SSNP130 - Détection des singularités dans une plaque fissurée

Résumé :

Le but de ce test est de tester la détection des singularités dans une plaque fissurée ainsi que le calcul de carte de taille (pour une erreur cible donnée).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

La géométrie est une plaque fissurée dont on ne modélise que la partie supérieure.

1.2 Propriétés du matériau

Le massif est constitué d'un matériau élastique isotrope linéaire :

- Elasticité isotrope Module d'Young : $E=200000\,Pa$
- Coefficient de Poisson : $\nu=0,3$

1.3 Conditions aux limites et chargements

On impose une pression unitaire sur le haut de la plaque.

Pour des raisons de symétrie, le ligament de la fissure est bloqué selon l'axe Y et le nœud en bout de ligament est bloqué selon l'axe X.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

Lorsque la solution exacte du problème étudié présente des singularités, l'ordre de convergence de la solution éléments finis est modifié. Considérons, par exemple, un problème d'élasticité plane discrétisé avec des éléments triangulaires de degré p .
Si la solution exacte U_{ex} est régulière, on sait que ([bib1]) :

$$\|u-u_h\|_\Omega=\|e\|_\Omega\leq C\,h^p \qquad \text{éq 2.1-1}$$

Avec C une constante, h la taille des éléments.

Où $\|e\|_\Omega\leq C\,h^p$ est la contribution à l'erreur en énergie, soit :

$$\|e\|_\Omega\leq\frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon\left(e_h\right)\ K\ \varepsilon\left(e_h\right)d\Omega \qquad \text{éq 2.1-2}$$

Par contre, si la solution exacte présente une singularité, par exemple si, localement au voisinage d'un point M_0 , le champ de déplacement est de la forme (avec r et θ coordonnées polaires au voisinage du point M_0) :

$$U_{ex}=r^\alpha V\left(\theta\right)+W \text{ avec } 0<\alpha<1 \qquad \text{éq 2.1-3}$$

Avec V une fonction de θ et W une constante.

Alors, on montre que [bib1] :

$$\|e_h\|_\Omega\leq C\,h^\alpha \qquad \text{éq 2.1-4}$$

Il en résulte que le taux de convergence de l'erreur globale en énergie devient indépendant du degré p des éléments finis utilisés et il en est de même de celui de la mesure de l'erreur (par exemple, si $p=1$ ou $p=2$ alors $\alpha=1/2$ pour une fissure).

Ainsi, en pointe de fissure l'ordre de la singularité vaudra 0.5, et loin de la singularité (là où la solution élément finis est régulière l'ordre de la singularité vaut p (1 pour les éléments linéaires, 2 pour les éléments quadratiques)

2.2 Grandeurs et résultats de référence

On va tester la valeur de la singularité en pointe de fissure (solution analytique), dans son voisinage (non-régression) et loin de la fissure (solution analytique).

On teste également le rapport de taille à appliquer au maillage pour une erreur cible (non-régression) et la nouvelle taille des éléments (non-régression).

On note que pour la modélisation A, l'erreur cible est l'erreur (en quantité d'intérêt) sur déplacement moyen sur la structure. Pour les autres modélisations, l'erreur utilisée est l'erreur en norme de l'énergie.

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique et non-régression

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.4 Références bibliographiques

[1] STRANG & FIX : An analysis of the finite element method, Prentice hall, 1976.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

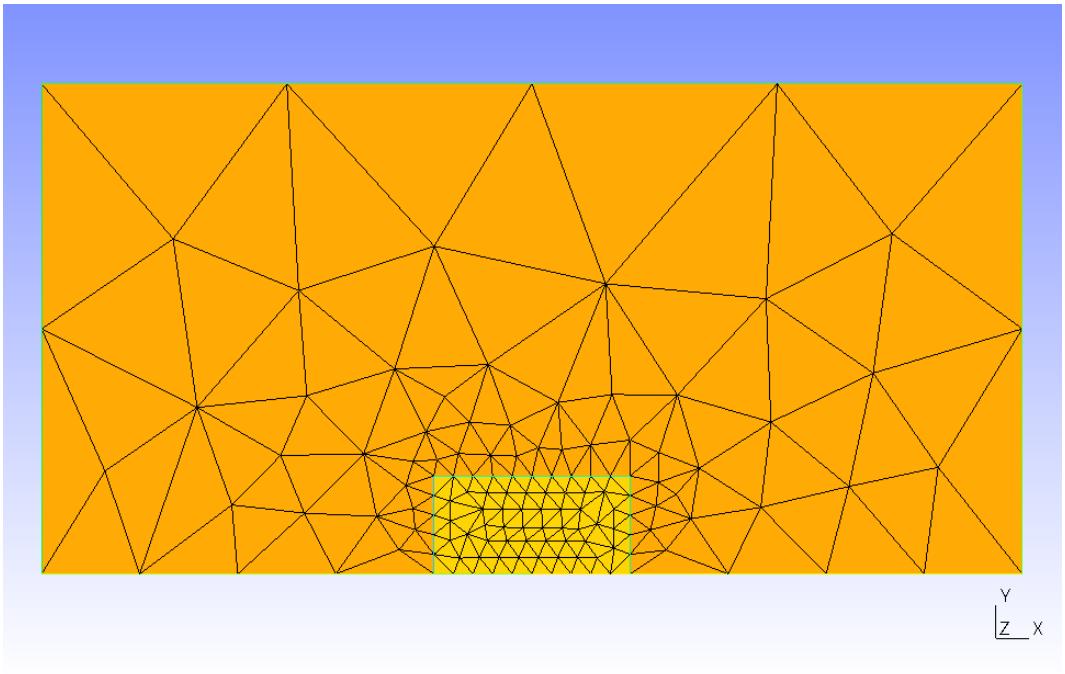
3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation est bidimensionnelle élastique à contraintes planes C_PLAN.

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds	136
Nombre de SEG2	46
Nombre de TRIA3	244



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 Grandeurs testées et résultats

Champ SING_ELEM :

Identification	Instant	Type	Référence	Tolérance
DEGRE MAX	1.0	'ANALYTIQUE'	1.0	1.0E-04%
DEGRE MIN	1.0	'ANALYTIQUE'	0.5	1.0E-04%
RAPPORT MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	7.3626	0.20%
RAPPORT MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	1.0310	0.20%
TAILLE MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	1.6918	0.20%
TAILLE MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.0295	0.20%

Identification	Instant	Type	Référence	Tolérance
DEGRE M142	1.0	'NON_REGRESSION'	0.687	0.20%
DEGRE M143	1.0	'NON_REGRESSION'	0.5	1.0E-04%
DEGRE M144	1.0	'NON_REGRESSION'	0.5	1.0E-04%
DEGRE M145	1.0	'NON_REGRESSION'	0.5	1.0E-04%
DEGRE M146	1.0	'NON_REGRESSION'	0.5842	1.5%
DEGRE M189	1.0	'NON_REGRESSION'	0.6870	0.20%
DEGRE M190	1.0	'NON_REGRESSION'	0.6870	0.20%
DEGRE M191	1.0	'NON_REGRESSION'	0.5842	1.5%

Champ SING_ELNO :

Identification	Instant	Type	Référence	Tolérance
DEGRE MAX	1.0	'ANALYTIQUE'	1.0	1.0E-04%
DEGRE MIN	1.0	'ANALYTIQUE'	0.5	1.0E-04%
RAPPORT MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	7.3626	0.20%
RAPPORT MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	1.0310	0.20%
TAILLE MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	1.6918	0.20%
TAILLE MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.0295	0.20%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

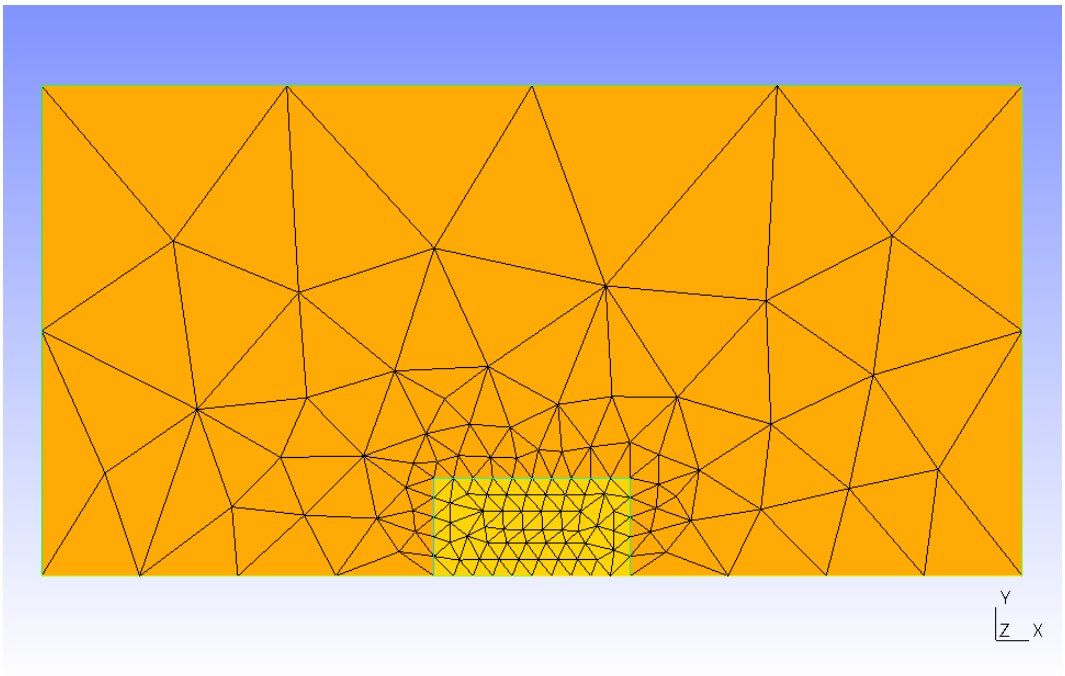
4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation est bidimensionnelle élastique à contraintes planes C_PLAN.

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds	515
Nombre de SEG3	46
Nombre de TRIA6	244



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Grandeurs testées et résultats

Champ SING_ELEM :

Identification	Instant	Type	Référence	Tolérance
DEGRE MAX	1.0	'ANALYTIQUE'	2.0	1.0%
DEGRE MIN	1.0	'ANALYTIQUE'	0.5	1.0%
RAPPORT MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	2.52	2.0%
RAPPORT MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.2150	2.0%
TAILLE MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	4.48	2.0%
TAILLE MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.0861	2.0%

Identification	Instant	Type	Référence	Tolérance
DEGRE M142	1.0	'NON_REGRESSION'	0.750	1.0%
DEGRE M143	1.0	'NON_REGRESSION'	0.5	1.0%
DEGRE M144	1.0	'NON_REGRESSION'	0.5	1.0%
DEGRE M145	1.0	'NON_REGRESSION'	0.5	1.0%
DEGRE M146	1.0	'NON_REGRESSION'	0.550	2.0%
DEGRE M189	1.0	'NON_REGRESSION'	0.750	1.0%
DEGRE M190	1.0	'NON_REGRESSION'	0.750	1.0%
DEGRE M191	1.0	'NON_REGRESSION'	0.550	2.0%
DEGRE M192	1.0	'NON_REGRESSION'	0.550	2.0%
DEGRE M193	1.0	'NON_REGRESSION'	0.550	2.0%

Champ SING_ELNO :

Identification	Instant	Type	Référence	Tolérance
DEGRE MAX	1.0	'ANALYTIQUE'	2.0	1.0%
DEGRE MIN	1.0	'ANALYTIQUE'	0.5	1.0%
RAPPORT MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	2.52	2.0%
RAPPORT MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.216	2.0%
TAILLE MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	4.48	2.0%
TAILLE MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.0860	0.20%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

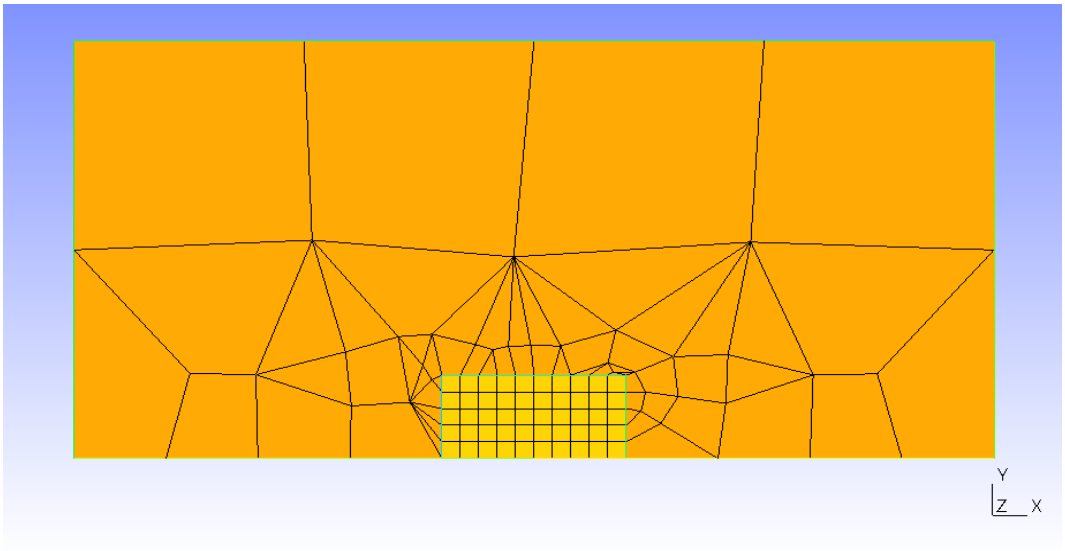
5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation est bidimensionnelle élastique à contraintes planes C_PLAN.

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds	111
Nombre de SEG2	46
Nombre de TRIA3	26
Nombre de QUAD4	84



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.3 Grandeurs testées et résultats

Champ SING_ELEM :

Identification	Instant	Type	Référence	Tolérance
DEGRE MAX	1.0	'ANALYTIQUE'	1.0	1.0%
DEGRE MIN	1.0	'ANALYTIQUE'	0.5	1.0%
RAPPORT MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	2.17	2.0%
RAPPORT MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.167	2.0%
TAILLE MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	4.59	2.0%
TAILLE MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.2	2.0%

Identification	Instant	Type	Référence	Tolérance
DEGRE M30	1.0	'NON_REGRESSION'	0.750	1.0%
DEGRE M31	1.0	'NON_REGRESSION'	0.5	1.0%
DEGRE M32	1.0	'NON_REGRESSION'	0.5	1.0%
DEGRE M55	1.0	'NON_REGRESSION'	0.780	1.0%
DEGRE M56	1.0	'NON_REGRESSION'	0.6	1.0%
DEGRE M57	1.0	'NON_REGRESSION'	0.6	1.0%

Champ SING_ELNO :

Identification	Instant	Type	Référence	Tolérance
DEGRE MAX	1.0	'ANALYTIQUE'	1.0	1.0%
DEGRE MIN	1.0	'ANALYTIQUE'	0.5	1.0%
RAPPORT MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	2.17	2.0%
RAPPORT MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.167	2.0%
TAILLE MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	4.59	2.0%
TAILLE MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.205	2.0%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

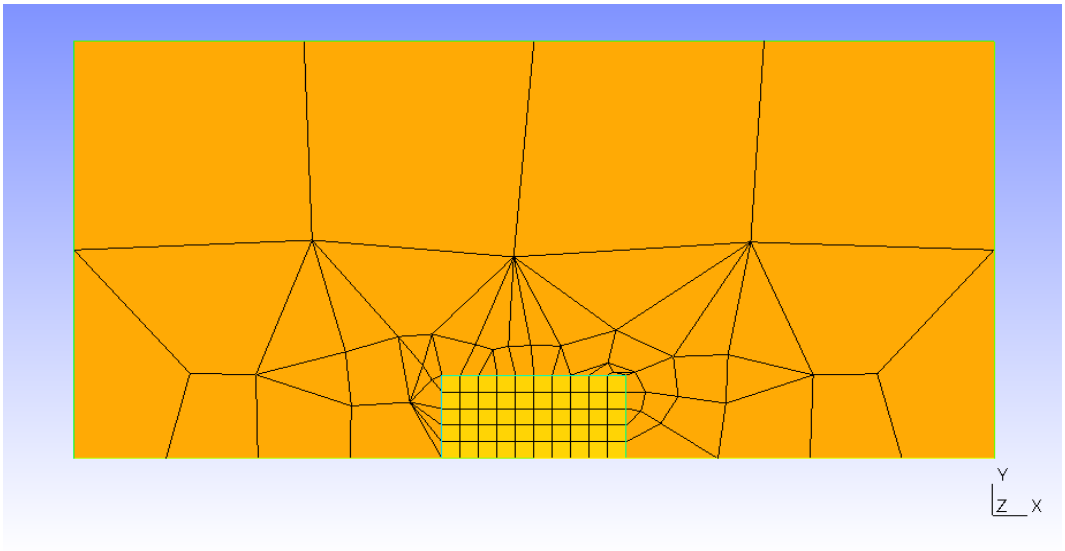
6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation est bidimensionnelle élastique à contraintes planes C_PLAN.

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds	331
Nombre de SEG3	46
Nombre de TRIA6	26
Nombre de QUAD8	84



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6.3 Grandeurs testées et résultats

Champ SING_ELEM :

Identification	Instant	Type	Référence	Tolérance
DEGRE MAX	1.0	'ANALYTIQUE'	2.0	1.0%
DEGRE MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.51	1.0%
RAPPORT MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	1.15	2.0%
RAPPORT MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.16	2.0%
TAILLE MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	4.56	2.0%
TAILLE MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.259	2.0%

Identification	Instant	Type	Référence	Tolérance
DEGRE M30	1.0	'NON_REGRESSION'	0.81	1.0%
DEGRE M31	1.0	'NON_REGRESSION'	0.51	1.0%
DEGRE M32	1.0	'NON_REGRESSION'	0.51	1.0%
DEGRE M33	1.0	'NON_REGRESSION'	0.650	1.0%
DEGRE M55	1.0	'NON_REGRESSION'	0.84	1.0%
DEGRE M56	1.0	'NON_REGRESSION'	0.6	1.0%
DEGRE M57	1.0	'NON_REGRESSION'	0.6	1.0%
DEGRE M58	1.0	'NON_REGRESSION'	0.7	2.0%

Champ SING_ELNO :

Identification	Instant	Type	Référence	Tolérance
DEGRE MAX	1.0	'ANALYTIQUE'	2.0	1.0%
DEGRE MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.51	1.0%
RAPPORT MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	1.15	2.0%
RAPPORT MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.16	2.0%
TAILLE MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	4.56	2.0%
TAILLE MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.259	2.0%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

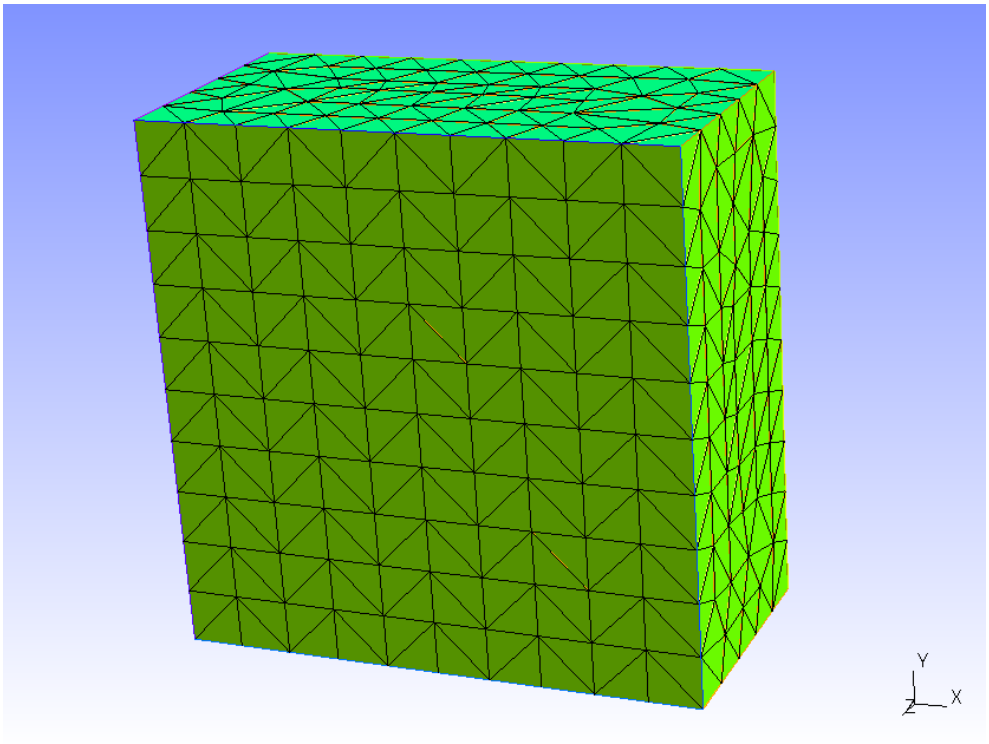
7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation est tridimensionnelle élastique 3D.

7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds	796
Nombre de SEG2	120
Nombre de TRIA3	868
Nombre de TETRA4	3261



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7.3 Grandeurs testées et résultats

Champ SING_ELEM :

Identification	Instant	Type	Référence	Tolérance
DEGRE MAX	1.0	'ANALYTIQUE'	1.0	1.0%
DEGRE MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.56	1.0%
RAPPORT MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	2.77	2.0%
RAPPORT MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.155	2.0%
TAILLE MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	9.1	2.0%
TAILLE MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.44	2.0%

Champ SING_ELNO :

Identification	Instant	Type	Référence	Tolérance
DEGRE MAX	1.0	'ANALYTIQUE'	1.0	1.0%
DEGRE MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.56	1.0%
RAPPORT MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	2.77	1.0%
RAPPORT MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.155	1.0%
TAILLE MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	2.77	1.0%
TAILLE MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.155	1.0%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

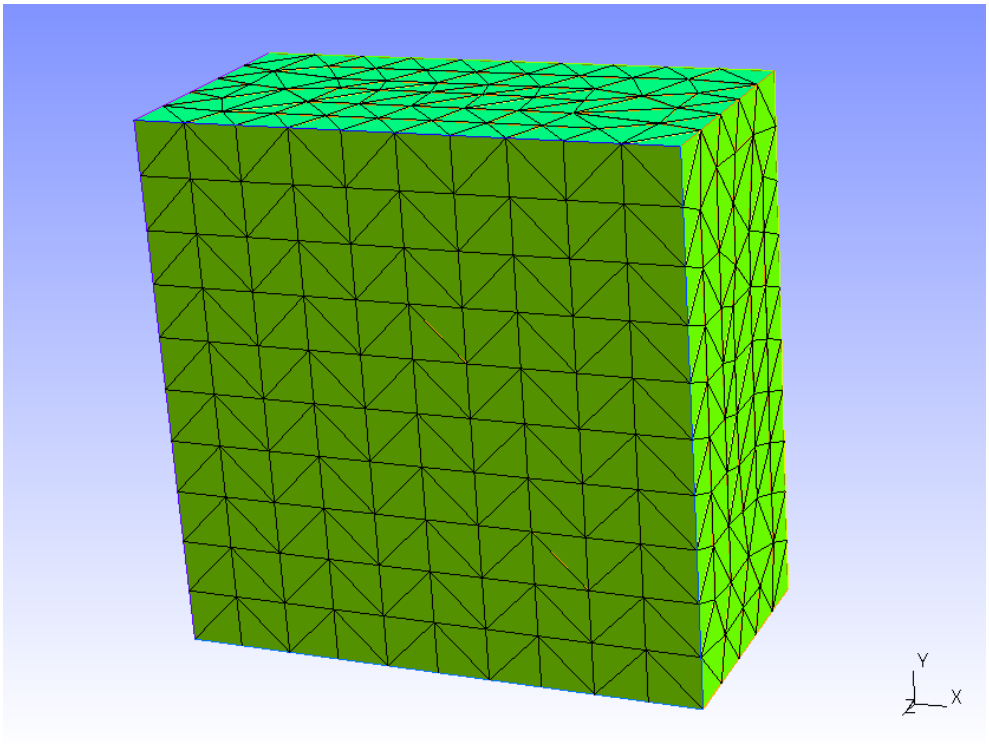
8 Modélisation F

8.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation est tridimensionnelle élastique 3D.

8.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds	5286
Nombre de SEG3	120
Nombre de TRIA6	868
Nombre de TETRA10	3261



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8.3 Grandeurs testées et résultats

Champ SING_ELEM :

Identification	Instant	Type	Référence	Tolérance
DEGRE MAX	1.0	'ANALYTIQUE'	2.0	1.0E-04%
DEGRE MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.5604	1.0E-04%
RAPPORT MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	2.65	1.0E-04%
RAPPORT MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.2169	1.0E-04%
TAILLE MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	6.5176	1.0E-04%
TAILLE MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.4940	1.0E-04%

Champ SING_ELNO :

Identification	Instant	Type	Référence	Tolérance
DEGRE MAX	1.0	'ANALYTIQUE'	2.0	1.0E-04%
DEGRE MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.5604	1.0E-04%
RAPPORT MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	2.6526	1.0E-04%
RAPPORT MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.2169	1.0E-04%
TAILLE MAX	1.0	'NON_REGRESSION'	6.5176	1.0E-04%
TAILLE MIN	1.0	'NON_REGRESSION'	0.4940	1.0E-04%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus sont en cohérence avec les solutions analytiques. Ils permettent de valider ce calcul en $2D$ et en $3D$ pour des éléments linéaires et quadratiques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)