SSNP103 - Calcul du taux de restitution d'énergie en élasticité non linéaire

Résumé :

Ce test est un cas-test en mécanique de la rupture non linéaire.

On considère une plaque rectangulaire finie, fissurée et soumise à un chargement de traction. La loi de comportement utilisée est une loi élastique non linéaire de type Henky von Mises.

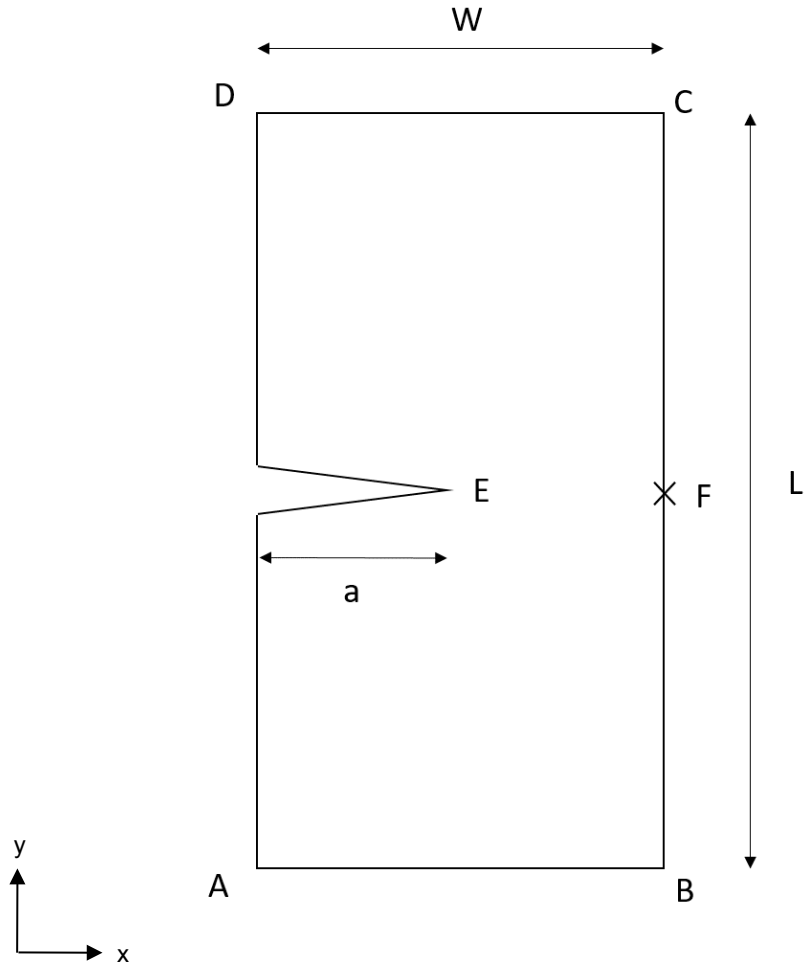
Ce cas-test comprend quatre modélisations en $2D$:

- La modélisation A, en déformations planes, traite d'une fissure sollicitée en mode 1 pur. Seule la moitié de la plaque est modélisée par symétrie.
- La modélisation B, en déformations planes, traite d'une fissure sollicitée en modes mixtes. La plaque complète est modélisée.
- La modélisation C reprend la géométrie de la modélisation A mais résout le problème axisymétrique associé. Il ne s'agit donc pas ici d'une plaque fissurée mais d'un cylindre fissuré.
- La modélisation D, reproduit le calcul de la modélisation B en y ajoutant un chargement thermique.
- La modélisation E, reproduit le calcul de la modélisation B avec HHO linéaire.
- La modélisation F, reproduit le calcul de la modélisation B avec HHO quadratique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Longueur	$L=400\,mm$
Largeur	$W=100\,mm$
Profondeur de fissure	$a=50\,mm$

1.2 Propriétés du matériau

Le matériau obéit à une loi de comportement élastique « non linéaire » (loi de Hencky) de von Mises à écrouissage isotrope linéaire (EMAS_VMIS_LINE).

Les propriétés du matériau sont les suivantes :

Module de Young	$E=2,1\times10^5\,MPa$
Coefficient de Poisson	$\nu=0.3$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Limite élastique linéaire	$\sigma_y = 150\,MPa$
Pente de la courbe de traction	$\mathrm{D_SIGM_EPSI} = 5{,}25 \times 10^4\,MPa$
Coefficient de dilatation	$\alpha = 1.10^{-5}$
Température de référence	$\mathrm{VALE_REF} = 20\,°C$ (mot-clé de AFFE_MATERIAU)

1.3 Conditions aux limites et chargement

Pour les modélisations A et C, le modèle est limité à la moitié de la structure, le plan horizontal de la fissure étant un plan de symétrie. Pour les modélisations B et D, la totalité de la structure est représentée.

Conditions aux limites

Modélisations A et C :
Déplacement horizontal $UX = 0$ au point F
Déplacement vertical $UY = 0$ dans le ligament EF (condition de symétrie)

Modélisation B et D :
Déplacement horizontal $UX = 0$ sur le segment AB
Déplacement vertical $UY = 0$ sur le segment AB

Chargement mécanique

Modélisations A et C :
Effort surfacique normal appliqué au segment CD

Modélisation B et D :
Déplacement horizontal imposé sur le segment CD : $UY = \delta$
Déplacement vertical imposé sur le segment CD : $UX = \delta$

Chargement thermique

Modélisation A à C :
Pas de chargement thermique.

Modélisation D :
Température stationnaire dépendant de l'abscisse x et croissant linéairement entre 0 °C en $x = x_A = 0$ et 200°C en $x = x_B = w$. La température de référence est fixée à 100°C.

2 Solution de référence

Dans ce test nous fabriquons la solution de référence en faisant une estimation du taux de restitution d'énergie de deux manières.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La première solution est obtenue par la méthode de G-thêta classique (opérateur CALC_G), c'est à dire, en faisant une estimation de l'intégrale surfacique sur une couronne placée autour de la fissure.
Afin de trouver cette même valeur par un autre moyen, nous remarquons d'abord que dans le cas de l'élasticité linéaire, il est possible d'estimer G grâce à la formule d'Irwin faisant le lien entre les quantités globales avec les quantités locales que sont les facteurs d'intensité de contrainte $K_I ; K_{II}$:

$$G=\frac{1-\nu^2}{E}\left(K_I^2+K_{II}^2\right) \quad \text{(déformations planes)} \tag{1}$$

Et :

$$G=\frac{\left(K_I^2+K_{II}^2\right)}{E} \quad \text{(contraintes planes)} \tag{2}$$

Les facteurs d'intensité de contraintes peuvent être estimés par l'analyse de singularité des champs de contrainte ou de déplacement proche de la pointe. Dans le cas de l'hyper-élasticité, le taux de restitution d'énergie est encore un invariant du contour d'intégration, ce qui nous permet d'imaginer une procédure similaire.
D'abord nous pouvons théoriquement contracter indéfiniment le contour d'intégration vers la pointe de fissure tout en gardant la même valeur de G. Donc même pour une loi hyper-élastique nous pouvons établir un lien entre les quantités globale G et locale K . Cependant la généralisation de la notion de facteur d'intensité de contraintes n'est pas toujours aisée pour tous les types des lois hyper-élastiques. Par contre pour une loi hyper-élastique bilinéaire ce lien peut être établi sans trop de difficulté. Pour cette loi, au voisinage de la pointe, le comportement sera linéaire et ceci peu importe le chargement extérieur appliqué. Nous retrouverons donc la singularité de contrainte et de déformation classique sous forme de $\sqrt{r}$.

Dans ce cas-test nous utilisons donc la loi élastique non-linéaire de type Hencky, qui a l'avantage de reproduire la loi de plasticité de von Mises pour tout chargement radial monotone :

$$\underline{\underline{\sigma}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)=K\,Tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\underline{\underline{I}}+2\mu\left(\varepsilon^{eq}\right)\underline{\underline{\varepsilon}}^D \tag{3}$$

où $3K=E/\left(1-2\nu\right)$ est le module de compressibilité (en anglais :bulk modulus) et $\mu\left(\varepsilon^{eq}\right)$ est un coefficient de Lamé, qui est supposé dépendant exclusivement de la déformation équivalente de von Mises : $\varepsilon^{eq}=\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}^D:\underline{\underline{\varepsilon}}^D}$.

Dans la forme générale de la loi non-linéaire de Hencky, la dépendance du coefficient de Lamé $\mu\left(\varepsilon^{eq}\right)$ en fonction de la déformation est identifiée à partir de la courbe de traction uniaxiale. Pour le cas bilinéaire la loi s'écrit ainsi dans le domaine d'élasticité linéaire initial :

$$\underline{\underline{\sigma}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)=K\,Tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\underline{\underline{I}}+2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}^D \quad \text{pour} \quad \varepsilon^{eq}\leq\frac{\sigma_c}{2\mu} \tag{4}$$

Et dans le domaine d'élasticité non-linéaire :

$$\underline{\underline{\sigma}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)=K\,Tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\underline{\underline{I}}+\sigma_c\left(1-\mu_\infty/\mu\right)\underline{\underline{\varepsilon}}^D/\sqrt{\underline{\underline{\varepsilon}}^D:\underline{\underline{\varepsilon}}^D}+2\mu_\infty\underline{\underline{\varepsilon}}^D \quad \text{pour} \quad \varepsilon^{eq}\geq\frac{\sigma_c}{2\mu} \tag{5}$$

avec $3K=E/\left(1-2\nu\right)$ et $2\mu=E/\left(1+\nu\right)$.

Le coefficient de Lamé $2\mu_\infty$ pour les chargements dépassant le seuil d'élasticité linéaire est lié à la deuxième pente de la loi, qu'on note E_∞ (mot-clé D_SIGM_EPSI) :

$$2\mu_\infty=6\,E_\infty\,K/\left(9K+E_\infty\right) \tag{6}$$

Enfin, pour les chargements importants $\varepsilon^{eq}\gg\frac{\sigma_c}{2\mu}$, cette loi devient asymptotiquement linéaire avec les caractéristiques linéaires suivantes :

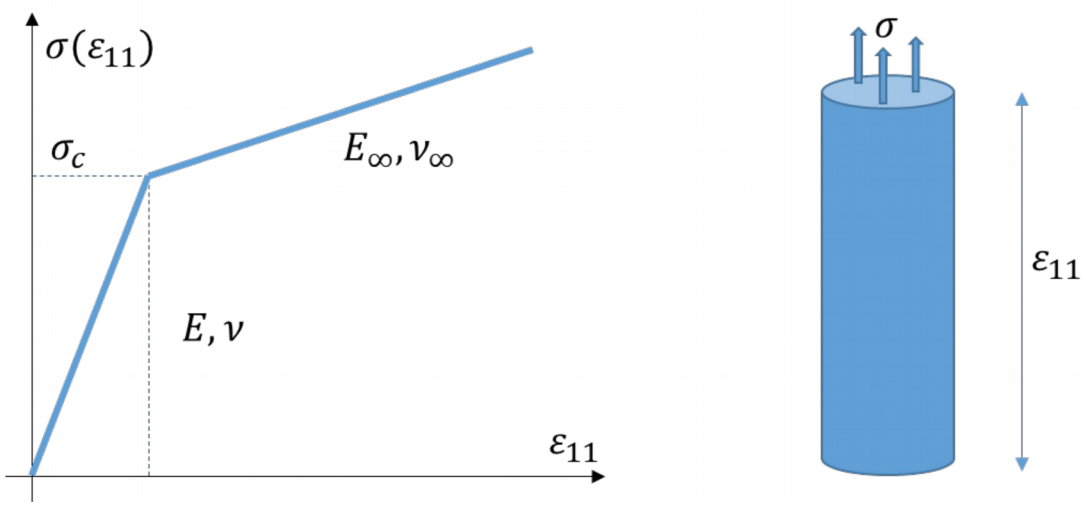
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}})=\frac{E_\infty}{3(1-2\nu_\infty)}Tr(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{I}}+\frac{E_\infty}{1+\nu_\infty}\underline{\underline{\varepsilon}}^D+o(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad \text{pour} \quad \varepsilon^{eq}\gg\frac{\sigma_c}{2\mu} \tag{7}$$

Avec $E \rightarrow E_\infty$ et $2\nu_\infty=1-(1-2\nu)\cdot E_\infty/E$.

L'analyse de la singularité du saut de déplacement avec ces nouvelles valeurs de coefficients d'élasticité à chargements « infinis » nous permet d'identifier les valeurs de facteurs d'intensité de contrainte grâce à l'opérateur déjà disponible dans code_aster : POST_K1_K2_K3, puis utiliser la formule d'Irwin classique :

$$G=\frac{1-\nu_\infty^2}{E_\infty}(K_I^2+K_{II}^2) \tag{8}$$



Ainsi, deux tests sont effectués sur les taux de restitution d'énergie calculés.

Premier test :
On teste directement le ratio entre le G issu de CALC_G et celui issu de POST_K1_K2_K3. Ce ratio doit être égal à 1.
Il s'agit ici d'une référence de type ANALYTIQUE .

Second test :
Le cas-test a été exécuté, pour chaque modélisation, sur un maillage dix fois plus fin en fond de fissure puis sur un maillage cent fois plus fin (taille des mailles connectées au fond de fissure respectivement de $10^{-4}mm$ et $10^{-5}mm$), avec un chargement couvrant une plage plus importante que celle du cas test.
A chaque instant de calcul, les valeurs de G issues de la méthode 1 et 3 de calcul de POST_K1_K2_K3 (voir documentation U4.82.05) ont été extraites.
La comparaison des grandeurs calculées pour chaque maillage montre la convergence (au sens du maillage) de celles-ci.
La solution de référence retenue est la valeur de G obtenue avec la méthode 3 avec le maillage le plus fin (taille de mailles connectées au fond de fissure de $10^{-5}mm$). L'écart relatif entre la valeur de G issue des méthodes 1 et 3 donne une estimation de la précision de cette valeur de référence.
Il s'agit ici d'une référence de type AUTRE_ASTER.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

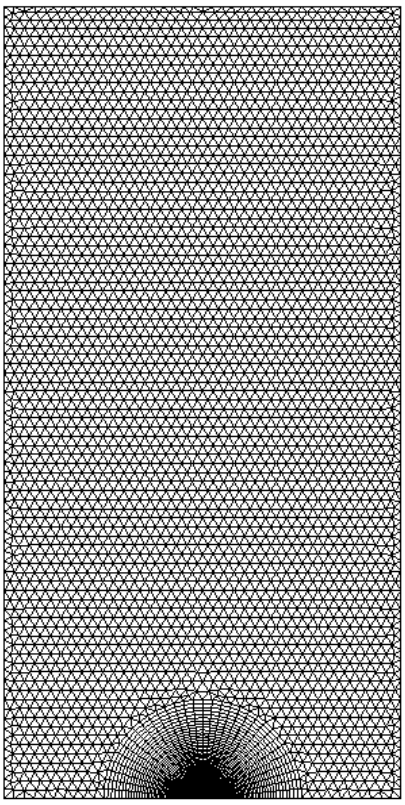
3.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'un calcul en élasticité non linéaire sous l'hypothèse des petits déplacements, en déformations planes. La fissure est ouverte en mode I pur. Seule la moitié de la structure est représentée par symétrie.

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage en entrée du cas-test en un maillage linéaire ayant les caractéristiques suivantes :
-Nombre de nœuds : 8936
-Nombre d'éléments :
-Triangles : 6494
-quadrangles : 5408
Le rayon du domaine rayonnant en fond de fissure est de $25\,mm$. La taille de éléments connectés au fond de fissure est de $10^{-3}\,mm$

A l'exécution du cas-test, un nouveau maillage quadratique doté d'éléments de BARSOUM en fond de fissure est créé par l'exécution des commandes CREA_MAILLAGE (mot clé LINE_QUAD) puis MODI_MAILLAGE (mot-clé MODI_MAILLE, option NOEUD_QUART).



3.3 Grandeurs testées et résultats

On compare les résultats obtenus pour trois couronnes d'intégration différentes :

- couronne 1 : $R_{inf}=10\,mm$; $R_{\sup}=15\,mm$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- couronne 2 : $R_{inf}=15\,mm$; $R_{\sup}=20\,mm$
- couronne 3 : $R_{inf}=20\,mm$; $R_{\sup}=25\,mm$

Les valeurs de référence de G issues de la méthode 3 POST_K1_K2_K3 retenues ainsi que les précisions associées sont fournies dans le tableau ci-dessous.

Instant de calcul	Effort surfacique imposé (MPa)	Référence : $G(N/m)$ Issu de POST_K1_K2_K3 (méthode 3)	Tolérance (%)
1	$0,7*\mathrm{SY}=105$	1.13702E+05	0,3
2	$\mathrm{SY}=150$	2.85869E+05	0,3
3	$3*\mathrm{SY}=450$	3.42359E+06	0,2

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'un calcul en élasticité non linéaire sous l'hypothèse des petits déplacements, en déformations planes. La fissure est ouverte en mode mixte. L'intégralité de la structure est représentée.

4.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage en entrée du cas-test en un maillage linéaire ayant les caractéristiques suivantes :
-Nombre de nœuds : 17691
-Nombre d'éléments :
-Triangles : 12988
-quadrangles : 10816
Le rayon du domaine rayonnant en fond de fissure est de $25\,mm$. La taille de éléments connectés au fond de fissure est de $10^{-3}\,mm$
Il est obtenu par « mirrorisation » du maillage de la modélisation A.

A l'exécution du cas-test, un nouveau maillage quadratique doté d'éléments de BARSOUM en fond de fissure est créé par l'exécution des commandes CREA_MAILLAGE (mot clé LINE_QUAD) puis MODI_MAILLAGE (mot-clé MODI_MAILLE, option NOEUD_QUART).

4.3 Grandeurs testées et résultats

On compare les résultats obtenus pour trois couronnes d'intégration différentes :

- couronne 1 : $R_{inf}=10\,mm$; $R_{\sup}=15\,mm$
- couronne 2 : $R_{inf}=15\,mm$; $R_{\sup}=20\,mm$
- couronne 3 : $R_{inf}=20\,mm$; $R_{\sup}=25\,mm$

Les valeurs de référence de G issues de la méthode 3 POST_K1_K2_K3 retenues ainsi que les précisions associées sont fournies dans le tableau ci-dessous.

Instant de calcul	Deplacement imposé δ (en mm)	Référence : $G(N/m)$ Issu de POST_K1_K2_K3 (méthode 3)	Tolérance (%)
1	$0,7*\mathrm{Dp}=200$	1.36596E+04	0,5
2	$\mathrm{Dp}=286$	2.74150E+04	0,4
3	$3*\mathrm{Dp}=857$	1.68193E+05	0,3

Où $Dp=L.SY/E$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'un calcul en élasticité non linéaire sous l'hypothèse des petits déplacements, en axisymétrique. La fissure est ouverte en mode I pur. Seule la moitié de la structure est représentée par symétrie.

5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est identique à celui de la modélisation A.

5.3 Grandeurs testées et résultats

On compare les résultats obtenus pour trois couronnes d'intégration différentes :

- couronne 1 : $R_{inf}=10\,mm$; $R_{\sup}=15\,mm$
- couronne 2 : $R_{inf}=15\,mm$; $R_{\sup}=20\,mm$
- couronne 3 : $R_{inf}=20\,mm$; $R_{\sup}=25\,mm$

Les valeurs de référence de G issues de la méthode 3 `POST_K1_K2_K3` retenues ainsi que les précisions associées sont fournies dans le tableau ci-dessous.

Instant de calcul	Effort surfacique imposé (MPa)	Référence : $G(N/m)$ Issu de **POST_K1_K2_K3** (méthode 3)	Tolérance (%)
1	$0,7*\mathrm{SY}=105$	3.35679E+03	1,5
2	$\mathrm{SY}=150$	1.01970E+04	0,6
3	$3*\mathrm{SY}=450$	1.64979E+05	0,3

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'un calcul en élasticité non linéaire sous l'hypothèse des petits déplacements, en déformations planes. La fissure est ouverte en mode mixte. L'intégralité de la structure est représentée. Une température stationnaire non uniforme est appliquée.

6.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est identique à celui de la modélisation B.

6.3 Grandeurs testées et résultats

On compare les résultats obtenus pour trois couronnes d'intégration différentes :

- couronne 1 : $R_{inf}=10\,mm$; $R_{\sup}=15\,mm$
- couronne 2 : $R_{inf}=15\,mm$; $R_{\sup}=20\,mm$
- couronne 3 : $R_{inf}=20\,mm$; $R_{\sup}=25\,mm$

Les valeurs de référence de G issues de la méthode 3 POST_K1_K2_K3 retenues ainsi que les précisions associées sont fournies dans le tableau ci-dessous.

Instant de calcul	Deplacement imposé δ (en mm)	Référence : $G(N/m)$ Issu de POST_K1_K2_K3 (méthode 3)	Tolérance (%)
1	$0,7*\mathrm{Dp}=200$	5.00690E+04	2
2	$\mathrm{Dp}=286$	7.00295E+04	2
3	$3*\mathrm{Dp}=857$	2.44290E+05	1

Où $Dp=L.SY/E$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'un calcul en élasticité non linéaire sous l'hypothèse des petits déplacements, en déformations planes. La fissure est ouverte en mode mixte. L'intégralité de la structure est représentée. On utilise la modélisation HHO linéaire

7.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est identique à celui de la modélisation B.

7.3 Grandeurs testées et résultats

Les valeurs de référence de G, K1 et K2 issues de la méthode POST_K1_K2_K3 de la modélisation B .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Modélisation F

8.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'un calcul en élasticité non linéaire sous l'hypothèse des petits déplacements, en déformations planes. La fissure est ouverte en mode mixte. L'intégralité de la structure est représentée. On utilise la modélisation HHO quadratique.

8.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est identique à celui de la modélisation B.

8.3 Grandeurs testées et résultats

Les valeurs de référence de G, K1 et K2 issues de la méthode POST_K1_K2_K3 de la modélisation B .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Synthèse des résultats

Ce cas test vise à valider le calcul du taux de restitution d'énergie en élasticité non linéaire:

- les modélisations A et B permettent de valider le calcul de G en déformations planes, en mode 1 pur et en mode mixte
- la modélisation C valide le calcul de G en axisymétrique, en mode 1 pur.
- la modélisation D valide le calcul de G suite à une calcul thermo-mécanique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)