SSNP108 - Élément de béton précontraint en compression

Résumé :

On considère une structure élémentaire constituée d'une plaque de béton carrée traversée par un câble de précontrainte dont la fibre neutre est confondue avec l'axe de symétrie horizontal de la plaque. Le bord vertical gauche de la plaque est fixe. Le câble est mis en traction à ses deux extrémités afin de pré-contraindre la plaque en compression. Les pertes de tension le long du câble sont négligées.

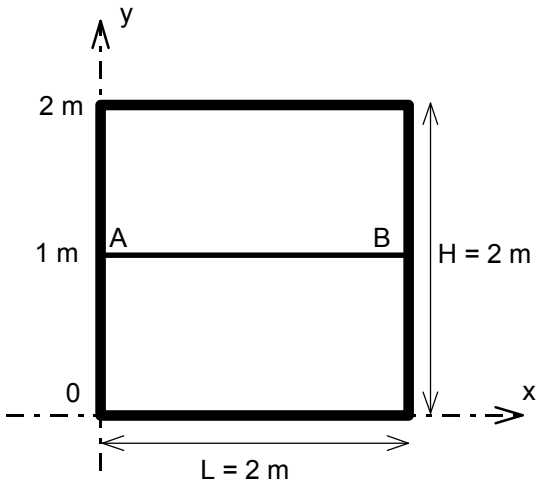
Le but de ce cas-test est de valider, sur une configuration simple, la méthode de calcul de l'état d'équilibre d'une structure de béton précontrainte. Les résultats sont validés par comparaison à une solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

La plaque de béton est carrée ; les côtés ont même longueur $L=H=2\,m$.
L'épaisseur de la plaque vaut $e=0{,}6\,m$.
Le câble traverse la plaque horizontalement, à mi-hauteur, sans excentricité dans l'épaisseur. L'aire de la section droite du câble vaut $S_a=1{,}5.10^{-4}m^2$.



1.2 Propriétés des matériaux

Matériau béton constituant la plaque : Module d'Young $E_b=3.10^{10}Pa$
Matériau acier constituant le câble : Module d'Young $E_a=2{,}1.10^{11}Pa$

Le coefficient de Poisson est pris égal à 0 pour les deux matériaux ; on privilégie ainsi la direction d'application de l'effort normal (direction x).

Les pertes de tension étant négligées, les divers paramètres servant à leur estimation sont fixés à 0.

1.3 Conditions aux limites et chargements

Le sommet inférieur du bord gauche de la plaque, c'est-à-dire le nœud origine $(0;0)$, est encastré : tous les degrés de liberté de translation et de rotation sont bloqués.
Le sommet supérieur de ce même bord gauche, c'est-à-dire le nœud $(0;2)$, est appuyé bi-latéralement : les degrés de liberté de translation bloqués sont DX et DZ .

On applique aux deux extrémités du câble (qui sont fixés sur le béton en A et B) un effort normal de traction : $(-F_0;0)$ au nœud A $(0;1)$ et $(F_0;0)$ au nœud B $(2;1)$, avec $F_0=2.10^5\,N$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Solution formelle

Les déplacements dans le câble et dans le béton sont continus et homogènes. Ainsi le déplacement horizontal sur l'intervalle $[0;L]$ vaut $u(x)=\frac{u_L}{L}x$

Les contraintes normales dans la plaque de béton et le câble d'acier s'écrivent respectivement (hypothèse d'élasticité) :

$$\begin{cases}\sigma_b=E_b\frac{\partial u}{\partial x}=E_b\frac{u_L}{L}\\ \sigma_a=E_a\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_0=E_a\frac{u_L}{L}+\sigma_0\end{cases}$$

où $\sigma_0=\frac{F_0}{S_a}$ est la précontrainte initiale dans le câble

et u_L est le déplacement horizontal à l'abscisse L.

L'équilibre de l'ensemble plaque et câble s'écrit : $\sigma_b S_b+\sigma_a S_a=0\Rightarrow u_L=\frac{-LF_0}{E_b e H+E_a S_a}$

L'effort normal dans le câble vaut : $N_a=E_a S_a\frac{u_L}{F}+F_0=F_0\frac{E_b e H}{E_b e H+E_a S_a}$

L'effort total sur la section verticale de la plaque de béton vaut :

$$N_b=E_b e H\frac{u_L}{L}=-F_0\frac{E_b e H}{E_b e H+E_a S_a}$$

On en déduit la densité linéique d'effort normal sur la plaque de béton

$$N_{xx}=-F_0\frac{E_b e}{E_b e H+E_a S_a}$$

2.2 Valeurs numériques de référence

Les valeurs numériques de référence sont :

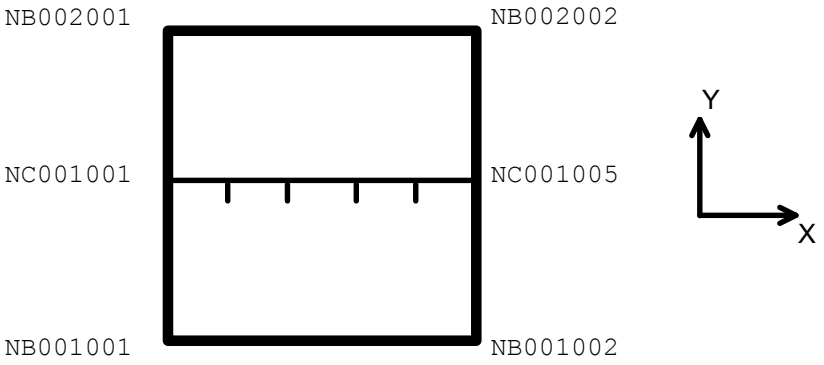
$$u_L=-1{,}11013974.10^{-5}\,m$$
$$N_a=1{,}99825153.10^{5}\,N$$
$$N_b=-1{,}99825153.10^{5}\,N$$
$$N_{xx}=-9{,}99125765.10^{4}\,N/m$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

La figure ci-dessous donne une représentation simplifiée du maillage.



La plaque de béton est représentée par un élément DKT, supporté par une maille quadrangle à 4 nœuds.

Une épaisseur $e=0,6\,m$ lui est affectée, ainsi qu'un matériau béton pour lequel sont définis les comportements ELAS (module d'Young $E_b=3.10^{10}Pa$) et BPEL_BETON : les paramètres caractéristiques de cette relation sont fixés à 0 car on néglige les pertes de tension le long du câble de précontrainte.

Le nœud $NB001001$ est encastré : DX, DY, DZ, DRX, DRY et DRZ sont bloqués. Le nœud $NB002001$ est appuyé bi-latéralement : DX et DZ sont bloqués.

Le câble est représenté par 4 éléments MECA_BARRE, supportés par 4 mailles segments à 2 nœuds.

Une aire de section droite $S_a=1,5.10^{-4}m^2$ leur est affectée, ainsi qu'un matériau acier pour lequel sont définis les comportements ELAS (module d'Young $E_a=2,1.10^{11}Pa$) et BPEL_ACIER : les paramètres caractéristiques de cette relation sont fixés à 0 (pertes de tension négligées), à l'exception de la contrainte limite élastique pour laquelle une valeur nulle est illicite ($f_{prg}=1,77.10^9\,Pa$).

La tension $F_0=2.10^5\,N$ est appliquée aux nœuds $NC001001$ et $NC001005$. Cette valeur de tension est cohérente avec les valeurs de section et de limite élastique, pour un câble de précontrainte de type toron.

Le calcul de l'état d'équilibre de l'ensemble plaque et câble est effectué en un seul pas, le comportement étant élastique.

3.2 Étapes de calcul et fonctionnalités testées

Les principales étapes de calcul correspondent aux fonctionnalités que l'on souhaite valider :

- opérateur DEFI_MATERIAU : définition des relations de comportement BPEL_BETON et BPEL_ACIER, dans le cas particulier où les pertes de tension le long du câble de précontrainte sont négligées (valeurs par défaut des paramètres) ;
- opérateur DEFI_CABLE_BP : détermination d'un profil de tension constant le long du câble de précontrainte, les pertes étant négligées ; calcul des coefficients des relations cinématiques entre les degrés de liberté des nœuds du câble et les degrés de liberté des nœuds «voisins» de la plaque de béton ;
- opérateur AFFE_CHAR_MECA : définition d'un chargement de type RELA_CINE_BP ;

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- opérateur STAT_NON_LINE, option COMPORTEMENT : calcul de l'état d'équilibre en tenant compte du chargement de type RELA_CINE_BP.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

4.1.1 Densité linéique d'effort normal sur la section verticale de la plaque de béton

On compare les valeurs extraites du champ SIEF_ELNO issu de STAT_NON_LINE aux valeurs théoriques de référence. L'extraction se fait sur la maille $QD001001$ représentant la plaque de béton.
La composante sur laquelle portent les tests est NXX.
La tolérance d'écart relatif par rapport à la référence vaut 10^{-6} %.

Nœud	Valeur de référence	Tolérance
NB001001	–9,99125765.10^{4} N/m	–4,43.10^{-11} %
NB001002	–9,99125765.10^{4} N/m	–4,43.10^{-11} %
NB002001	–9,99125765.10^{4} N/m	–4,43.10^{-11} %
NB002002	–9,99125765.10^{4} N/m	–4,43.10^{-11} %

4.1.2 Déplacement horizontal des nœuds de la plaque de béton

On compare les valeurs extraites du champ DEPL issu de STAT_NON_LINE aux valeurs théoriques de référence.
La composante sur laquelle portent les tests est DX.
La tolérance d'écart relatif par rapport à la référence vaut 10^{-6} %.

Nœud	Valeur de référence	Tolérance
NB001002	–1,11013974.10^{-5} m	–1,05.10^{-9} %
NB002002	–1,11013974.10^{-5} m	–1,05.10^{-9} %

4.1.3 Effort normal dans le câble

On compare les valeurs extraites du champ SIEF_ELNO issu de STAT_NON_LINE aux valeurs théoriques de référence. L'extraction se fait sur les mailles $SG001001$ pour le nœud $NC001001$, $SG001002$ pour le nœud $NC001002$, $SG001003$ pour le nœud $NC001003$, et $SG001004$ pour les nœuds $NC001004$ et $NC001005$.
La composante sur laquelle portent les tests est N.
La tolérance d'écart relatif par rapport à la référence vaut 10^{-6} %.

Nœud	Valeur de référence	Tolérance
$NC001001$	1,99825153.10^{5} N	–4,44.10^{-11} %
$NC001002$	1,99825153.10^{5} N	–4,44.10^{-11} %
$NC001003$	1,99825153.10^{5} N	–4,44.10^{-11} %
$NC001004$	1,99825153.10^{5} N	–4,44.10^{-11} %
$NC001005$	1,99825153.10^{5} N	–4,44.10^{-11} %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.1.4 Déplacement horizontal des nœuds du câble

On compare les valeurs extraites du champ DEPL issu de STAT_NON_LINE aux valeurs théoriques de référence.
La composante sur laquelle portent les tests est DX.
La tolérance d'écart relatif par rapport à la référence vaut 10^{-6} %.

Nœud	Valeur de référence	Tolérance
NC001002	$-2{,}77534935.10^{-6}$ m	$-1{,}05.10^{-9}$ %
NC001003	$-5{,}55069869.10^{-6}$ m	$7{,}56.10^{-10}$ %
NC001004	$-8{,}32604804.10^{-6}$ m	$1{,}56.10^{-10}$ %
NC001005	$-1{,}11013974.10^{-5}$ m	$-1{,}05.10^{-9}$ %

4.2 Remarques

Les valeurs calculées correspondent effectivement à celles théoriquement attendues. On obtient bien un état de compression pour la plaque de béton.

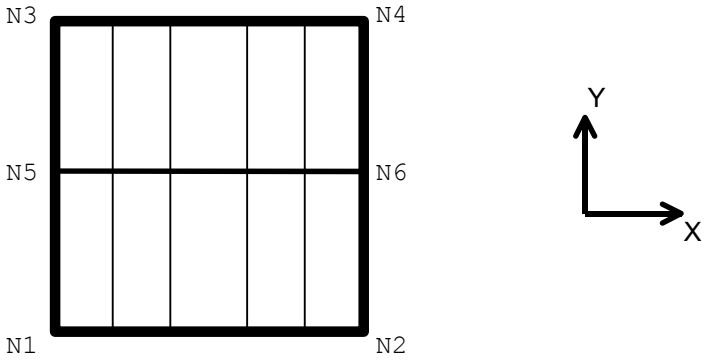
On observe une différence infinitésimale entre le déplacement horizontal au nœud $NC001005$ appartenant au câble et le déplacement horizontal aux nœuds $NB001002$ et $NB002002$ de la plaque de béton. Les valeurs relevées devraient être identiques, mais les erreurs d'arrondis apparaissant dans les coefficients des relations cinématiques expliquent cette différence infinitésimale.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Pour cette modélisation, les nœuds « câble » et « béton » sont confondus.
La figure ci-dessous donne une représentation simplifiée du maillage.



La plaque de béton est représentée par 10 éléments DKT, supportés par 10 mailles QUAD4.

Une épaisseur $e=0,6\,m$ lui est affectée, ainsi qu'un matériau béton pour lequel sont définis les comportements ELAS (module d'Young $E_b=3.10^{10}Pa$) et BPEL_BETON : les paramètres caractéristiques de cette relation sont fixés à 0 car on néglige les pertes de tension le long du câble de précontrainte.

Les nœuds $N1$, $N5$ et $N3$ sont encastrés : DX, DY, DZ, DRX, DRY et DRZ sont bloqués.

Le câble est représenté par 5 éléments MECA_BARRE, supportés par 5 mailles SEG2.

Une aire de section droite $S_a=1,5.10^{-4}m^2$ leur est affectée, ainsi qu'un matériau acier pour lequel sont définis les comportements ELAS (module d'Young $E_a=2,1.10^{11}Pa$) et BPEL_ACIER : les paramètres caractéristiques de cette relation sont fixés à 0 (pertes de tension négligées), à l'exception de la contrainte limite élastique pour laquelle une valeur nulle est illicite ($f_{prg}=1,77.10^9\,Pa$).

La tension $F_0=2.10^5\,N$ est appliquée aux nœuds $N5$ et $N6$. Cette valeur de tension est cohérente avec les valeurs de section et de limite élastique, pour un câble de précontrainte de type toron.

Le calcul de l'état d'équilibre de l'ensemble plaque et câble est effectué en un seul pas, le comportement étant élastique.

5.2 Etapes de calcul et fonctionnalités testées

Les principales étapes de calcul correspondent aux fonctionnalités que l'on souhaite valider :

- opérateur DEFI_MATERIAU : définition des relations de comportement BPEL_BETON et BPEL_ACIER, dans le cas particulier où les pertes de tension le long du câble de précontrainte sont négligées (valeurs par défaut des paramètres) ;
- opérateur DEFI_CABLE_BP : détermination d'un profil de tension constant le long du câble de précontrainte, les pertes étant négligées ; calcul des coefficients des relations cinématiques entre les degrés de liberté des nœuds du câble et les degrés de liberté des nœuds «voisins» de la plaque de béton ;
- opérateur AFFE_CHAR_MECA : définition d'un chargement de type RELA_CINE_BP ;

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- opérateur STAT_NON_LINE, option COMPORTEMENT : calcul de l'état d'équilibre en tenant compte du chargement de type RELA_CINE_BP.
- opérateur POST_RELEVE_T, NOM_CMP='N' sur tout le champ SIEF_ELNO.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées

6.1.1 Densité linéique d'effort normal sur la section verticale de la plaque de béton

Nœud	Valeur de référence	Tolérance
N1	–9,99125765.10^4 N/m	1.526 %
N3	–9,99125765.10^4 N/m	1.526 %

6.1.2 Effort normal dans le câble

Nœud	Valeur de référence	Tolérance
N5	1,99825153.10^5 N	–0.001 %
N6	1,99825153.10^5 N	–0.193 %

6.1.3 Effort normal dans le câble via la commande `POST_RELEVE_T`

Nœud	Valeur de référence	Valeur calculée
N5	1,998224892.10^5 N	1,9982248921222.10^5 N
N6	1,994393252.10^5 N	1,9943932520206.10^5 N

6.2 Remarques

Les valeurs calculées correspondent effectivement à celles théoriquement attendues. On obtient bien un état de compression pour la plaque de béton.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus sont validés par comparaison à une solution analytique de référence avec une très bonne précision.

Les fonctionnalités particulières testées sont les suivantes :

- opérateur DEFI_MATERIAU : définition des paramètres caractéristiques des matériaux acier et béton permettant le calcul de la tension le long du câble de précontrainte, suivant les règles du BPEL ;
- opérateur DEFI_CABLE_BP : calcul de la tension le long du câble et des coefficients des relations cinématiques entre les degrés de liberté des nœuds du câble et les degrés de liberté des nœuds «voisins» de la plaque de béton ;
- opérateur AFFE_CHAR_MECA : définition d'un chargement de type RELA_CINE_BP ;
- opérateur STAT_NON_LINE, option COMPORTEMENT : calcul de l'état d'équilibre en tenant compte du chargement de type RELA_CINE_BP.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)