SSNP150 – Méthode des solutions manufacturées en contact 2D et grandes déformations

Résumé :

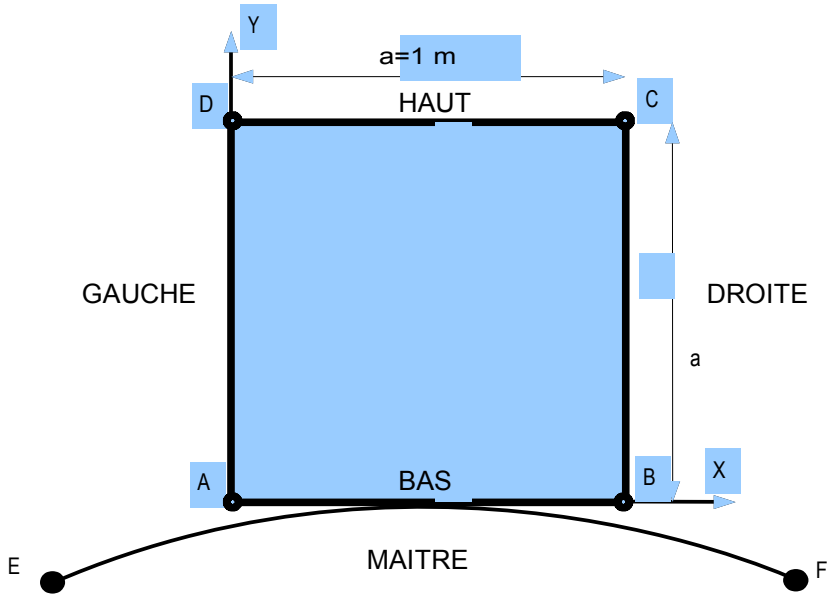
L'objectif de ce test est de vérifier la modélisation du contact 2D en grandes déformations grâce à la méthode des solutions manufacturées [bib1].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

On considère un carré de coté $1\,m$.



1.2 Propriétés du matériau

Pour les modélisations A et B :

$E=1\,MPa$	Module d'Young
$\nu=0.3$	Coefficient de Poisson

Pour les modélisations C, D, E et F :

$E=1\mathrm{MPa}$	Module d'Young
$\nu=0.$	Coefficient de Poisson

1.3 Conditions aux limites et chargements

Sur le bord HAUT , on impose un déplacement(voir paragraphe 2).
Sur les bords GAUCHE , BAS et DROITE , on impose une pression (voir paragraphe 2).
Dans tout le domaine, on impose une force de volume (voir paragraphe 2).
La surface MAITRE de nature paraboloïde est décrite par l'équation :

$$Y=-0.05\times(X-0.5)^2 \qquad (1)$$

1.4 Conditions initiales

Néant

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

La solution de référence analytique est donnée par :

$$\begin{aligned} Ux &= -0.2\times Y\times Y\times Y\times (X-0.5) \\ Uy &= -0.05\times (X-0.5)\times (X-0.5)\times (1+Y)-0.01\times Y \end{aligned} \quad (2)$$

Les conditions de Dirichlet, de Neumann et le terme source sont obtenus par la méthode des solutions manufacturées [bib1].
On commence par déterminer le gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\nabla} \underline{U} + \underline{\underline{Id}} \quad (3)$$

Connaissant la normale $\underline{N} = [0,-1]^T$ à la surface esclave dans la configuration non-déformée, on obtient son expression dans la configuration déformée par la formule de Nanson :

$$\underline{n} = \frac{\underline{\underline{F}}^{-T}\underline{N}}{\|\underline{\underline{F}}^{-T}\underline{N}\|} \quad (4)$$

Connaissant le tenseur de Hooke $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$ et le tenseur de Green-Lagrange $\underline{\underline{E}}$, on calcule le second tenseur de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{S}}$:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{Id}}) \quad (5)$$

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{E}} \quad (6)$$

On rappelle que le second tenseur de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{S}}$ permet d'obtenir des efforts en configuration non déformée par unité de surface non déformée :

$$\frac{d\,\underline{f}_0}{dA} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{N} \quad (7)$$

Comme nous cherchons à déterminer des efforts en configuration déformée, nous allons déterminer le premier tenseur de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\Pi}}$

$$\underline{\underline{\Pi}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \quad (8)$$

On peut ainsi déterminer les forces de volume $\underline{f}_{vol}$:

$$\underline{f}_{vol} = -div\,\underline{\underline{\Pi}} \quad (9)$$

Connaissant la normale en configuration initiale sur les différentes faces et le premier tenseur de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\Pi}}$, on peut calculer les efforts de surface en configuration déformée :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\underline{f}_{surf} = \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{N} \tag{10}$$

Sur la surface BAS qui est en contact, il faut un traitement particulier. En effet, les efforts normaux y sont pris en compte par le contact :

$$\begin{aligned} \underline{f}_{surf}^{BAS} &= \underline{f}_{surf_n}^{BAS} + \underline{f}_{surf_t}^{BAS} \\ &= \underline{f}_{contact} + \underline{f}_{surf_t}^{BAS} \\ &= p * \underline{n} + \underline{f}_{surf_t}^{BAS} \end{aligned} \tag{11}$$

Où p désigne la pression de contact. Elle peut être déterminée par l'expression :

$$p = (\underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{N}) \cdot \underline{n} \tag{12}$$

Il ne faut donc y appliquer que les efforts tangentiels. On les calcule par l'expression :

$$\begin{aligned} \underline{f}_{surf_t}^{BAS} &= \underline{f}_{surf}^{BAS} - \underline{f}_{surf_n}^{BAS} \\ &= \underline{f}_{surf}^{BAS} - (\underline{f}_{surf_n}^{BAS} \cdot \underline{n})\,\underline{n} \end{aligned} \tag{13}$$

Concernant les efforts de contact, *il est absolument indispensable de construire la solution manufacturée de manière à ce qu'ils vérifient les équations du contact* [bib2], à savoir :

$$\begin{aligned} gap(\underline{U}) &\geqslant 0 \\ p &\leqslant 0 \\ p \cdot gap(\underline{U}) &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

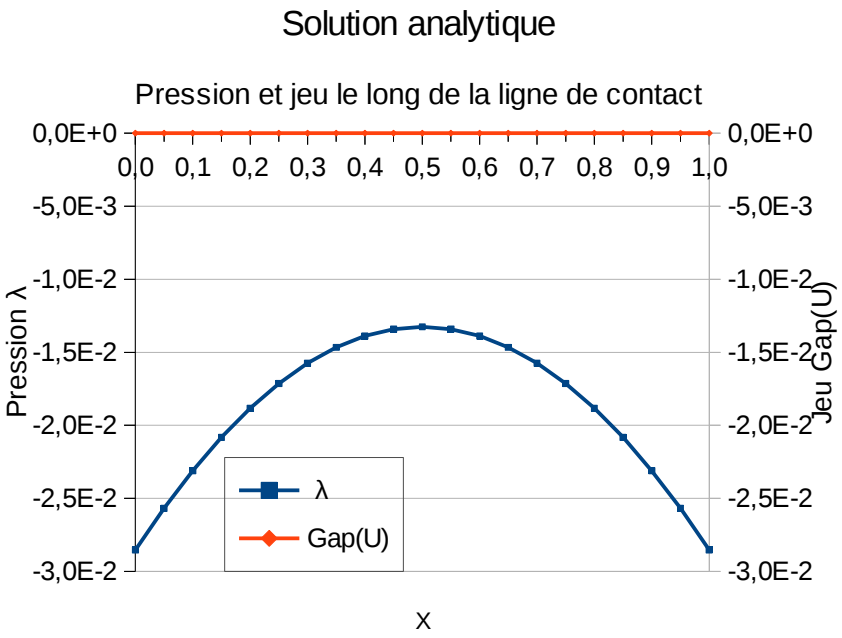


Figure 2.1-1: vérification a postérori de la validité de la solution

Cette vérification se fait après avoir calculé de façon analytique la pression et le saut de déplacement associés à la solution manufacturée, en général avec un outil de calcul formel (en l'occurence, il s'agit

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

du module Python *sympy*). On doit alors les visualiser, afin de vérifier *rétrospectivement* que la solution que l'on a contruite vérifie bien (14). Dans le cas de ce test, nous avons représenté pression et saut de déplacement analytiques en fig.2.1-1. On remarque qu'il vérifient $p<0$ et $\mathrm{gap}(\underline{U})=0$, ce qui est caractéristique d'une surface entièrement contactante, et conforme à (14).

2.2 Grandeurs et résultats de référence

La valeur de l'écart entre solutions analytique et calculée sur le maillage : $\sum^{\text{noeuds } n} |\underline{U}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{calc}} - \underline{U}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{ref}}|$.

Dans le cas des modélisations qui réalisent une analyse de convergence avec la finesse du maillage, la vitesse de convergence avec la finesse du maillage de la solution calculée vers la solution analytique en norme L_2 :

– le plus grand réel $\alpha_U>0$ tel que $\|\underline{U}^{\mathrm{calc}} - \underline{U}^{\mathrm{ref}}\|_{0,\Omega} < C_U \times h^{\alpha_U}$ où C_U est indépendant de h pour le déplacement;

– le plus grand réel $\alpha_p>0$ tel que $\|p^{\mathrm{calc}} - p^{\mathrm{ref}}\|_{0,\Gamma_c} < C_p \times h^{\alpha_p}$ où C_p est indépendant de h pour la pression de contact.

2.3 Incertitudes sur la solution

Aucune

2.4 Références bibliographiques

1 Document U2.08.08, Utilisation de la Méthode des Solutions Manufacturées pour la validation logicielle, Documentation U2 de Code_Aster

2 Document R5.03.50, Formulation discrète du contact-frottement, Documentation R de Code_Aster

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation D_PLAN.

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage contient 65 éléments de type SEG3 et 256 éléments de type QUAD8.
La surface maître courbe est représentée par un unique SEG3 .

3.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la somme des valeurs absolues de l'écart entre la solution calculée et la solution analytique.

Identification	Type de référence	Valeur de référence
$\sum_{n}^{\text{noeuds}} \lvert \underline{U}_{n}^{\text{calc}} - \underline{U}_{n}^{\text{ref}} \rvert$	'NON_REGRESSION'	4.03888411513E-05

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation D_PLAN.

4.2 Caractéristiques du maillage

On réalise une étude de convergence avec la finesse du maillage de la solution calculée vers la solution analytique. Une suite de maillages obtenus par raffinement uniforme à l'aide de la commande MACR_ADAP_MAIL est utilisée :

- maillage 0 : 5 SEG3, 1 QUAD8
- maillage 1 : 9 SEG3, 4 QUAD8
- maillage 2 : 17 SEG3, 16 QUAD8
- maillage 3 : 32 SEG3, 64 QUAD8
- maillage 4 : 64 SEG3, 256 QUAD8

La surface maître courbe est représentée par un unique SEG3 .

4.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la vitesse de convergence avec la finesse du maillage de la solution calculée vers la solution analytique en norme L_2 :

– le plus grand réel $\alpha_U>0$ tel que $\|\underline{U}^{\text{calc}}-\underline{U}^{\text{ref}}\|_{0,\Omega}<C_U\times h^{\alpha_U}$ où C_U est indépendant de h pour le déplacement;

– le plus grand réel $\alpha_p>0$ tel que $\|p^{\text{calc}}-p^{\text{ref}}\|_{0,\Gamma_C}<C_p\times h^{\alpha_p}$ où C_p est indépendant de h pour la pression de contact.

On teste aussi la somme des valeurs absolues de l'écart entre la solution calculée et la solution analytique pour le déplacement.

Identification	Type de référence	Valeur de référence
$\sum^{\text{noeuds } n} \lvert\underline{U}_{\text{n}}^{\text{calc}}-\underline{U}_{\text{n}}^{\text{ref}}\rvert$	'NON_REGRESSION'	6.62799356621E-07
α_U	'ANALYTIQUE'	3.0
α_p	'ANALYTIQUE'	2.5
α_p	'NON_REGRESSION'	2.8035

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation D_PLAN avec le type d'élément TRIA3 et la méthode LAC de traitement du contact.

5.2 Caractéristiques du maillage

On réalise une étude de convergence avec la finesse du maillage de la solution calculée vers la solution analytique. Une suite de maillages obtenus par raffinement uniforme à l'aide de la commande MACR_ADAP_MAIL est utilisée :

- maillage 0 : 10 SEG2, 10 TRIA3
- maillage 1 : 20 SEG2, 36 TRIA3
- maillage 2 : 40 SEG2, 136 TRIA3
- maillage 3 : 80 SEG2, 1528 TRIA3
- maillage 4 : 160 SEG2, 2080 TRI3
- maillage 5 : 320 SEG2, 8256 TRI3

La surface MAITRE courbe est représentée par un unique SEG3 .

5.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la vitesse de convergence avec la finesse du maillage de la solution calculée vers la solution analytique en norme L_2 :

– le plus grand réel $\alpha_U > 0$ tel que $\|\underline{U}^{\text{calc}} - \underline{U}^{\text{ref}}\|_{0,\Omega} < C_U \times h^{\alpha_U}$ où C_U est indépendant de h pour le déplacement;

– le plus grand réel $\alpha_p > 0$ tel que $\|p^{\text{calc}} - p^{\text{ref}}\|_{0,\Gamma_c} < C_p \times h^{\alpha_p}$ où C_p est indépendant de h pour la pression de contact.

Identification	Type de référence	Valeur de référence
α_U	'ANALYTIQUE'	2.0
α_p	'ANALYTIQUE'	0.5

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation D_PLAN avec le type d'élément TRIA6 et la méthode LAC de traitement du contact.

6.2 Caractéristiques du maillage

On réalise une étude de convergence avec la finesse du maillage de la solution calculée vers la solution analytique. Une suite de maillages obtenus par raffinement uniforme à l'aide de la commande MACR_ADAP_MAIL est utilisée :

- maillage 0 : 8 SEG3, 8 TRIA6
- maillage 1 : 16 SEG3, 32 TRIA6
- maillage 2 : 32 SEG3, 128 TRIA6
- maillage 3 : 64 SEG3, 512 TRIA6
- maillage 4 : 128 SEG3, 2048 TRI6
- maillage 5 : 256 SEG3, 8192 TRI6

La surface MAITRE courbe est représentée par un unique SEG3 .

6.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la vitesse de convergence avec la finesse du maillage de la solution calculée vers la solution analytique en norme L_2 :

– le plus grand réel $\alpha_U > 0$ tel que $\|\underline{U}^{\text{calc}} - \underline{U}^{\text{ref}}\|_{0,\Omega} < C_U \times h^{\alpha_U}$ où C_U est indépendant de h pour le déplacement;

– le plus grand réel $\alpha_p > 0$ tel que $\|p^{\text{calc}} - p^{\text{ref}}\|_{0,\Gamma_c} < C_p \times h^{\alpha_p}$ où C_p est indépendant de h pour la pression de contact.

Identification	Type de référence	Valeur de référence
α_U	'ANALYTIQUE'	2.5
α_p	'ANALYTIQUE'	1.0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation D_PLAN avec le type d'élément QUAD4 et la méthode LAC de traitement du contact.

7.2 Caractéristiques du maillage

On réalise une étude de convergence avec la finesse du maillage de la solution calculée vers la solution analytique. Une suite de maillages obtenus par raffinement uniforme à l'aide de la commande MACR_ADAP_MAIL est utilisée :

- maillage 0 : 6 SEG2, 4 QUAD4
- maillage 1 : 12 SEG2, 10 QUAD4
- maillage 2 : 24 SEG2, 28 QUAD4
- maillage 3 : 48 SEG2, 88 QUAD4
- maillage 4 : 96 SEG2, 304 QUAD4
- maillage 5 : 192 SEG2, 1120 QUAD4

La surface MAITRE courbe est représentée par un unique SEG3 .

7.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la vitesse de convergence avec la finesse du maillage de la solution calculée vers la solution analytique en norme L_2 :

– le plus grand réel $\alpha_U > 0$ tel que $\|\underline{U}^{\text{calc}} - \underline{U}^{\text{ref}}\|_{0,\Omega} < C_U \times h^{\alpha_U}$ où C_U est indépendant de h pour le déplacement;

– le plus grand réel $\alpha_p > 0$ tel que $\|p^{\text{calc}} - p^{\text{ref}}\|_{0,\Gamma_c} < C_p \times h^{\alpha_p}$ où C_p est indépendant de h pour la pression de contact.

Identification	Type de référence	Valeur de référence
α_U	'ANALYTIQUE'	2.0
α_p	'ANALYTIQUE'	0.5

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Modélisation f

8.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation D_PLAN avec le type d'élément QUAD8 et la méthode LAC de traitement du contact.

8.2 Caractéristiques du maillage

On réalise une étude de convergence avec la finesse du maillage de la solution calculée vers la solution analytique. Une suite de maillages obtenus par raffinement uniforme à l'aide de la commande MACR_ADAP_MAIL est utilisée :

- maillage 0 : 4 SEG2, 1 QUAD8
- maillage 1 : 8 SEG2, 4 QUAD8
- maillage 2 : 16 SEG2, 16 QUAD8
- maillage 3 : 32 SEG2, 64 QUAD8
- maillage 4 : 64 SEG2, 256 QUAD8
- maillage 5 : 128 SEG2, 1024 QUAD8

La surface MAITRE courbe est représentée par un unique SEG3 .

8.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la vitesse de convergence avec la finesse du maillage de la solution calculée vers la solution analytique en norme L_2 :

– le plus grand réel $\alpha_U > 0$ tel que $\|\underline{U}^{\text{calc}} - \underline{U}^{\text{ref}}\|_{0,\Omega} < C_U \times h^{\alpha_U}$ où C_U est indépendant de h pour le déplacement;

– le plus grand réel $\alpha_p > 0$ tel que $\|p^{\text{calc}} - p^{\text{ref}}\|_{0,\Gamma_c} < C_p \times h^{\alpha_p}$ où C_p est indépendant de h pour la pression de contact.

Identification	Type de référence	Valeur de référence
α_U	'ANALYTIQUE'	2.5
α_p	'ANALYTIQUE'	1.0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Synthèse des résultats

Les résultats sont en très bon accord avec la théorie.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)