# SSNP303 - Élément en contrainte plane et traction - Plasticité parfaite

**Résumé :**

Ce test de mécanique quasi-statique non linéaire $2D$ consiste à charger trois éléments de plaque superposés (type d'élément MECPQU4). Les 4 nœuds sont communs aux 3 éléments. Les éléments ont des propriétés différentes (plasticité parfaite) pour obtenir une courbe de traction convenable. Ce test est tiré du guide NAFEMS.

Le but est de comparer les différentes méthodes de type Newton-Raphson permettant de résoudre le système d'équations non linéaires (NEWTON : (MATRICE 'ELASTIQUE') et NEWTON : (MATRICE 'TANGENTE') avec REAC_INCR et REAC_ITER). Le critère de convergence choisi correspond à $0.01\%$ de la force résiduelle (RESI_GLOB_RELA).

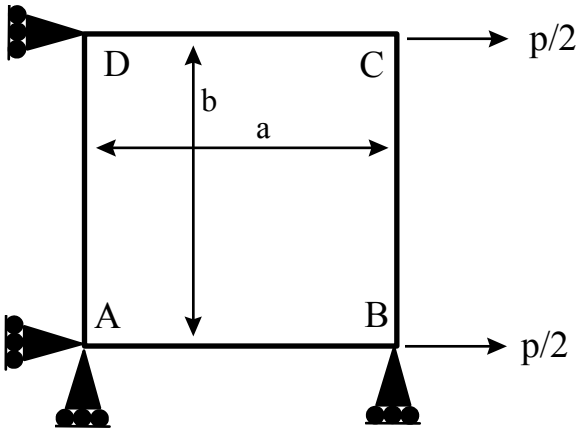
La modélisation est effectuée avec des éléments plans de type MECPQU4.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

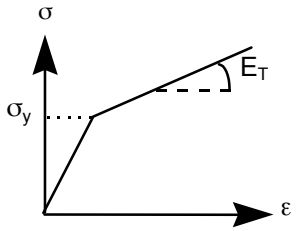
# 1 Problème de référence

## 1.1 Géométrie




$a = b = 1.0$

## 1.2 Propriétés de matériaux




| | Matériau 1 | Matériau 2 | Matériau 3 |
|---|---|---|---|
| | E = 100000 MPa | E = 60000 MPa | E = 40000 MPa |
| | ν = 0.25 | ν = 0.25 | ν = 0.25 |
| | $\sigma_y$ = 3 MPa | $\sigma_y$ = 6 MPa | $\sigma_y$ = 8 MPa |
| | $E_T$ = 0.0 | $E_T$ = 0.0 | $E_T$ = 0.0 |

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

Point $A$ : $u_x = 0.$
$u_y = 0.$
Point $B$ : $u_y = 0.$
Point $D$ : $u_x = 0.$

Chargement par une force $P/2$ sur le point $B$ et $C$. La force $P$ est augmentée en 6 étapes de la manière suivante :

| Force $P$ | 3.00 | 6.00 | 9.00 | 12.95 | 15.00 | 16.93 |
|---|---|---|---|---|---|---|



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Solution de référence

## 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Les résultats considérés comme référence ont été obtenus par SAMCEF en utilisant 60 incréments pour chaque étape de chargement. Les caractéristiques des différentes méthodes de résolution sont les suivantes :

A Utilisation de la matrice élastique.
B Utilisation de la matrice tangente ; celle-ci n'est réévaluée qu'à la première itération de chaque incrément (REAC_INCR = 1 et REAC_ITER = 0). Il s'agit de la méthode de Newton modifiée.
C Utilisation de la matrice tangente ; celle-ci est réévaluée à chaque itération de chaque incrément (REAC_INCR = 1 et REAC_ITER = 1). Il s'agit de la méthode de Newton classique.

## 2.2 Résultats de référence

Résultats obtenus avec 60 incréments pour chaque étape de chargement

| | Elément 1 | | Elément 2 | | Elément 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Force | $\sigma^{xx}$ | $\sigma^{yy}$ | $\sigma^{xx}$ | $\sigma^{yy}$ | $\sigma^{xx}$ | $\sigma^{yy}$ |
| 3.00 | 1.500000D+00 | 6.938894D–18 | 9.000000D–01 | –1.040834D–17 | 6.000000D–01 | –6.938894D–18 |
| 6.00 | 3.000000D+00 | 4.861944D–13 | 1.800000D+00 | –2.081668D–17 | 1.200000D+00 | –3.469447D–18 |
| 9.00 | 3.147155D+00 | 3.199571D–01 | 3.511707D+00 | –1.900098D–01 | 2.341138D+00 | –1.279828D–01 |
| 12.95 | 3.252919D+00 | 5.950074D–01 | 5.814267D+00 | –3.523377D–01 | 3.878832D+00 | –2.380030D–01 |
| 15.00 | 3.213822D+00 | 4.873069D–01 | 6.017834D+00 | 3.174572D–02 | 5.768340D+00 | –5.231355D–01 |
| 16.93 | 3.2092970D+00 | 4.753345D–01 | 6.149462D+00 | 3.048490D–01 | 7.571241D+00 | –7.863557D–01 |

## 2.3 Incertitude sur la solution

Incertitude inférieure à $1\ \%$ .

## 2.4 Références bibliographiques

1) Fundamental tests for two and three dimensional, small strain, elastoplastic finite element analysis, 1987, NAFEMS

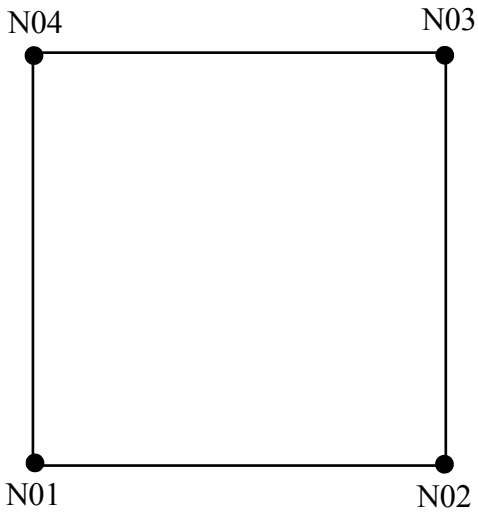


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Modélisation A

## 3.1 Caractéristiques de la modélisation A

Utilisation des éléments QUAD4




Modélisation en contraintes planes : C_PLAN

Le chargement et les conditions aux limites sont modélisés par :

- DDL_IMPO : ( Noeud NO1 DX = 0 , DY = 0 )
  ( Noeud NO2 DY = 0 )
  ( Noeud NO4 DX = 0 )
- des forces imposées aux noeuds $NO2$ et $NO3$ .

## 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 4
Nombre de mailles et types : 3 MECPQU4



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 3.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification | Instant | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|---|
| *SIXX* ( maille 1 ) | 1 | 1,500000E+00 | 1,500000E+00 | 0 |
| *SIYY* (maille 1 ) | 1 | 6,938894E–18 | 1,291047E–14 | 0 |
| *SIXX* ( maille 2 ) | 1 | 9,000000E–01 | 9,000000E–01 | 0 |
| *SIYY* (maille 2 ) | 1 | –1,040834E–17 | –1,509903E–14 | 0 |
| *SIXX* ( maille 3 ) | 1 | 6,000000E–01 | 6,000000E–01 | 0 |
| *SIYY* (maille 3 ) | 1 | –6,938894E–18 | –2,107830E–14 | 0 |
| *SIXX* ( maille 1 ) | 2 | 3,000000E+00 | 3,000000E+00 | 0 |
| *SIYY* (maille 1 ) | 2 | 4,861944E–13 | 1,359551E–13 | 0 |
| *SIXX* ( maille 2 ) | 2 | 1,800000E+00 | 1,800000E+00 | 0 |
| *SIYY* (maille 2 ) | 2 | –2,081668E–17 | –1,093097E–13 | 0 |
| *SIXX* ( maille 3 ) | 2 | 1,200000E+00 | 1,200000E+00 | 0 |
| *SIYY* (maille 3 ) | 2 | –3,469447E–18 | –1,007126E–13 | 0 |
| *SIXX* ( maille 1 ) | 3 | 3,147155E+00 | 3,145788E+00 | –0,043 |
| *SIYY* (maille 1 ) | 3 | 3,199571E–01 | 3,167040E–01 | –1,017 |
| *SIXX* ( maille 2 ) | 3 | 3,511707E+00 | 3,512527E+00 | 0,023 |
| *SIYY* (maille 2 ) | 3 | –1,900098E–01 | –1,900224E–01 | 0,007 |
| *SIXX* ( maille 3 ) | 3 | 2,341138E+00 | 2,341685E+00 | 0,023 |
| *SIYY* (maille 3 ) | 3 | –1,279828E–01 | –1,266816E–01 | –1,017 |
| *SIXX* ( maille 1 ) | 4 | 3,252919E+00 | 3,250728E+00 | –0,067 |
| *SIYY* (maille 1 ) | 4 | 5,950074E–01 | 5,887464E–01 | –1,052 |
| *SIXX* ( maille 2 ) | 4 | 5,814267E+00 | 5,816159E+00 | 0,033 |
| *SIYY* (maille 2 ) | 4 | –3,523377E–01 | –3,521695E–01 | –0,048 |
| *SIXX* ( maille 3 ) | 4 | 3,878832E+00 | 3,882391E+00 | 0,092 |
| *SIYY* (maille 3 ) | 4 | –2,380030E–01 | –2,364650E–01 | –0,646 |
| *SIXX* ( maille 1 ) | 5 | 3,213822E+00 | 3,214367E+00 | 0,017 |
| *SIYY* (maille 1 ) | 5 | 4,873069E–01 | 4,887527E–01 | 0,297 |
| *SIXX* ( maille 2 ) | 5 | 6,017834E+00 | 6,015985E+00 | –0,031 |
| *SIYY* (maille 2 ) | 5 | 3,174572E–02 | 3,209818E–02 | 1,11 |
| *SIXX* ( maille 3 ) | 5 | 5,768340E+00 | 5,769681E+00 | 0,023 |
| *SIYY* (maille 3 ) | 5 | –5,231355E–01 | –5,207413E–01 | –0,458 |
| *SIXX* ( maille 1 ) | 6 | 3,209297E+00 | 3,210194E+00 | 0,028 |
| *SIYY* (maille 1 ) | 6 | 4,753345E–01 | 4,777143E–01 | 0,501 |
| *SIXX* ( maille 2 ) | 6 | 6,149462E+00 | 6,146791E+00 | –0,043 |
| *SIYY* (maille 2 ) | 6 | 3,048490E–01 | 3,052330E–01 | 0,126 |
| *SIXX* ( maille 3 ) | 6 | 7,571241E+00 | 7,572486E+00 | 0,016 |
| *SIYY* (maille 3 ) | 6 | –7,863557E–01 | –7,826545E–01 | –0,471 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 3.4 Remarques

Pour obtenir une précision correcte, il faut imposer un nombre important d'incréments pour chaque étape de chargement ( 60 incréments ).

Le nombre d'itérations est égal à 411.

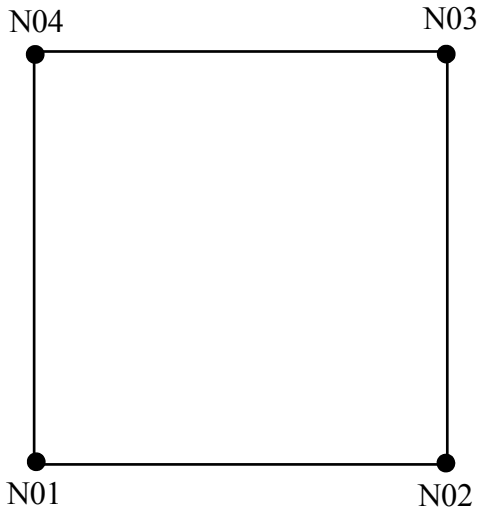


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 4 Modélisation B

## 4.1 Caractéristiques de la modélisation B

Utilisation des éléments QUAD4




## 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 4
Nombre de mailles et types : 3 MECPQU4

Modélisation en contraintes planes : C_PLAN

Le chargement et les conditions aux limites sont modélisés par :

- DDL_IMPO : ( Noeud NO1 DX = 0 , DY = 0 )
  ( Noeud NO2 DY = 0 )
  ( Noeud NO4 DX = 0 )
- des forces imposées aux noeuds $NO2$ et $NO3$ .



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 4.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification | Instant | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|---|
| *SIXX* ( maille 1 ) | 1 | 1,500000E+00 | 1,500000E+00 | 0.000 |
| *SIYY* ( maille 1 ) | 1 | 6,938894E–18 | 1,351398E–14 | 0.000 |
| *SIXX* ( maille 2 ) | 1 | 9,000000E–01 | 9,000000E–01 | 0.000 |
| *SIYY* ( maille 2 ) | 1 | –1,040834E–17 | –2,142673E–14 | 0.000 |
| *SIXX* ( maille 3 ) | 1 | 6,000000E–01 | 6,000000E–01 | 0.000 |
| *SIYY* ( maille 3 ) | 1 | –6,938894E–18 | –2,924612E–14 | 0.000 |
| *SIXX* ( maille 1 ) | 2 | 3,000000E+00 | 3,000000E+00 | 0.000 |
| *SIYY* ( maille 1 ) | 2 | 4,861944E–13 | 9,617834E–14 | 0.000 |
| *SIXX* ( maille 2 ) | 2 | 1,800000E+00 | 1,800000E+00 | 0.000 |
| *SIYY* ( maille 2 ) | 2 | –2,081668E–17 | –8,301280E–14 | 0.000 |
| *SIXX* ( maille 3 ) | 2 | 1,200000E+00 | 1,200000E+00 | 0.000 |
| *SIYY* ( maille 3 ) | 2 | –3,469447E–18 | –9,360717E–14 | 0.000 |
| *SIXX* ( maille 1 ) | 3 | 3,147155E+00 | 3,145788E+00 | –0.043 |
| *SIYY* ( maille 1 ) | 3 | 3,199571E–01 | 3,167038E–01 | –1.017 |
| *SIXX* ( maille 2 ) | 3 | 3,511707E+00 | 3,512527E+00 | 0.023 |
| *SIYY* ( maille 2 ) | 3 | –1,900098E–01 | –1,900225E–01 | 0.007 |
| *SIXX* ( maille 3 ) | 3 | 2,341138E+00 | 2,341685E+00 | 0.023 |
| *SIYY* ( maille 3 ) | 3 | –1,279828E–01 | –1,266817E–01 | –1.017 |
| *SIXX* ( maille 1 ) | 4 | 3,252919E+00 | 3,250686E+00 | –0.069 |
| *SIYY* ( maille 1 ) | 4 | 5,950074E–01 | 5,886265E–01 | –1.072 |
| *SIXX* ( maille 2 ) | 4 | 5,814267E+00 | 5,816233E+00 | 0.034 |
| *SIYY* ( maille 2 ) | 4 | –3,523377E–01 | –3,520332E–01 | –0.086 |
| *SIXX* ( maille 3 ) | 4 | 3,878832E+00 | 3,883081E+00 | 0.110 |
| *SIYY* ( maille 3 ) | 4 | –2,380030E–01 | –2,365921E–01 | –0.593 |
| *SIXX* ( maille 1 ) | 5 | 3,213822E+00 | 3,214343E+00 | 0.016 |
| *SIYY* ( maille 1 ) | 5 | 4,873069E–01 | 4,886891E–01 | 0.284 |
| *SIXX* ( maille 2 ) | 5 | 6,017834E+00 | 6,015971E+00 | –0.031 |
| *SIYY* ( maille 2 ) | 5 | 3,174572E–02 | 3,207056E–02 | 1.023 |
| *SIXX* ( maille 3 ) | 5 | 5,768340E+00 | 5,769686E+00 | 0.023 |
| *SIYY* ( maille 3 ) | 5 | –5,231355E–01 | –5,207599E–01 | –0.454 |
| *SIXX* ( maille 1 ) | 6 | 3,209297E+00 | 3,210140E+00 | 0.026 |
| *SIYY* ( maille 1 ) | 6 | 4,753345E–01 | 4,775720E–01 | 0.471 |
| *SIXX* ( maille 2 ) | 6 | 6,149462E+00 | 6,146788E+00 | –0.043 |
| *SIYY* ( maille 2 ) | 6 | 3,048490E–01 | 3,052260E–01 | 0.124 |
| *SIXX* ( maille 3 ) | 6 | 7,571241E+00 | 7,573072E+00 | 0.024 |
| *SIYY* ( maille 3 ) | 6 | –7,863557E–01 | –7,827984E–01 | –0.452 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 4.4 Remarques

Idem modélisation A concernant le nombre d'incréments sur la précision des résultats.

Le nombre d'itérations est égal à 361.

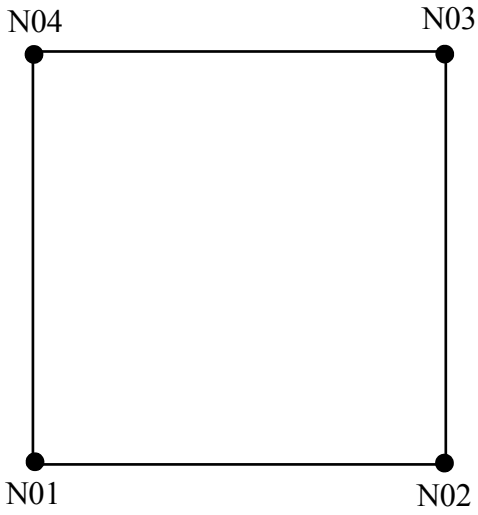


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 5 Modélisation C

## 5.1 Caractéristiques de la modélisation C

Utilisation des éléments QUAD4




## 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 4
Nombre de mailles et types : 3 MECPQU4

Modélisation en contraintes planes : C_PLAN

Le chargement et les conditions aux limites sont modélisés par :

- DDL_IMPO : ( Noeud NO1 DX = 0 , DY = 0 )
  ( Noeud NO2 DY = 0 )
  ( Noeud NO4 DX = 0 )
- des forces imposées aux nœuds $NO2$ et $NO3$ .



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 5.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification | Instant | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|---|
| *SIXX* ( maille 1 ) | 1 | 1,500000E+00 | 1,500000E+00 | 0 |
| *SIYY* ( maille 1 ) | 1 | 6,938894E–18 | 1,351398E–14 | 0 |
| *SIXX* ( maille 2 ) | 1 | 9,000000E–01 | 9,000000E–01 | 0 |
| *SIYY* ( maille 2 ) | 1 | –1,040834E–17 | –2,142673E–14 | 0 |
| *SIXX* ( maille 3 ) | 1 | 6,000000E–01 | 6,000000E–01 | 0 |
| *SIYY* ( maille 3 ) | 1 | –6,938894E–18 | –2,924612E–14 | 0 |
| *SIXX* ( maille 1 ) | 2 | 3,000000E+00 | 3,000000E+00 | 0 |
| *SIYY* ( maille 1 ) | 2 | 4,861944E–13 | 9,617834E–14 | 0 |
| *SIXX* ( maille 2 ) | 2 | 1,800000E+00 | 1,800000E+00 | 0 |
| *SIYY* ( maille 2 ) | 2 | –2,081668E–17 | –8,301280E–14 | 0 |
| *SIXX* ( maille 3 ) | 2 | 1,200000E+00 | 1,200000E+00 | 0 |
| *SIYY* ( maille 3 ) | 2 | –3,469447E–18 | –9,360717E–14 | 0 |
| *SIXX* ( maille 1 ) | 3 | 3,147155E+00 | 3,145788E+00 | –0,043 |
| *SIYY* ( maille 1 ) | 3 | 3,199571E–01 | 3,167040E–01 | –1,017 |
| *SIXX* ( maille 2 ) | 3 | 3,511707E+00 | 3,512527E+00 | 0,023 |
| *SIYY* ( maille 2 ) | 3 | –1,900098E–01 | –1,900224E–01 | 0,007 |
| *SIXX* ( maille 3 ) | 3 | 2,341138E+00 | 2,341685E+00 | 0,023 |
| *SIYY* ( maille 3 ) | 3 | –1,279828E–01 | –1,266816E–01 | –1,017 |
| *SIXX* ( maille 1 ) | 4 | 3,252919E+00 | 3,250686E+00 | –0,069 |
| *SIYY* ( maille 1 ) | 4 | 5,950074E–01 | 5,886268E–01 | –1,072 |
| *SIXX* ( maille 2 ) | 4 | 5,814267E+00 | 5,816233E+00 | 0,034 |
| *SIYY* ( maille 2 ) | 4 | –3,523377E–01 | –3,520328E–01 | –0,087 |
| *SIXX* ( maille 3 ) | 4 | 3,878832E+00 | 3,883081E+00 | 0,11 |
| *SIYY* ( maille 3 ) | 4 | –2,380030E–01 | –2,365919E–01 | –0,593 |
| *SIXX* ( maille 1 ) | 5 | 3,213822E+00 | 3,214343E+00 | 0,016 |
| *SIYY* ( maille 1 ) | 5 | 4,873069E–01 | 4,886892E–01 | 0,284 |
| *SIXX* ( maille 2 ) | 5 | 6,017834E+00 | 6,015971E+00 | –0,031 |
| *SIYY* ( maille 2 ) | 5 | 3,174572E–02 | 3,207066E–02 | 1,024 |
| *SIXX* ( maille 3 ) | 5 | 5,768340E+00 | 5,769686E+00 | 0,023 |
| *SIYY* ( maille 3 ) | 5 | –5,231355E–01 | –5,207598E–01 | –0,454 |
| *SIXX* ( maille 1 ) | 6 | 3,209297E+00 | 3,210140E+00 | 0,026 |
| *SIYY* ( maille 1 ) | 6 | 4,753345E–01 | 4,775721E–01 | 0,471 |
| *SIXX* ( maille 2 ) | 6 | 6,149462E+00 | 6,146788E+00 | –0,043 |
| *SIYY* ( maille 2 ) | 6 | 3,048490E–01 | 3,052262E–01 | 0,124 |
| *SIXX* ( maille 3 ) | 6 | 7,571241E+00 | 7,573072E+00 | 0,024 |
| *SIYY* ( maille 3 ) | 6 | –7,863557E–01 | –7,827982E–01 | –0,452 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 5.4 Remarques

Idem modélisation A concernant le nombre d'incréments sur la précision des résultats.

Le nombre d'itérations est égal à 360.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 6 Synthèse des résultats

Un nombre important d'incréments est nécessaire pour obtenir une précision correcte : pour information, dix incréments par étape de chargement ne sont pas suffisants.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)