SSNP176 – Modélisations de type D_PLAN_INCO_* en élasticité quasi-incompressible

Résumé :

L'objectif de ce test est d'apporter une vérification supplémentaire des modélisations de type D_PLAN_INCO_* sur un modèle dont on connaît la solution analytique.
Il est constitué de deux modélisations :

- Modélisation A : test sur la modélisation D_PLAN_INCO_UPO (donc sur des éléments linéaires)
- Modélisation B : test sur les modélisations D_PLAN_INCO_UP et D_PLAN_INCO_UPG (sur des éléments quadratiques)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

Le problème de référence est inspiré d'un article de F. Auricchio *et al*. [1] qui en propose une solution analytique.

1.1 Géométrie

On considère un carré de dimension $2m \times 2m$.
La géométrie peut être visualisée sur la figure 1.1-1, avec le maillage qui sera utilisé pour les deux modélisations A et B.

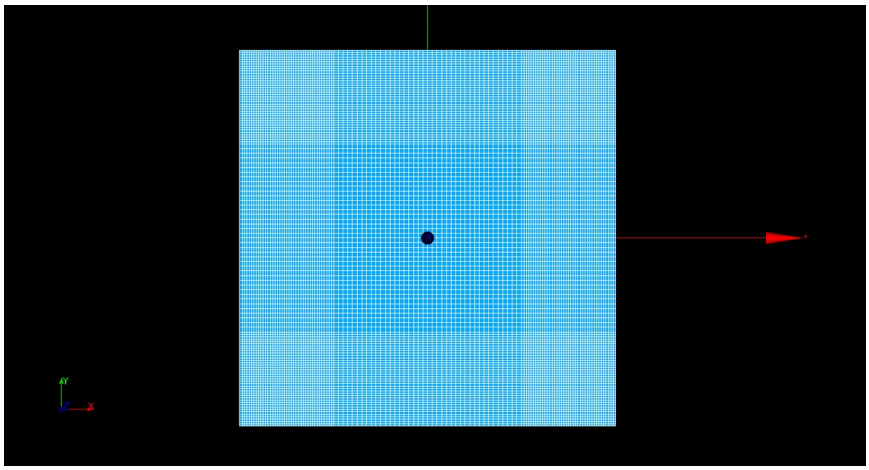


Figure 1.1-1: Géométrie et maillage

1.2 Propriétés du matériau

Le matériau est élastique quasi-incompressible, c'est-à-dire que son coefficient de Poisson tend vers 0.5 :

- Module d'élasticité : $E = 120\,Pa$
- Coefficient de Poisson : $\nu = 0.499999$

Ces valeurs peuvent paraître surprenantes mais n'ont pas de signification physique puisque le test est purement mathématique.

1.3 Conditions aux limites et chargements

On encastre les quatre bords du carré ($DX = DY = 0$), et on applique une force volumique sur l'ensemble du carré. Cette force est variable dans l'espace et a pour composantes :

$$FX = \mu\, y\left(\frac{-3}{2}x^4 + 6x^2 - 3x^2y^2 + y^2 - \frac{5}{2}\right) - 15x^2(y-1)$$

$$FY = \mu\, x\left(\frac{3}{2}y^4 - 6y^2 + 3y^2x^2 - x^2 + \frac{5}{2}\right) - 3y^2 - 5x^3$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

Les résultats de référence sont soit des valeurs de non-regression, soit les solutions analytiques en déplacement et en pression, données par les formules suivantes [1] :

$$U1=\frac{(x^2-1)^2(y^2-1)y}{4} \quad \text{et} \quad U2=\frac{(y^2-1)^2(1-x^2)x}{4}$$

$$P=5x^3(y-1)+y^3$$

2.2 Grandeurs et résultats de référence

La solution analytique donne :

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	Valeur
Nœud pt_B en $(0.5,0.5)$	$t=1s$	DX	$-0.052734375\,mm$
Nœud pt_B en $(0.5,0.5)$	$t=1s$	DY	$0.052734375\,mm$
Nœud pt_B en $(0.5,0.5)$	$t=1s$	PRES	$-0.1875\,Pa$

2.3 Incertitudes sur la solution

Cette solution de référence analytique est exacte.

2.4 Référence bibliographique

[1] *An analysis of some mixed-enhanced finite element for plane linear elasticity*, F. Auricchio, L. Beirao da Veiga, C. Lovadina, A. Reali. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 194 (2005) 2947- 2968

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation D_PLAN_INCO_UPO.

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de mailles de type QUAD4 (quadrangle linéaire), avec un total de 15360 éléments.

3.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les résultats de la modélisation par rapport à la solution de référence analytique présentée en 2, et également en non-regression. La pression n'est pas testée car ce degré de liberté n'est pas porté par les éléments d'une modélisation *_INCO_UPO .

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	VALE_REFE	Precision
Nœud pt_B en $(0.5, 0.5)$	$t=1s$	DX	$-0.052734375\,mm$	1.0E-6
Nœud pt_B en $(0.5, 0.5)$	$t=1s$	DY	$0.052734375\,mm$	1.0E-6

Identification	Type de référence
Nœud pt_B – DEPL/DX	NON_REGRESSION
Nœud pt_B – DEPL/DY	NON_REGRESSION

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise deux modélisation s différentes D_PLAN_INCO_UP et D_PLAN_INCO_UPG .

4.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de mailles de type QUAD8 (quadrangle quadratique), avec un total de 15360 éléments.

4.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les résultats de la modélisation par rapport à la solution de référence analytique présentée en 2, et également en non-regression :

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	VALE_REFE	Precision
Nœud pt_B en $(0.5, 0.5)$	$t=1s$	DX	$-0.052734375\,mm$	1.0E-6
Nœud pt_B en $(0.5, 0.5)$	$t=1s$	DY	$0.052734375\,mm$	1.0E-6
Nœud pt_B en $(0.5, 0.5)$	$t=1s$	PRES	$-0.1875\,Pa$	1.0E-6

Identification	Type de référence
Nœud pt_ B – DEPL/DX	NON_REGRESSION
Nœud pt_ B – DEPL/DY	NON_REGRESSION
Nœud pt_ B – DEPL/P	NON_REGRESSION

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Synthèse des résultats

Le modèle numérique permet de retrouver les résultats du problème de référence analytique avec une précision inférieure à 1.0E-6, quel que soit le type de modélisation utilisée D_PLAN_INCO_UP O , D_PLAN_INCO_UP ou D_PLAN_INCO_UP G .
On retiendra que ce cas test est intéressant car les problèmes incompressibles présentant une solution analytique sont rares.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)