulle pour les chargements de rotation uniforme et de dilatation thermique, ce qui n'est pas le cas du chargement de pesanteur où la rotation est constante (le cylindre se met alors en forme conique). En revanche dans tous les cas, la distorsion transverse est nulle ; ainsi les théories de Love-Kirchhoff et celles de Hencky-Mindlin fournissent la même solution de référence.

2.2 Grandeur de référence

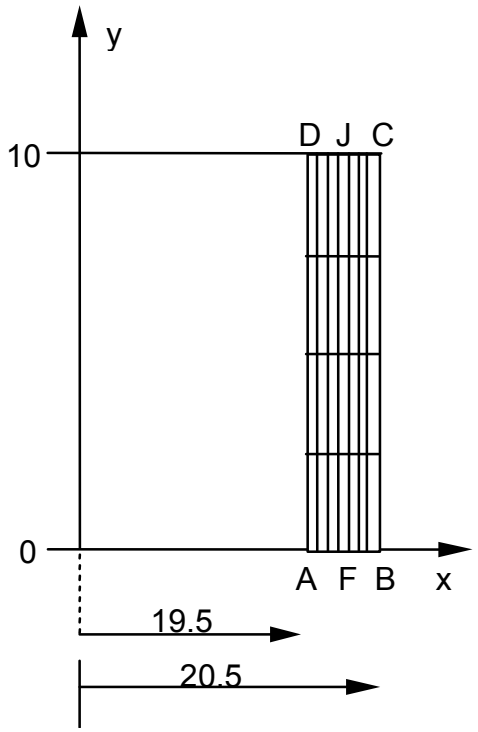
DX : déplacement selon l'axe OX,
DY : déplacement selon l'axe OY,
DZ : déplacement selon l'axe OZ,
NXX : effort normal selon l'axe OX,
NYY : effort normal selon l'axe OY,
MXX : moment autour de l'axe OX,
MYY : moment autour de l'axe OY,
$SIXX$: contrainte selon l'axe OX,
$SIYY$: contrainte selon l'axe OY.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Eléments finis 2D axisymétriques



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus :

$Bord$	$group_no$
BC	BC
DA	DA
AB	BAS
CD	$HAUT$

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est régulier : 4 éléments dans la hauteur, 8 dans l'épaisseur.

Nombre de nœuds : 121

Nombre de mailles et type : 32 QUAD8

3.3 Conditions aux limites en déplacement

3.3.1 Pesanteur

Le déplacement DY est bloqué au point F seul.

3.3.2 Rotation

Le déplacement DY est bloqué sur les côtés $[AB]$ (GROUP_NO = 'BAS') et sur $[CD]$ (GROUP_NO = 'HAUT').

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3.3 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement DY est bloqué sur toute la structure.

3.3.4 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement DY est bloqué sur les côtés $[AB]$ (GROUP_NO = 'BAS') et $[CD]$ (GROUP_NO = 'HAUT').

3.4 Résultats de la modélisation A

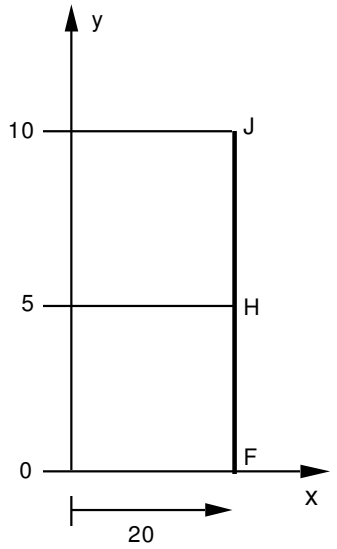
Identification	Nœud(Maille)	Valeur testée	Référence	
Pesanteur	$N78$	$DX\ (mm)$	–2.34000	10^{-8}
	$N120$	$DY\ (mm)$	–1.185	10^{-9}
	$N13$	$DY\ (mm)$	1.2150	10^{-9}
	$N78(M13)$	$SIYY\ (MPa)$	8.0000	10^{-4}
Rotation uniforme - force centrifuge	$N120$	$DX\ (mm)$	–2.94240	10^{-7}
	$N13$	$DX\ (mm)$	2.88010	10^{-7}
	$N120(M1)$	$SIYY\ (MPa)$	9.94880	10^{-4}
	$N13(M32)$	$SIYY\ (MPa)$	9.26310	10^{-4}
Dilatation cas 1	$N120$	$DX\ (mm)$	1.056145	10^{-6}
	$N13$	$DX\ (mm)$	1.110317	10^{-6}
	$N120(M1)$	$SIYY\ (MPa)$	1.4321427	
Dilatation cas 2	$N120$	$DX\ (mm)$	2.53500	10^{-5}
	$N120(M1)$	$SIYY\ (MPa)$	–2.00000	10^{-1}

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Éléments de coque axisymétrique



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus. On choisit la théorie de coques de Love-Kirchhoff (pour cela on prend un coefficient de cisaillement transverse de 10^6). On néglige la correction de métrique dans l'épaisseur. L'épaisseur est de $1\,mm$.

noeud	GROUP_NO
J	$GRNO13$
H	$GRNO14$
F	$GRNO6$

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 21

Nombre de mailles et type : 10 SEG3

4.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

4.3.1 Pesanteur

Le déplacement DY est bloqué au point F seul ($GRNO6$).

4.3.2 Rotation

Le déplacement DY est bloqué au point F ($GRNO6$) au point J ($GRNO13$).
La rotation autour de l'axe Z est nulle en ces deux points.

4.3.3 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement DY ainsi que la rotation autour de l'axe Z sont bloqués sur toute la structure (GROUP_NO = 'GRNO15').

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3.4 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement DY est bloqué au point F (GROUP_NO = 'GRNO06') et au point J (GROUP_NO = 'GRNO13'). La rotation autour de l'axe Z est nulle sur les mêmes groupes de nœuds.

4.4 Résultats de la modélisation B

Identification	Nœud (Maille)	Valeur testée	Référence
Pesanteur	J	$DX(mm)$	–2.40000 10^{-8}
	H	$DY(mm)$	5.00000 10^{-9}
	H	DRZ	2.40000 10^{-9}
	$J(M10)$	$NXX(N)$	8.00000 10^{-4}
	$J(M10)$ Peau interne	$SIXX(MPa)$	8.00000 10^{-4}
Rotation - force centrifuge	F	$DX(mm)$	2.91200 10^{-7}
	$F(M1)$	$NXX(N)$	9.60000 10^{-4}
	$F(M1)$ Peau interne	$SIXX(MPa)$	9.60000 10^{-4}
Dilatation cas 1	$F(M1)$	$MXX(N.mm)$	–2.38095 10^{-1}
	$F(M1)$ Peau interne	$SIXX(Mpa)$	1.428571
Dilatation cas 2	F	$DX(mm)$	26.0000 10^{-6}
	$F(M1)$	$NXX(N)$	–2.00000 10^{-1}
	$F(M1)$ Peau interne	$SIXX(MPa)$	–2.00000 10^{-1}

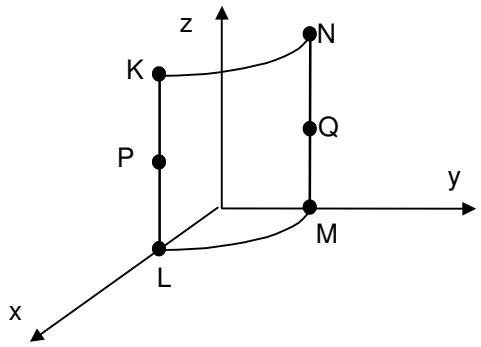
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation d'un quart de cylindre.

Eléments de coque 3D : QUAD9



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus.

point	*nœud*
K	*NO72*
L	*NO1*
M	*NO33*
N	*NO39*
P	*NO186*
Q	*NO190*

Le facteur de correction de cisaillement A_{CIS} vaut $5/6$ (théorie de coques de Reissner).

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds externes : 121

Nombre de mailles et types : 32 QUAD9 + 8 SEG3

5.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

5.3.1 Pesanteur

Le déplacement DZ est bloqué sur le groupe de nœuds LM.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL.
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.3.2 Rotation

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL.
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

5.3.3 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL.
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

5.3.4 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL.
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.4 Résultats de la modélisation C

Identification	Nœud (maille)	Valeur testée	Référence
Pesanteur	K	$DX \ (mm)$	–2.40000 10^{-8}
	N	$DY \ (mm)$	–2.40000 10^{-8}
	P	$DZ \ (mm)$	5.00000 10^{-9}
	Q	$DZ \ (mm)$	5.00000 10^{-9}
	P	DRY	2.40000 10^{-9}
	Q	DRX	2.40000 10^{-9}
	$K(M4)$	$NYY \ (N)$	8.00000 10^{-4}
	$N(M32)$	$NYY \ (N)$	8.00000 10^{-4}
	$K(M4)$ Peau interne	$SIYY \ (MPa)$	8.00000 10^{-4}
	$N(M32)$ Peau interne	$SIYY \ (MPa)$	8.00000 10^{-4}
Rotation – force centrifuge	L	$DX \ (mm)$	2.91200 10^{-7}
	M	$DY \ (mm)$	2.91200 10^{-7}
	$L(M1)$	$NYY \ (N)$	9.60000 10^{-4}
	$M(M29)$	$NYY \ (N)$	9.60000 10^{-4}
	$L(M1)$ Peau interne	$SIYY \ (MPa)$	9.84600 10^{-4}
	$M(M29)$ Peau interne	$SIYY \ (MPa)$	9.84600 10^{-4}
Dilatation cas 1	$L(M1)$	$MYY \ (N.mm)$	–2.38095 10^{-1}
	$M(M29)$	$MYY \ (N.mm)$	–2.38095 10^{-1}
	$L(M1)$ Peau interne	$SIYY \ (MPa)$	1.428571
	$M(M29)$ Peau interne	$SIYY \ (MPa)$	1.428571
Dilatation cas 2	L	$DX \ (mm)$	25.9946 10^{-6}
	M	$DY \ (mm)$	25.9946 10^{-6}
	$L(M1)$	$NYY \ (N)$	–2.00000 10^{-1}
	$M(M29)$	$NYY \ (N)$	–2.00000 10^{-1}
	$L(M1)$ Peau interne	$SIYY \ (MPa)$	–1.97800 10^{-1}
	$M(M29)$ Peau interne	$SIYY \ (MPa)$	–2.97800 10^{-1}

5.5 Remarques

Résultats satisfaisants et identiques pour les calculs avec MECA_STATIQUE et STAT_NON_LINE.

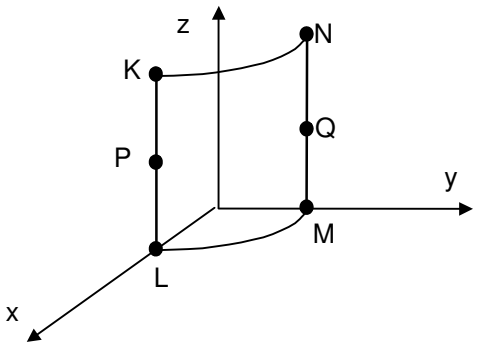
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation d'un quart de cylindre.

Eléments de coque 3D : TRIA7



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus.

point	*nœud*
K	*NO72*
L	*NO1*
M	*NO33*
N	*NO39*
P	*NO186*
Q	*NO190*

Le facteur de correction de cisaillement A_{CIS} vaut $5/6$ (théorie de coques Reissner).

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds externes : 153

Nombre de mailles et types : 64 TRIA7 + 8 SEG3

6.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

6.3.1 Pesanteur

Le déplacement DZ est bloqué sur le groupe de nœuds LM.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL.
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.

6.3.2 Rotation

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

6.3.3 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL.
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

6.3.4 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL.
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6.4 Valeurs testées

Identification	Nœud (maille)	Valeur testée	Référence
Pesanteur	K	$DX(mm)$	–2.40000 10^{-8}
	N	$DY(mm)$	–2.40000 10^{-8}
	P	$DZ(mm)$	5.00000 10^{-9}
	Q	$DZ(mm)$	5.00000 10^{-9}
	P	$-DRY$	2.40000 10^{-9}
	Q	DRX	2.40000 10^{-9}
	$K(M60)$	$NYY(N)$	8.00000 10^{-4}
	$N(M56)$	$NYY(N)$	8.00000 10^{-4}
	$K(M60)$ Peau interne	$SIYY(MPa)$	8.00000 10^{-4}
	$N(M56)$ Peau interne	$SIYY(MPa)$	8.00000 10^{-4}
Rotation – force centrifuge	L	$DX(mm)$	2.91200 10^{-7}
	M	$DY(mm)$	2.91200 10^{-7}
	$L(M25)$	$NYY(N)$	9.60000 10^{-4}
	$M(M53)$	$NYY(N)$	9.60000 10^{-4}
	$L(M25)$ Peau interne	$SIYY(MPa)$	9.84600 10^{-4}
	$M(M53)$ Peau interne	$SIYY(MPa)$	9.84600 10^{-4}
Dilatation cas 1	$L(M25)$	$MYY(N.mm)$	–2.38095 10^{-1}
	$M(M53)$	$MYY(N.mm)$	–2.38095 10^{-1}
	$L(M25)$ Peau interne	$SIYY(MPa)$	1.428571
	$M(M53)$ Peau interne	$SIYY(MPa)$	1.428571
Dilatation cas 2	L	$DX(mm)$	26.0000 10^{-6}
	M	$DY(mm)$	26.0000 10^{-6}
	$L(M25)$	$NYY(N)$	–2.00000 10^{-1}
	$M(M53)$	$NYY(N)$	–2.00000 10^{-1}
	$L(M25)$ Peau interne	$SIYY(MPa)$	–1.97800 10^{-1}
	$M(M53)$ Peau interne	$SIYY(MPa)$	–1.97800 10^{-1}

6.5 Remarques

Résultats satisfaisants et identiques pour les calculs avec MECA_STATIQUE et STAT_NON_LINE.

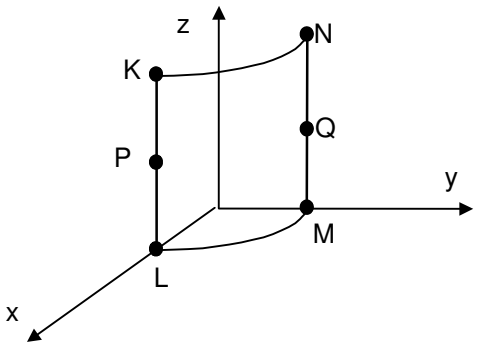
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation d'un quart de cylindre.

Éléments de plaque DKQ : QUAD4



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus.

point	noeud
K	$NO160$
L	$NO203$
M	$NO11$
N	$NO1$
P	$NO226$
Q	$NO6$

7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 231
Nombre de mailles et types : 200 QUAD4 + 80 SEG2

7.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

7.3.1 Pesanteur

Le déplacement DZ est bloqué sur le groupe de nœuds LM.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL.
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.

7.3.2 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

7.3.3 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL.
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

7.4 Résultats de la modélisation E

Identification	Nœud (maille)	Valeur testée	Référence
Pesanteur	K	$DX(mm)$	–2.40000 10^{-8}
	N	$DY(mm)$	–2.40000 10^{-8}
	P	$DZ(mm)$	5.00000 10^{-9}
	Q	$DZ(mm)$	5.00000 10^{-9}
	P	$-DRY$	2.40000 10^{-9}
	Q	DRX	2.40000 10^{-9}
	$K(181)$	$NYY(N)$	8.00000 10^{-4}
	$N(M200)$	$NYY(N)$	8.00000 10^{-4}
	$K(M181)$ Peau interne	$SIYY(MPa)$	8.00000 10^{-4}
	$N(M200)$ Peau interne	$SIYY(MPa)$	8.00000 10^{-4}
Dilatation cas 1	$L(M1)$	$MYY(N.mm)$	–2.38095 10^{-1}
	$M(M20)$	$MYY(N.mm)$	–2.38095 10^{-1}
	$L(M1)$ Peau interne	$SIYY(MPa)$	1.428571
	$M(M20)$ Peau interne	$SIYY(MPa)$	1.428571
Dilatation cas 2	L	$DX(mm)$	26.0000 10^{-6}
	M	$DY(mm)$	26.0000 10^{-6}
	$L(M1)$	$NYY(N)$	–2.00000 10^{-1}
	$M(M20)$	$NYY(N)$	–2.00000 10^{-1}
	$L(M1)$ Peau interne	$SIYY(MPa)$	–2.00000 10^{-1}
	$M(M20)$ Peau interne	$SIYY(MPa)$	–2.00000 10^{-1}

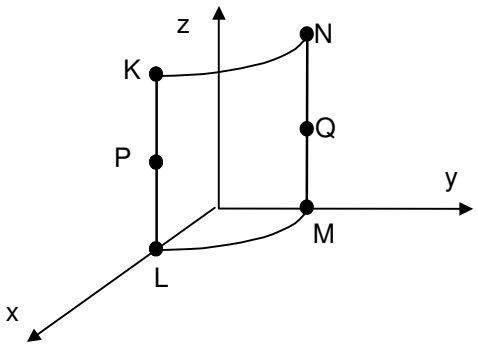
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Modélisation F

8.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation d'un quart de cylindre.

Eléments de plaque DKT : TRIA3



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus.

point	noeud
K	$NO1$
L	$NO11$
M	$NO161$
N	$NO227$
P	$NO6$
Q	$NO215$

8.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 231

Nombre de mailles et type : 400 TRIA3 + 80 SEG2

8.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

8.3.1 Pesanteur

Le déplacement DZ est bloqué sur le groupe de nœuds LM.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL.
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.

8.3.2 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL.
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

8.3.3 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL.
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

8.4 Résultats de la modélisation F

Identification	Noeud (maille)	Valeur testée	Référence
Pesanteur	K	$DX(mm)$	–2.40000 10^{-8}
	N	$DY(mm)$	–2.40000 10^{-8}
	P	$DZ(mm)$	5.00000 10^{-9}
	Q	$DZ(mm)$	5.00000 10^{-9}
	$-DRX$	$-DRY$	2.40000 10^{-9}
	DRX	DRX	2.40000 10^{-9}
	$K(M362)$	$NYY(N)$	8.00000 10^{-4}
	$N(M400)$	$NYY(N)$	8.00000 10^{-4}
	$L(M362)$ Peau interne	$SIYY(MPa)$	8.00000 10^{-4}
	$N(M400)$ Peau interne	$SIYY(MPa)$	8.00000 10^{-4}
Dilatation cas 1	$L(M1)$	$MYY(N.mm)$	–2.38095 10^{-1}
	$M(M39)$	$MYY(N.mm)$	–2.38095 10^{-1}
	$L(M1)$ Peau interne	$SIXX(MPa)$	1.428571
	$M(M39)$ Peau interne	$SIXX(MPa)$	1.428571
Dilatation cas 2	L	$DX(mm)$	26.0000 10^{-6}
	M	$DY(mm)$	26.0000 10^{-6}
	$L(M1)$	$NYY(N)$	–2.00000 10^{-1}
	$M(M39)$	$NYY(N)$	–2.00000 10^{-1}
	$L(M1)$ Peau interne	$SIYY(MPa)$	–2.00000 10^{-1}
	$M(M39)$ Peau interne	$SIYY(MPa)$	–2.00000 10^{-1}

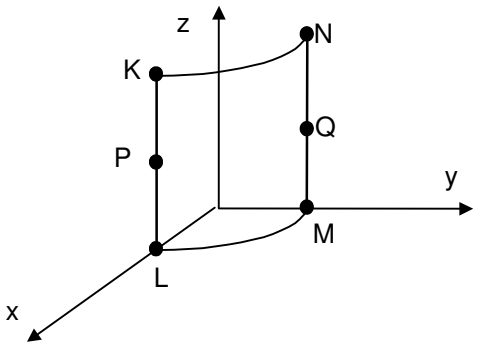
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Modélisation G

9.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation d'un quart de cylindre.

Eléments de plaque DKT : TRIA3. La modélisation utilise une plaque bi-couche dont les caractéristiques d'orthotropie sont celles du matériau défini au $\S 1.2$.



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus.

point	noeud
K	$NO1$
L	$NO11$
M	$NO161$
N	$NO227$
P	$NO6$
Q	$NO215$

9.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 231

Nombre de mailles et types : 400 TRIA3 + 80 SEG2

9.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

9.3.1 Pesanteur

Le déplacement DZ est bloqué sur le groupe de nœuds LM .
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL .
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN .

9.3.2 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

9.3.3 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL.
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

9.4 Résultats de la modélisation G

Identification	Nœud (maille)	Valeur testée	Référence
Pesanteur	K	DX	–2.40000 10^{-8}
	N	DY	–2.40000 10^{-8}
	P	DZ	5.0 10^{-9}
	Q	DZ	5.0 10^{-9}
	P	$-DRY$	2.40000 10^{-9}
	Q	DRX	2.40000 10^{-9}
	$K(M362)$	NYY	8.00000 10^{-4}
	$N(M400)$	NYY	8.00000 10^{-4}
	$K(M362)$	$SIYY$	8.00000 10^{-4}
	$N(M400)$	$SIYY$	8.00000 10^{-4}
Dilatation cas 1	$L(M1)$	MYY	–2.38095 10^{-1}
	$M(M39)$	MYY	–2.38095 10^{-1}
	$L(M1)$, peau interne	$SIXX$	1.428571
	$L(M1)$, peau externe	$SIXX$	–1.428571
	$M(M39)$, peau interne	$SIXX$	1.428571
	$M(M39)$, peau externe	$SIXX$	–1.428571
Dilatation cas 2	L	DX	26.0 10^{-6}
	M	DY	26.0 10^{-6}
	$L(M1)$	NYY	–2.00000 10^{-1}
	$M(M39)$	NYY	–2.00000 10^{-1}
	$L(M1)$	$SIYY$	–2.00000 10^{-1}
	$M(M39)$	$SIYY$	–2.00000 10^{-1}

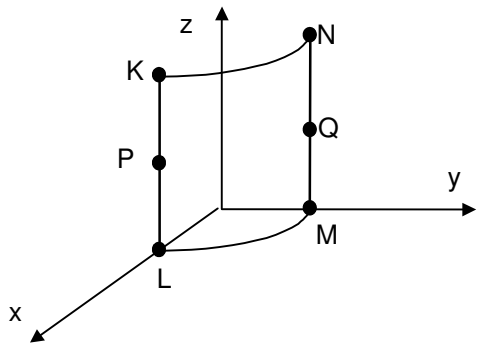
10 Modélisation H

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

10.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation d'un quart de cylindre.

Eléments de plaque DKQ : QUAD4. La modélisation utilise une plaque bi-couche dont les caractéristiques d'orthotropie sont celles du matériau défini au $\S 1.2$.



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus.

point	noeud
K	$NO160$
L	$NO203$
M	$NO11$
N	$NO1$
P	$NO226$
Q	$NO6$

10.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds externes : 231

Nombre de mailles et types : 200 QUAD4 + 80 SEG2

10.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

10.3.1 Pesanteur

Le déplacement DZ est bloqué sur le groupe de nœuds LM .
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL .
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN .

10.3.2 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL .
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

10.3.3 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL.
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

10.4 Résultats de la modélisation H

Identification	Noeud (maille)	Valeur testée	Référence
Pesanteur	K	$DX(mm)$	–2.40000 10^{-8}
	N	$DY(mm)$	–2.40000 10^{-8}
	P	$DZ(mm)$	5.00000 10^{-9}
	Q	$DZ(mm)$	5.00000 10^{-9}
	P	$-DRX$	2.40000 10^{-9}
	Q	DRX	2.40000 10^{-9}
	$K(M181)$	$NYY(N)$	8.00000 10^{-4}
	$N(M200)$	$NYY(N)$	8.00000 10^{-4}
	$K(M181)$	$SIYY(Pa)$	8.00000 10^{-4}
	$N(M200)$	$SIYY(Pa)$	8.00000 10^{-4}
Dilatation cas 1	$L(M1)$	$MYY(N.mm)$	–2.38095 10^{-1}
	$M(M20)$	$MYY(N.mm)$	–2.38095 10^{-1}
	$L(M1)$, peau interne	$SIYY(Pa)$	1.428571
	$L(M1)$, peau externe	$SIYY(Pa)$	–1.428571
	$M(M20)$, peau interne	$SIYY(Pa)$	1.428571
	$M(M20)$, peau externe	$SIYY(Pa)$	–1.428571
Dilatation cas 2	L	$DX(mm)$	26.0000 10^{-6}
	M	$DY(mm)$	26.0000 10^{-6}
	$L(M1)$	$NYY(N)$	–2.00000 10^{-1}
	$M(M20)$	$NYY(N)$	–2.00000 10^{-1}
	$L(M1)$	$SIYY(Pa)$	–2.00000 10^{-1}
	$M(M20)$	$SIYY(Pa)$	–2.00000 10^{-1}

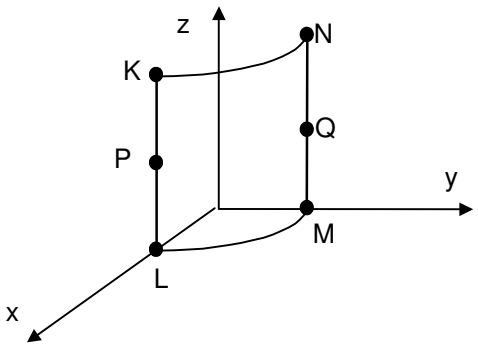
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

11 Modélisation I

11.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation d'un quart de cylindre.

Eléments de plaque DKQ : QUAD4. Affectation de caractéristiques de plaques homogénéisées correspondant au matériau du $\S 1.2$.



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus.

point	noeud
K	$NO160$
L	$NO203$
M	$NO11$
N	$NO1$
P	$NO226$
Q	$NO6$

11.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds externes : 231

Nombre de mailles et types : 200 QUAD4 + 80 SEG2

11.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

11.3.1 Pesanteur

Le déplacement DZ est bloqué sur le groupe de nœuds LM .
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL .
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN .

11.3.2 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

11.3.3 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL.
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

11.4 Résultats de la modélisation I

Identification	Noeud (maille)	Valeur testée	Référence
Pesanteur	K	$DX(mm)$	–2.40000 10^{-8}
	N	$DY(mm)$	–2.40000 10^{-8}
	P	$DZ(mm)$	5.00000 10^{-9}
	Q	$DZ(mm)$	5.00000 10^{-9}
	P	$-DRX$	2.40000 10^{-9}
	Q	DRX	2.40000 10^{-9}
	$K(M181)$	$NYY(N)$	8.00000 10^{-4}
	$N(M200)$	$NYY(N)$	8.00000 10^{-4}
Dilatation cas 1	$L(M1)$	$MYY(N.mm)$	–2.38095 10^{-1}
	$M(M20)$	$MYY(N.mm)$	–2.38095 10^{-1}
	$L(M1)$, peau interne	$SIYY(Pa)$	1.428571
	$M(M20)$, peau interne	$SIYY(Pa)$	1.428571
Dilatation cas 2	L	$DX(mm)$	26.0000 10^{-6}
	M	$DY(mm)$	26.0000 10^{-6}
	$L(M1)$	$NYY(N)$	–2.00000 10^{-1}
	$M(M20)$	$NYY(N)$	–2.00000 10^{-1}
	$L(M1)$	$SIYY(Pa)$	–2.00000 10^{-1}
	$M(M20)$	$SIYY(Pa)$	–2.00000 10^{-1}

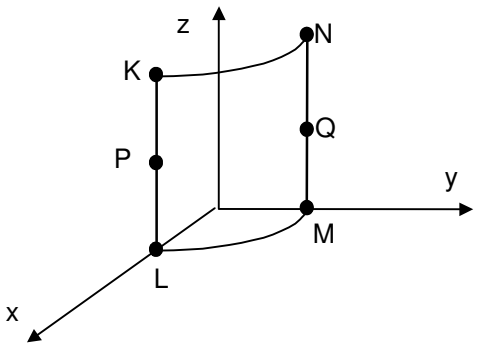
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

12 Modélisation J

12.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation d'un quart de cylindre.

Eléments de plaque DKT : TRIA3. Affectation de caractéristiques de plaques homogénéisées correspondant au matériau du $\S 1.2$.



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus.

point	noeud
K	$NO1$
L	$NO11$
M	$NO161$
N	$NO227$
P	$NO6$
Q	$NO215$

12.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 231

Nombre de mailles et types : 400 TRIA3 + 80 SEG2

12.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

12.3.1 Pesanteur

Le déplacement DZ est bloqué sur le groupe de nœuds LM .
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL .
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN .

12.3.2 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

12.3.3 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL.
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

12.4 Résultats de la modélisation J

Identification	Nœud (maille)	Valeur testée	Référence
Pesanteur	K	$DX(mm)$	–2.40000 10^{-8}
	N	$DY(mm)$	–2.40000 10^{-8}
	P	$DZ(mm)$	5.0 10^{-9}
	Q	$DZ(mm)$	5.0 10^{-9}
	P	$-DRY$	2.40000 10^{-9}
	Q	DRX	2.40000 10^{-9}
	$K(M362)$	$NYY(N)$	8.00000 10^{-4}
	$N(M400)$	$NYY(N)$	8.00000 10^{-4}
Dilatation cas 1	$L(M1)$	$MYY(N.mm)$	–2.38095 10^{-1}
	$M(M39)$	$MYY(N.mm)$	–2.38095 10^{-1}
	$L(M1)$, peau interne	$SIYY(Pa)$	1.428571
	$M(M39)$, peau interne	$SIYY(Pa)$	1.428571
Dilatation cas 2	L	$DX(mm)$	26.0 10^{-6}
	M	$DY(mm)$	26.0 10^{-6}
	$L(M1)$	$NYY(N)$	–2.00000 10^{-1}
	$M(M39)$	$NYY(N)$	–2.00000 10^{-1}
	$L(M1)$	$SIYY(Pa)$	–2.00000 10^{-1}
	$M(M39)$	$SIYY(Pa)$	–2.00000 10^{-1}

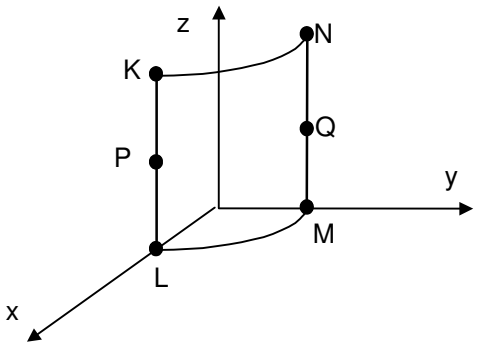
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

13 Modélisation K

13.1 Caractéristiques de la modélisation

Identique à la modélisation E avec des éléments DKQG(modélisation DKTG) .
Cette modélisation a pour but de tester la prise en compte de la température pour les éléments DKQG.

Éléments de plaque DKQG : QUAD4



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus.

point	noeud
K	$NO160$
L	$NO203$
M	$NO11$
N	$NO1$
P	$NO226$
Q	$NO6$

13.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 231
Nombre de mailles et types : 200 QUAD4 + 80 SEG2

13.3 Conditions aux limites en déplacement et rotation

13.3.1 Pesanteur

Le déplacement DZ est bloqué sur le groupe de nœuds LM .
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL .
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN .

13.3.2 Cas de dilatation thermique n°1

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

13.3.3 Cas de dilatation thermique n°2

Le déplacement DZ ainsi que les rotations autour des axes X et Y sont bloqués sur les groupes de nœuds $KNSANSKN$ et $LMSANSLM$.
Le déplacement DY ainsi que les rotations autour des axes X et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds KL.
Le déplacement DX ainsi que les rotations autour des axes Y et Z sont bloqués sur le groupe de nœuds MN.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe Y sont bloqués sur le groupe de nœuds $KETL$.
Le déplacement DZ ainsi que la rotation autour de l'axe X sont bloqués sur le groupe de nœuds $METN$.

13.4 Résultats de la modélisation K

Identification	Nœud (maille)	Valeur testée	Référence
Pesanteur	K	$DX(mm)$	–2.40000 10^{-8}
	N	$DY(mm)$	–2.40000 10^{-8}
	P	$DZ(mm)$	5.00000 10^{-9}
	Q	$DZ(mm)$	5.00000 10^{-9}
	P	$-DRY$	2.40000 10^{-9}
	Q	DRX	2.40000 10^{-9}
	$K(181)$	$NYY(N)$	8.00000 10^{-4}
	$N(M200)$	$NYY(N)$	8.00000 10^{-4}
Dilatation cas 1	$L(M1)$	$MYY(N.mm)$	–2.38095 10^{-1}
	$M(M20)$	$MYY(N.mm)$	–2.38095 10^{-1}
Dilatation cas 2	L	$DX(mm)$	26.0000 10^{-6}
	M	$DY(mm)$	26.0000 10^{-6}
	$L(M1)$	$NYY(N)$	–2.00000 10^{-1}
	$M(M20)$	$NYY(N)$	–2.00000 10^{-1}

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

14 Synthèse des résultats

Les très bons résultats obtenus pour les modélisations A et B s'expliquent par le fait que les solutions de référence appartiennent à l'espace engendré par les éléments finis choisis. Seules subsistent les erreurs d'arrondi numérique.

Des résultats satisfaisants ont été obtenus pour les modélisations de plaques et de coques dans l'espace C, D, E, F, G, H, I, J et K. Pour ces dernières, un calcul thermo-élastique chaîné a été effectué. Les résultats avec la modélisation DKT (E, F, G, H, I, J) montrent que les éléments quadrangle ont un meilleur comportement que les éléments triangle. Il est nécessaire d'avoir une discrétisation suffisamment fine avec ces éléments plans de façon à pouvoir modéliser correctement la géométrie circulaire de la coque cylindrique. En effet, discrétiser la géométrie du cylindre par facettes planes ou paraboliques n'est pas conforme et induit une flexion parasite qui diminue avec la finesse de maillage. Ainsi une multiplication du nombre d'éléments par deux sur la hauteur de la structure fait chuter l'erreur maximale relative de 5,48% (cas présenté ici) à 2,8%. Les résultats avec la modélisation COQUE_3D (C et D) sont très bons sauf pour la pesanteur avec l'élément triangle.
Les calculs avec la modélisation DKTG(K) donnent les mêmes résultats qu'avec la modélisation DKT.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

15 Annexe

15.1 Chargement de rotation uniforme autour de OZ

15.1.1 Modèle 2D axisymétrique

La densité de force centrifuge est : $\rho \Omega^2 r e_r$.

On envisage les conditions aux limites suivantes :

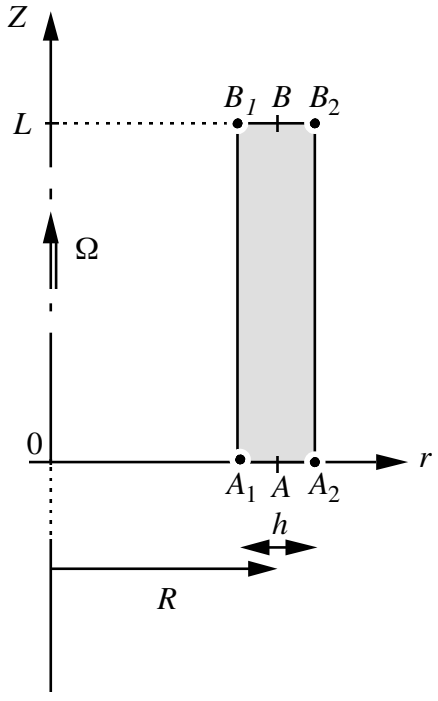
$u_z(r,z)=0$ en $z=0$ et $z=L$

On postule le déplacement sous la forme :

$$u_r=u(r)$$
$$u_z=u_\theta=0$$

Ainsi :

$$\varepsilon_{rr}=u' ; \qquad \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u}{r} ; \qquad \varepsilon_{zz}=\varepsilon_{rz}=\varepsilon_{\theta z}=\varepsilon_{r\theta}=0$$



Géométrie du cylindre creux :

$$R=20\,mm$$
$$h=1\,mm$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les contraintes élastiques s'expriment :

$$\sigma_{rr}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)u'+\nu\frac{u}{r}]$$
$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\frac{u}{r}+\nu u']$$
$$\sigma_{zz}=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\frac{u}{r}+u']$$

L'équation d'équilibre radial s'écrit :

$$(r\sigma_{rr})_{,r}-\sigma_{\theta\theta}=-\rho\Omega^2 r^2$$

Ainsi :

$$(\frac{(ru)'}{r})'=\frac{-(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}\rho\Omega^2 r \qquad éq\,1.1-1$$

Note :

$$\frac{u}{r}+u'=\frac{(ru)'}{r}$$

D'où la solution générale :

$$u(r)=\frac{-(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}\rho\Omega^2\frac{r^3}{8}+Ar+\frac{B}{r} \qquad éq\,1.1-2$$

Les contraintes sont alors :

$$\sigma_{rr}(r)=\frac{-3-2\nu}{1-\nu}\rho\Omega^2\frac{r^2}{8}+\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(A-(1-2\nu)\frac{B}{r^2})$$
$$\sigma_{\theta\theta}(r)=\frac{-1+2\nu}{1-\nu}\rho\Omega^2\frac{r^2}{8}+\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(A-(1-2\nu)\frac{B}{r^2}) \qquad éq\,1.1-3$$
$$\sigma_{zz}(r)=\frac{-\nu}{1-\nu}\rho\Omega^2\frac{r^2}{2}+\frac{2\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}A$$

Les conditions aux limites en contraintes sont :

$$\sigma_{rr}=0 \text{ en } r=R\pm\frac{h}{2}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On note :

$$x=\frac{h}{2\mathrm{R}}$$

On obtient grâce à $[éq\,1.1-3]$:

$$B=\frac{(3-2\nu)(1+\nu)}{8(1-\nu)E}\rho\,\Omega^2 R^4(1-x^2)^2$$

puis :

$$A=\frac{(3-2\nu)(1+\nu)(1-2\nu)}{4(1-\nu)E}\rho\,\Omega^2 R^2(1-x^2)$$

Application numérique :

$$\rho=8.10-6\ kg/mm^3$$
$$\Omega=1\ s^{-1}$$
$$E=2.105\,N/mm^2$$
$$\nu=0.3$$

D'où : $A=7.13588.10^{-9}\,mm^2$
$B=3.561258.10^{-6}\ mm^2$

Note :

$$\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}\rho\frac{\Omega^2}{8}=3.714286\ E-12\ mm^2$$
$$\frac{\nu}{1-\nu}\rho\frac{\Omega^2}{2}=1.714286\ E-6\ MPa.mm^2$$

Ainsi :

- en peau interne : $\begin{cases}u_r=2.9424\,E^{-7}\,mm\\ \sigma_{zz}=0.99488\,E^{-3}\,Mpa\end{cases}$
- en peau externe : $\begin{cases}u_r=2.8801\,E^{-7}\,mm\\ \sigma_{zz}=0.92631\,E^{-3}\,Mpa\end{cases}$

15.1.2 Modèle coque axisymétrique

La force centrifuge équivaut à une **pression répartie** :

$$p=\rho\,\Omega^2 hR(1+\frac{h^2}{12\mathrm{R}^2})$$

La solution est membranaire, l'équilibre normal s'écrit :

$$N_{\theta\theta}=pR$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La déformation membranaire est : $E_{\theta\theta}=\frac{w}{R}$, alors que $E_{\theta\theta}=0=K_{\theta\theta}=K_{zz}$.

En élasticité :

$$N_{\theta\theta}=\frac{Eh}{1-\nu^2}E_{\theta\theta}\ ;\ N_{zz}=\nu\,N_{\theta\theta}\ ;\ M_{\alpha\beta}=0$$

D'où la solution (flèche et effort normal circonférentiel) :

$$w=\frac{(1-\nu^2)\rho\,\Omega^2}{E}R^3(1+\frac{h^2}{12\mathrm{R}^2})\ ;\ N_{\theta\theta}=\rho\,\Omega^2R^2h(1+\frac{h^2}{12\mathrm{R}^2})$$

La contrainte axiale vaut :

$$\sigma_{zz}=\nu\,\rho\,\Omega^2R^2(1+\frac{h^2}{12\mathrm{R}^2})$$ (constante dans l'épaisseur)

Si on ne tient pas compte de la correction de métrique, il faut ôter le terme $(1+\frac{h^2}{12\mathrm{R}^2})$ dans les expressions précédentes.

Application numérique (sans correction de métrique) **:**

$p=1{,}600000.10-4\ MPa$
$w=2{,}912000.10-7\ mm$
$N_{zz}=0{,}96000.10-3\ N/mm$
$\sigma_{zz}=0{,}96000.10-3\ MPa$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

15.2 Chargement de pesanteur

15.2.1 Modèle 2D axisymétrique

La densité de force est : $-\rho\, g\, e_z$ (pesanteur verticale).

On envisage les conditions aux limites suivantes :

$U_z(r,z)=0$ en $r=R$ et $z=0$ (cercle d'appui)

avec la traction uniforme : $\sigma_{zz}(r,z)=\rho\, g\, L$ en $z=L$, équilibrant le poids.

On postule la solution élastique du type :

$$\sigma=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{zz}\end{pmatrix}$$

de sorte que :

$$\varepsilon_{rr}=\varepsilon_{\theta\theta}=-\nu\,\varepsilon_{zz}=-\nu\,u_{z,z}=-\nu\,\frac{\sigma_{zz}}{E}\ ;\ \varepsilon_{rz}=0=\varepsilon_{r\theta}=\varepsilon_{\theta z}$$

On observe ainsi :

$$u_{r,r}=\frac{u_r}{r}\ \Leftrightarrow\ u_r(r,z)=-\nu\,A'(z)\,r$$

Puis :

$$\begin{aligned}-\nu\,A'(z)=\varepsilon_{rr}=-\nu\,\varepsilon_{zz}\ &\Leftrightarrow\ u_{z,z}(r,z)=A'(z)\\ &\Leftrightarrow\ u_r(r,z)=A(z)+B\end{aligned}$$

De $\varepsilon_{rz}=0$, on tire :

$$B'(r)-\nu\,rA''(z)=0$$

soit :

$$A''(z)=cste=\alpha\quad ;\quad B'(r)=\alpha\,\nu\,r$$

Des conditions aux limites en effort, on obtient :

$$A(z)=\frac{\rho\,g\,z^2}{2E}+\beta\quad ;\quad B(r)=\nu\,\frac{\rho\,g\,r^2}{2E}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Enfin, β vérifie : $\beta = -\nu\,\rho\,g\,\frac{R^2}{2E}$

Ainsi :

$$u_r(r,z) = \frac{-\nu\,\rho\,g\,z\,r}{E} \quad ; \quad u_z(r,z) = \frac{\rho\,g}{2E}(z^2 + \nu(r^2 - R^2)) \qquad éq\ 2.1-1$$
$$\sigma_{zz}(r,z) = \rho\,g\,z$$

Application numérique

$g = 10\ N/kg$
$\rho = 8.10^{-6}\ kg/mm^3$
$R = 20\ mm$
$L = 10\ mm$
$E = 2.10^5\ N/mm^2$
$\nu = 0.3$
$h = 1\ mm$

- en peau interne : $\begin{cases} u_r(L) = -2.34000\,E^{-8}\,mm \\ \sigma_{zz}(L) = 8.0000\,E^{-4}\,Mpa \\ u_z(O) = -1.185000\,E^{-9}\,mm \end{cases}$
- en peau externe : $\begin{cases} u_r(L) = -2.46000\,E^{-8}\,mm \\ \sigma_{zz}(L) = 8.0000\,E^{-4}\,Mpa \\ u_z(O) = 1.215000\,E^{-9}\,mm \end{cases}$

15.2.2 Modèle coque axisymétrique

Une traction verticale est exercée en $z = L$:

$$F = \rho\,g\,h\,L$$

La pesanteur conduit à une force verticale :

$$f = -\rho\,g\,h\,e_z$$

La condition aux limites sur le cercle d'appui est : $u_z(z) = 0$ en $z = 0$

La solution est membranaire, l'équilibre vertical s'écrit :

$$N_{zz,z} = \rho\,g\,h$$

De plus : $N_{\theta\theta} = 0$. En élasticité, on déduit alors :

$$E_{\theta\theta} = \frac{w}{R} = \frac{-\nu\,N_{zz}}{Eh} = \frac{-\nu\,\rho\,g\,z}{E}$$
$$E_{zz} = u_{z,z} = \frac{N_{zz}}{Eh} \Rightarrow u_z(z) = \frac{\rho\,g}{2E}\,z^2$$

La contrainte axiale est :

$\sigma_{zz} = \rho\,g\,z$ (constante dans l'épaisseur)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Application numérique :

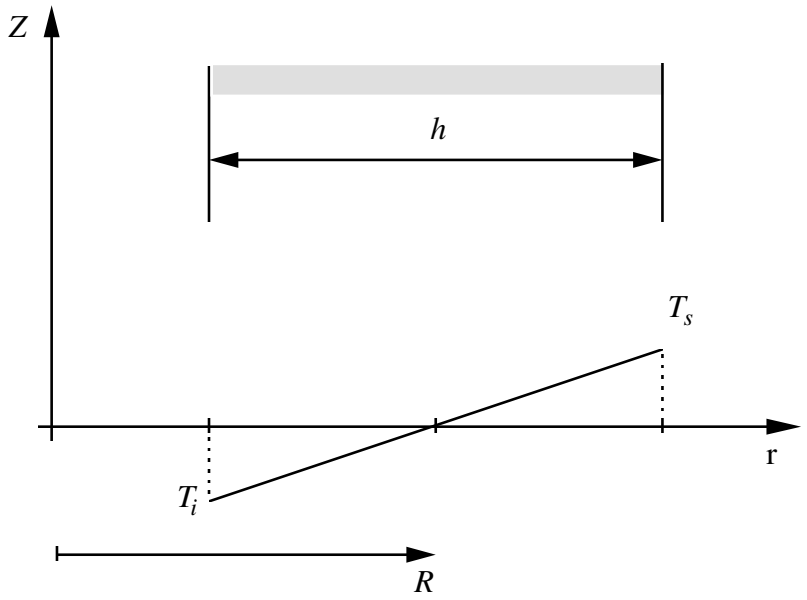
$$F = 8.10^{-4}\, N.mm^{-1}$$
$$w(L) = -2.4000.10^{-8}\, mm$$
$$N_{zz}(L) = 8.0000.10^{-4}\, N.mm^{-1}$$
$$\sigma_{zz}(L) = 8.0000.10^{-4}\, N.mm^{-1}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

15.3 Chargement thermomécanique

15.3.1 Modèle 2D axisymétrique

$$T(r)-T_{réf}(r)=\frac{T_s+T_i}{2}+\frac{(T_s-T_i)}{h}(r-R) \qquad éq\,3.1.-1$$



On postule le déplacement sous la forme :

$$u_r=u(r) \quad ; \quad u_z=u_\theta=0$$

avec les conditions aux limites idoines. Ainsi, les contraintes élastiques s'expriment :

$$\sigma_{rr}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)u'+\nu\frac{u}{r}]-\frac{\alpha E}{1-2\nu}(T-T_{réf})$$
$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\frac{u}{r}+\nu u']-\frac{\alpha E}{1-2\nu}(T-T_{réf}) \qquad éq\,1.1-3$$
$$\sigma_{zz}=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\frac{u}{r}+u']-\frac{\alpha E}{1-2\nu}(T-T_{réf})$$

L'équation d'équilibre radial $(r,\sigma_{rr})_{,r}-\sigma_{\theta\theta}=0$ donne :

$$\left(\frac{(ru)'}{r}\right)'=\frac{\alpha(1+\nu')}{(1-\nu)}(T-T_{réf})' \qquad éq\,3.1-2$$

D'où la solution générale :

$$u(r)=\frac{\alpha(1+\nu)}{(1-\nu)}\frac{(T_s-T_i)}{h}\frac{r^2}{3}+Ar+\frac{B}{r} \qquad éq\,3.1-3$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les contraintes sont alors :

$$\sigma_{rr}(r)=\frac{\alpha E(T_s-T_i)}{h}(\frac{R}{1-2\nu}-\frac{r}{3(1-\nu)})-\frac{\alpha E}{1-2\nu}(T_s-T_i)+\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(A-(1-2\nu)\frac{B}{r^2})$$
$$\sigma_{\theta\theta}(r)=\frac{\alpha E(T_s-T_i)}{h}(\frac{R}{1-2\nu}-\frac{2r}{3(1-\nu)})-\frac{\alpha E}{1-2\nu}(T_s-T_i)+\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(A-(1-2\nu)\frac{B}{r^2})$$
$$\sigma_{zz}(r)=\frac{\alpha E(T_s-T_i)}{h}(\frac{R}{1-2\nu}-\frac{r}{3(1-\nu)})-\frac{\alpha E}{1-2\nu}(T_s-T_i)+\frac{2\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}A \qquad éq\,3.1-4$$

Les conditions aux limites en efforts sont : en $r=R\pm\frac{h}{2}$, $\sigma_{rr}=0$. On note : $x=\frac{h}{2R}$. On obtient grâce à $[éq\,3.1-4]$:

$$B=\frac{\alpha(T_s-T_i)}{6h(1-\nu)}(1+\nu)R^3(1-x^2)^2$$

puis :

$$A=\alpha(1+\nu)[\frac{-(T_s-T_i)R}{6h(1-\nu)}(3-(1-2\nu)x^2)+\frac{(T_s+T_i)}{2}]$$

Application numérique :

$$F=8.10^{-4}\,N.mm^{-1}$$
$$w(L)=-2.4000.10^{-8}\,mm$$
$$N_{zz}(L)=8.0000.10^{-4}\,N.mm^{-1}$$
$$\sigma_{zz}(L)=8.0000.10^{-4}\,N.mm^{-1}$$

D'où : $A=-0.18569881.10^{-3}\,mm^2$
$B=0.02473096\,mm^2$

Note :

$$\frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu}\frac{T_s-T_i}{3h}=0.61904762\,E-5$$

• en peau interne : $\begin{cases}u_r=1.056145\,E^{-6}\,mm\\ \sigma_{zz}=1.4321427\,Mpa\end{cases}$

• en peau externe : $\begin{cases}u_r=1.110317\,E^{-6}\,mm\\ \sigma_{zz}=-1.4250001\,Mpa\end{cases}$

$$\sigma_{zz}=1.449319\,Mpa$$

ou

$$\sigma_{zz}=1.428671\,Mpa(\text{ sans correction métrique })$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans le cas où l'on prend $T_s = T_i = 0.1\,°C$:

$$A = 0{,}00130000.10^{-3}$$
$$B = 0{,}0\ mm^2$$

Ainsi :

• en peau interne : $\begin{cases} u_r = 25.350000\,E^{-6}\,mm \\ \sigma_{zz} = -0.200000\,Mpa \end{cases}$

• en peau externe : $\begin{cases} u_r = 26.650000\,E^{-6}\,mm \\ \sigma_{zz} = -0.200000\,Mpa \end{cases}$

15.3.2 Modèle coque axisymétrique

Pour le champ de température dans l'épaisseur donné par $[éq\,3.1-1]$, on obtient l'expression suivante de la loi de comportement :

$$N_{\theta\theta} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(E_{\theta\theta} + \nu E_{zz}) - \frac{\alpha E h}{1-\nu}\left[\frac{T_s+T_i}{2} + \frac{T_s-T_i}{12}\frac{h}{R}\right]$$
$$N_{zz} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\nu E_{\theta\theta} + E_{zz}) - \frac{\alpha E h}{1-\nu}\left[\frac{T_s+T_i}{2} + \frac{T_s-T_i}{12}\frac{h}{R}\right] \qquad éq\,3.2-1$$

et :

$$M_{\theta\theta} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(K_{\theta\theta} + \nu K_{zz}) - \frac{\alpha E h^2}{12(1-\nu)}\left[\frac{T_s+T_i}{2}\frac{h}{R} + T_s - T_i\right]$$
$$M_{zz} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\nu K_{\theta\theta} + K_{zz}) - \frac{\alpha E h^2}{12(1-\nu)}\left[\frac{T_s+T_i}{2}\frac{h}{R} + T_s - T_i\right] \qquad éq\,3.2-2$$

D'après ces expressions, les termes thermiques en $\frac{h}{R}$ sont à négliger si l'on ne considère pas la correction de métrique dans l'épaisseur, c'est-à-dire dans le cas des modèles habituels.

Dans notre situation :

$$E_{\theta\theta} = \frac{w}{R}$$
$$E_{zz} = 0$$
$$K_{\theta\theta} = K_{zz} = 0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'équilibre normal à la coque s'écrit :

$$N_{\theta\theta}=0$$

d'où la flèche :

$$w=\alpha(1+\nu)[\frac{T_s+T_i}{2}+\frac{T_s+T_i}{12}\frac{h}{R}]R$$

et :

$$N_{zz}=\alpha Eh[\frac{T_s+T_i}{2}+\frac{T_s+T_i}{12}\frac{h}{R}]$$
$$M_{zz}=\frac{-\alpha Eh^2}{12(1-\nu)}[(T_s-T_i)+\frac{T_s+T_i}{2}\frac{h}{R}]$$

Comme le second membre de dilatation ne tient pas compte de la correction de métrique, les termes en h/R ci-dessus sont négligés.

Application numérique

$$R=20\ mm$$
$$h=1\ mm$$
$$\alpha=10^{-5}\circ C^{-1}$$
$$T_s=T_i=0.5\circ C$$
$$\nu=0.3$$
$$E=2.10^5\ N/mm^2$$

D'où :

$$M_{zz}=-0.2380952\ N$$

• en peau interne :

$$\sigma_{zz}=1.449319\ Mpa$$
$$ou$$
$$\sigma_{zz}=1.428671\ Mpa(\text{ sans correction métrique })$$

Dans le cas où l'on prend $T_s=T_i=0,1\circ C$:

$$w=26.00000.10^{-6}\ mm$$
$$N_{zz}=-0.2\ N.mm^{-1}$$
$$M_{zz}=-0.001190476\ N$$

• en peau interne :

$$\sigma_{zz}=-0.2122466\ Mpa$$
$$ou$$
$$\sigma_{zz}=-0.200000\ Mpa(\text{ sans correction métrique })$$

** Les contraintes dans l'épaisseur avec correction de métrique sont données par :*

$$\sigma_{zz}(x_3)=\frac{N_{zz}-\frac{M_{zz}}{R}}{h(1-\frac{h^2}{12R^2})}+(M_{zz}-N_{zz}\frac{h^2}{12R})\frac{12x_3}{h^3(1-\frac{h^2}{12R^2})}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)