SSNV232 – Essai triaxial drainé avec les lois MOHR_COULOMB et MohrCoulombAS

Résumé

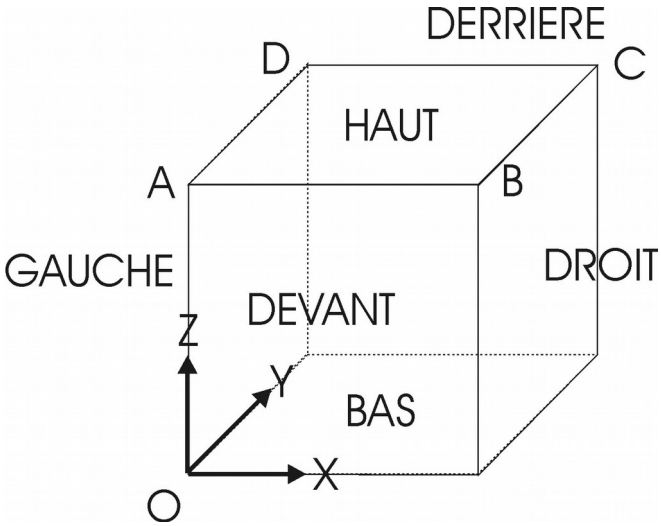
On réalise un *calcul triaxial en mécanique pure* (équivalent à des conditions hydrauliques drainées) avec les lois MOHR_COULOMB (modélisations A et B) et MohrCoulombAS (modélisations C et D). Les solutions calculées sont comparées à une solution analytique. Ce test comporte quatre modélisations :

- A : modélisation sur point matériel (SIMU_POINT_MAT) avec la loi MOHR_COULOMB ;
- B : modélisation 3D (STAT_NON_LINE) avec la loi MOHR_COULOMB ;
- C : modélisation sur point matériel (SIMU_POINT_MAT) avec la loi MohrCoulombAS ;
- D : modélisation 3D (STAT_NON_LINE) avec la loi M ohrCoulombAS .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



L'essai triaxial est effectué sur un seul élément fini isoparamétrique de forme cubique $CUB8$. La longueur de chaque arête vaut 1. Les différentes facettes de ce cube sont des groupes de mailles nommés $HAUT$, BAS, $DEVANT$, $DERRIERE$, $DROIT$ et $GAUCHE$. Le groupe de mailles *SYM* contient par ailleurs les groupes de mailles BAS, $DEVANT$ et $GAUCHE$; le groupe de mailles $COTE$ les groupes de mailles $DERRIERE$ et $DROIT$.

1.2 Propriétés de matériaux

Les propriétés élastiques sont :
- module de compressibilité isotrope : $K=516{,}2\ MPa$
- module de cisaillement : $\mu=238{,}2\ MPa$

Les paramètres communs aux lois `MOHR_COULOMB` et `MohrCoulombAS` sont :
- angle de frottement (`FrictionAngle`) : $\phi=33°$
- angle de dilatance (`DilatancyAngle`) : $\psi=27°$
- cohésion (`Cohesion`) : $c_0=1\ kPa$

Les paramètres propres à la loi `MohrCoulombAS` sont :
- angle de transition (`TransitionAngle`) : $\theta_T=29.9°$
- paramètre de régularisation du critère en traction (`TensionCutOff`) : $a=0.25\,C/\tan(\varphi)$
- paramètre d'écrouissage durcissant (`HardeningCoef`) : $h_C=0$

Le paramètre $\theta_T=29.9°$ a été choisi de manière à se rapprocher du critère original (singulier) de Mohr-Coulomb ($\theta_T=30°$) ; et en faisant en sorte que la convergence ne soit pas trop dégradée.

1.3 Conditions aux limites et chargements

Un essai triaxial consiste à imposer à l'éprouvette une variation de charge verticale tout en maintenant la pression latérale constante. Il peut être drainé (la pression interstitielle de fluide ne varie pas au cours de l'essai) ou non-drainé (on ferme le robinet : la pression interstitielle de fluide évolue dans l'échantillon). On s'intéresse ici au cas drainé, plus simple, car ne faisant pas intervenir l'influence de la pression interstitielle du fluide et *modélisable de ce fait par un calcul mécanique pur*.

Dans le modèle considéré (cas des modélisations B et D), l'élément cubique représente un huitième de l'échantillon. Les conditions limites sont donc les suivantes :
- Les conditions de symétrie :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- $u_z=0$ sur le groupe de maille BAS
- $u_x=0$ sur le groupe de maille $GAUCHE$
- $u_y=0$ sur le groupe de maille $DEVANT$

- Les conditions de pression latérale :
  - $P_n=1$ sur le groupe de maille $COTE$
- Les conditions de chargement :
  - $P_n=1$ sur le groupe de maille $HAUT$ (phase 1)
  - $u_z=-1$ sur le groupe de maille $HAUT$ (phase 2)

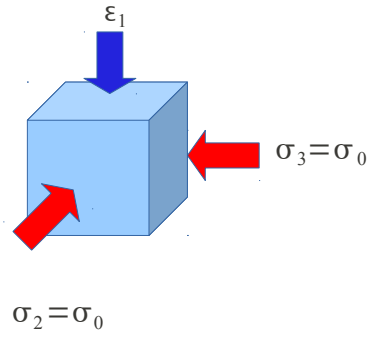
Le chargement s'effectue en deux phases :

- Initialisation. Chargement isotrope entre $t\in[-2;0]s$: la pression p sur les groupes de mailles $COTE$ et $HAUT$ varie de 0 à $p=P_0=50\,kPa$, la pression de préconsolidation isotrope à l'état intial ;
- test triaxial proprement dit : déplacement imposé sur le groupe de mailles $HAUT$ avec t variant entre $t\in[0-30]s$ et u_z variant entre $u_z\in[0;-0,3]mm$. La déformation verticale ε_{zz} totale est de $0,03\,\%$;

1.4 Solution analytique

Les chargements appliqués appliqués sur l'échantillon cubique sont représentés ci-dessous :

- $\varepsilon_1=F(t)$
- $\sigma_2=\sigma_3=\sigma_0$



Le comportement de l'échantillon est régi par la loi de Mohr-Coulomb, qui s'exprime comme suit :

$$\begin{cases} f(\sigma_1,\sigma_3)=|\sigma_1-\sigma_3|+(\sigma_1+\sigma_3)\sin\phi-2c_0\cos\phi\le 0 \\ \sigma_1\ge\sigma_2=\sigma_3 \end{cases} \quad \textbf{(1.4-1)}$$

Tableau 1.4-1

Elle est associée au potentiel d'écoulement plastique :

$$g(\sigma_1,\sigma_3)=|\sigma_1-\sigma_3|+(\sigma_1+\sigma_3)\sin\psi-2c_0\cos\psi \quad \textbf{(1.4-2)}$$

de sorte que, en notant $t=\sin\psi$ et $\xi=signe(\sigma_1-\sigma_3)$, la loi d'écoulement s'écrit :

$$\begin{cases} f(\sigma_1,\sigma_3)\ge 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial\sigma_1}=\dot{\varepsilon}_1^p=\dot{\lambda}(t+\xi) \\ \dfrac{\partial g}{\partial\sigma_2}=\dot{\varepsilon}_2^p=\dot{\varepsilon}_3^p=\dot{\lambda}(t-\xi) \end{cases} \quad \textbf{(1.4-3)}$$

où $\dot{\lambda}$ représente le multiplicateur plastique. Les deux inconnues du problème sont donc : σ_1 (ou ε_3) et $\dot{\lambda}$.

1.4.1 Résolution en régime élastique

L'équation **1.4-1** est satisfaite. On a alors :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \sigma_1 = \overbrace{\left(K+\frac{4}{3}G\right)}^{E}\varepsilon_1^e + 2\left(K-\frac{2}{3}G\right)\varepsilon_3^e \\ \sigma_3 = \left(K-\frac{2}{3}G\right)\varepsilon_1^e + \left(K-\frac{2}{3}G\right)\varepsilon_3^e + \left(K+\frac{4}{3}G\right)\varepsilon_3^e \\ \quad = \underbrace{\left(K-\frac{2}{3}G\right)}_{C}\varepsilon_1^e + 2\underbrace{\left(K+\frac{G}{3}\right)}_{D}\varepsilon_3^e \end{cases} \quad \textbf{(1.4.1-1)}$$

Sachant que $\sigma_3=\sigma_0$, on déduit directement de **1.4.1-1** que :

$$\dot{\varepsilon}_3^e = -\frac{C}{D}\dot{\varepsilon}_1^e \quad \textbf{(1.4.1-2)}$$

1.4.2 Résolution en régime plastique

L'équation **1.4-3** est satisfaite. Soit $\sigma^p=\sigma^e$ la prédiction élastique donnée par les équations **1.4.1-1**, la contrainte finale σ^+ s'écrit :

$$\sigma^+ = \mathbb{C}.\varepsilon^+ = \sigma^p - \dot{\lambda}\,\mathbb{C}.\vec{n}_g \quad \textbf{(1.4.2-1)}$$

où $\mathbb{C}=\begin{bmatrix} E & 2C \\ C & D \end{bmatrix}$ représente le tenseur d'élasticité linéaire et $\vec{n}_g=(t+\xi,\ t-\xi)$.

On calcule le multiplicateur plastique en écrivant $f(\sigma^+)=0$, soit :

$$\begin{aligned} &(s+\xi)\left(K+\frac{4}{3}G\right)\varepsilon_1^+ + 2(s+\xi)\left(K-\frac{2}{3}G\right)\varepsilon_3^+ \quad + \\ &(s-\xi)\left(K-\frac{2}{3}G\right)\varepsilon_1^+ + 2(s-\xi)\left(K+\frac{G}{3}\right)\varepsilon_3^+ \quad = 2c_0\cos\phi \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2\left(Ks+G\left(\xi+\frac{s}{3}\right)\right)}_{A}\varepsilon_1^+ + \underbrace{2\left(2Ks-G\left(\xi+\frac{s}{3}\right)\right)}_{B}\varepsilon_3^+ = 2c_0\cos\phi \quad \textbf{(1.4.2-2)}$$

ce qui donne, en remplaçant :

$$\begin{cases} \varepsilon_1^+ = \varepsilon_1^e - \dot{\lambda}(t+\xi) \\ \varepsilon_3^+ = \varepsilon_3^e - \dot{\lambda}(t-\xi) \end{cases} \quad \textbf{(1.4.2-3)}$$

dans **1.4.2-2**, on obtient : $\dot{\lambda}\underbrace{\left[A(t+\xi)+B(t-\xi)\right]}_{BB} = -2c_0\cos\phi + A\varepsilon_1^e + B\varepsilon_3^e = f(\sigma^e)$,

soit : $\dot{\lambda}=\frac{f(\sigma^e)}{BB}$ (1.4.2-4)

1.4.3 Correction du déséquilibre

On doit vérifier $\sigma_3^+=\sigma_0$. On suppose une petite variation virtuelle δ de la solution. On cherche l'expression de $\delta\sigma_3^+$, soit :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\delta\sigma_3^+ = C\,\delta\varepsilon_1^e + E\,\delta\varepsilon_3^e - \delta\dot{\lambda}\,C(t+\xi) - \delta\dot{\lambda}\,E(t-\xi) \quad \textbf{(1.4.3-1)}$$

Sachant que $\dot{\lambda}$ est donné par **1.4.2-4**, on a : $\delta\dot{\lambda} = \frac{A}{BB}\delta\varepsilon_1^e + \frac{B}{BB}\delta\varepsilon_3^e$ (1.4.3-2)

que l'on reporte dans **1.4.3-1**. Cela donne alors :

$$\delta\sigma_3^+ = \left[C - A\frac{C(t+\xi)+E(t-\xi)}{BB}\right]\delta\varepsilon_1^e + \left[D - B\frac{C(t+\xi)+E(t-\xi)}{BB}\right]\delta\varepsilon_3^e \quad \textbf{(1.4.3-3)}$$

Au cours du processus de Newton, on recherche une nouvelle valeur de $\delta\varepsilon_3$ sachant que $\delta\varepsilon_1 = 0$ (c'est le chargement imposé, qui ne peut pas être faux). Cette valeur est telle que le déséquilibre $\sigma_0 - \sigma_3^+$ soit corrigé, soit : $\frac{\partial\sigma_3^+}{\partial\varepsilon_3}\delta\varepsilon_3 = \sigma_0 - \sigma_3^+$, soit, en utilisant **1.4.3-3** :

$$\delta\varepsilon_3 = \frac{\sigma_0 - \sigma_3^+}{D - B\frac{C(t+\xi)+E(t-\xi)}{BB}} \quad (1.4.3\text{-}4)$$

1.4.4 Processus de résolution de Newton

Le processus de résolution s'écrit comme suit :

Au pas de temps t tel que $\varepsilon_1 = F(t)$:

1 Calculer σ_1^p et σ_3^p à l'aide de **1.4.2-2** et **1.4.2-1**

2 Tant que $|\sigma_0 - \sigma_3^+| > \epsilon$, effectuer :

- **3** Si $f(\sigma_1^p, \sigma_3^p) < 0$, alors **OK** .
  $\sigma_1^+ = \sigma_1^p$ et $\sigma_3^+ = \sigma_3^p$ et aller à **5**
- **4** Si $f(\sigma_1^p, \sigma_3^p) \geq 0$, alors **NOOK** :
  Calculer $\dot{\lambda}$ à l'aide de **1.4.2-4**
  Calculer ε_1^+ et ε_3^+ à l'aide de **1.4.2-3**
  Calculer σ_1^+ et σ_3^+ à l'aide de **1.4.1-1**
- **5** Calculer $\delta\varepsilon_3$ à l'aide de **1.4.2-4**
  Mettre à jour ε_3^+ , σ_1^+ et σ_3^+ et aller à **2**

Tableau 1.4.4-1 : Procédure de résolution pour le test triaxial avec la loi de Mohr-Coulomb.

Le calcul de la solution analytique est appelé par la fonction `Triaxial_DR` contenue dans le fichier `bibpyt/Contrib/essai_triaxial.py` .

1.4.5 Matrice tangente cohérente

A des fins de vérifications, il est possible d'exhiber la matrice tangente cohérente du problème.
En complément à l'équation 1.4.3-3, on obtient également pour $\delta\sigma_1^+$ l'expression suivante :

$$\delta\sigma_1^+ = \left[E - A\frac{E(t+\xi)+C(t-\xi)}{BB}\right]\delta\varepsilon_1^e + \left[C - B\frac{E(t+\xi)+C(t-\xi)}{BB}\right]\delta\varepsilon_3^e \quad \textbf{(1.4.5-1)}$$

L'expression de la matrice tangente cohérente $DSDE$ s'écrit donc :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$DSDE=\begin{bmatrix} E-A\dfrac{E(t+\xi)+C(t-\xi)}{BB} & C-B\dfrac{E(t+\xi)+C(t-\xi)}{BB} \\ C-A\dfrac{C(t+\xi)+E(t-\xi)}{BB} & E-B\dfrac{C(t+\xi)+E(t-\xi)}{BB} \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.4.5-2)}$$

1.5 Résultats

Les solutions sont post-traitées au point C pour les termes de contraintes verticale σ_{zz} et horizontale σ_{xx}, ainsi que ceux de déformation volumique plastique ε_v^p et de déformation déviatorique plastique $|\varepsilon_d^p|=\sqrt{\frac{3}{2}\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon_v^p}{3}I\right):\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon_v^p}{3}I\right)}$.

2 Modélisation A

2.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation **A** est effectuée sur un point matériel, à l'aide de SIMU_POINT_MAT.
Le pas de temps est de $\Delta t=0,1\,sec$, soit 300 incréments temporels.
Une légère dissymétrie de $\epsilon=10^{-6}$ est introduite sur le chargement horizontal afin d'éviter une singularité trop marquée de la matrice tangente lors de l'entrée en plasticité :

$$\begin{cases}\sigma_{xx}=\sigma_0\\ \sigma_{yy}=\sigma_0\left(1+10^{-6}\right)\end{cases}$$

*Cette dissymétrie n'est pas prise en compte dans la modélisation **C** pour laquelle le critère est régulier sur un chemin de compression triaxiale.*

2.2 Grandeurs testées et résultats

2.2.1 Valeurs testées

Les solutions sont calculées au point C et comparées à la solution analytique à l'instant final $t=30\,sec$. Elles sont données en termes de contraintes verticale σ_{zz} et horizontale σ_{xx}, de déformation volumique plastique ε_v^p et de déformation déviatorique plastique $|\varepsilon_d^p|=\sqrt{\frac{3}{2}\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon_v^p}{3}I\right):\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon_v^p}{3}I\right)}$, et récapitulées dans le tableau suivant :

$t=30\,sec$	Solution analytique	Erreur relative admissible [%]
σ_{zz}	−1,732895416041E+5	1,E-1
σ_{xx}	50000.	1,E-1
ε_v^p	1,6784502547224E-4	1,E-1
$\lvert\varepsilon_d^p\rvert$	3,3099447556585E-4	1,E-1

Tableau 2.2.1-1 : Validation des résultats pour la modélisation A

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2.2 Commentaires

L'écart à la solution analytique est très faible (inférieur à $10^{-3}\%$).

3 Modélisation B

3.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation **B** est effectuée en 3D, à l'aide de STAT_NON_LINE.
Le pas de temps est de $\Delta t = 0,1\, sec$, soit 300 incréments temporels. Le redécoupage automatique du pas de temps est activé.
Une légère dissymétrie de $\epsilon = 10^{-3}$ est introduite sur le chargement horizontal afin d'éviter une singularité trop marquée de la matrice tangente lors de l'entrée en plasticité :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_0 \\ \sigma_{yy} = \sigma_0 \left(1 + 10^{-3}\right) \end{cases}$$

*Cette dissymétrie n'est pas prise en compte dans la modélisation **D** pour laquelle le critère est régulier sur un chemin de compression triaxiale.*

3.2 Grandeurs testées et résultats

3.2.1 Valeurs testées

Les solutions sont calculées au point C et comparées à la solution analytique à l'instant final $t = 30\, sec$. Elles sont données en termes de contraintes verticale σ_{zz} et horizontale σ_{xx} , de déformation volumique plastique ε_v^p et de déformation déviatorique plastique $|\varepsilon_d^p| = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon_v^p}{3} I\right) : \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon_v^p}{3} I\right)}$, et récapitulées dans le tableau suivant :

$t = 30\, sec$	Solution analytique	Erreur relative admissible [%]
σ_{zz}	−1,732895416041E+5	1,E-1
σ_{xx}	50000.	1,E-1
ε_v^p	1,6784502547224E-4	1,E-1
$\lvert\varepsilon_d^p\rvert$	3,3099447556585E-4	1,E-1

Tableau 3.2.1-1 : Validation des résultats pour la modélisation B

3.2.2 Commentaires

L'écart à la solution de référence est très faible (inférieur à $10^{-5}\%$).

4 Modélisation C

4.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation **C** est effectuée sur un point matériel, à l'aide de SIMU_POINT_MAT.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La déformation axiale imposée pendant la phase de compression isotrope est égale à $-\sigma_0/3K$ (déformation axiale permettant d'atteindre $\sigma_{zz}=\sigma_0$, appliquée en $t=1s$). Pendant le même intervalle de temps, les contraintes latérales passent de $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=0$ à $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_0$. La déformation axiale maximale appliquée pendant la phase déviatorique est $\epsilon_{zz}=-0.03\,\%$ (instant final $t=30s$). Pendant la phase déviatorique, les contraintes latérales sont maintenues constantes, égales à $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_0$.

4.2 Grandeurs testées et résultats

4.2.1 Valeurs testées

Cinq tests de non-regression sont réalisés en fin d'essai à $t=30s$, sur :

- SIXX – contrainte latérale devant être égale au confinement imposé, soit σ_0 ;
- SIZZ – contrainte résultant de la loi de comportement ;
- V7 – multiplicateur plastique (égal à la déformation plastique équivalente de von-Mises) ;
- V8 – déformation volumique plastique ($\epsilon_{kk}-\epsilon^e_{kk}$) ;
- V9 – dissipation ($\int \sigma_{ij}\left(\delta\epsilon_{ji}-\delta\epsilon^e_{ji}\right)$).

$t=30\,sec$	Solution analytique de la modélisation A	Solution calculée issue de la modélisation C
SIZZ (Pa)	−173289.5416041	−173077.28029053428
SIXX (Pa)	−50000.	−50000.00000615134
V8	0.00016784502547224	0.00011457113677334
V7	0.00033099447556585	0.0002523646130019748
V9 (Pa)	-	2.7623234303334216

Tableau 4.2.1-1 : Validation des résultats pour la modélisation C

Il est normal de constater quelques écarts avec la solution analytique pour les composantes SIZZ, V7, et V8 puisque le critère lissé utilisé par la loi MohrCoulombAS s'écarte quelque peu du critère original de Mohr-Coulomb.

5 Modélisation D

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Les hypothèses de modélisation sont les mêmes que celles de la modélisation **B** ; le scénario de chargement est identique à celui de la modélisation **C**.

5.2 Grandeurs testées et résultats

5.2.1 Valeurs testées

Les solutions sont calculées au point C . Cinq tests de non-regression sont réalisés sur les mêmes composantes que celles de la modélisation **C** .

$t=30\,sec$	Solution analytique de la modélisation A	Solution calculée modélisation C
SIZZ (Pa)	−173289.5416041	−173077.28028242028
SIXX (Pa)	−50000.	−50000.00000615134
V8	0.00016784502547224	0.00011457113677957863
V7	0.00033099447556585	0.0002523646130157128
V9 (Pa)	-	2.76232343120816

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Nous constatons que les écarts entre modélisations **C** (SIMU_POINT_MAT), et **D** (STAT_NON_LINE) sont très faibles.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)