# SSNL501 - Poutre encastrée aux deux extrémités soumise à une pression uniforme

**Résumé :**

Ce test représente un calcul quasi-statique d'une poutre encastrée soumise à une pression uniforme, constituée d'un matériau élastique parfaitement plastique. Ce test permet de valider les modélisations éléments finis suivantes :

- DKT (TRIA3, QUAD4),
- COQUE_3D (TRIA7, QUAD9),
- POU_D_TGM (SEG2).

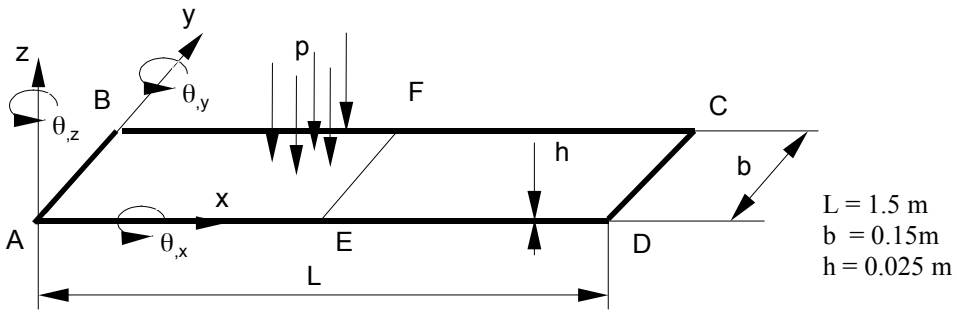
La pression limite est comparée à une solution de référence analytique.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Problème de référence

## 1.1 Géométrie




## 1.2 Propriétés du matériau

Les propriétés du matériau constituant la poutre sont :

$E=2.10^{11}\ Pa$ Module de Young
$\nu=0.3$ Coefficient de poisson

Le matériau suit une loi de comportement élastique parfaitement plastique :

$\sigma_e=2.35\,10^{8}\ Pa$ Limite élastique
$\varepsilon_e=1.175\,10^{-3}$ Déformation élastique limite

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

- Conditions aux limites : Cotés $AB$ et $CD$ encastrés
- Déplacement imposé suivant $Z$ en $E$ ( $x=L/2$ ) :

$DZ_e=6.60910^{-3}m$ ( $DZ_e=\frac{q_e L^4}{384EI}$ )

$DZ(E)$ varie de $0$ à $30\,DZ_e$

## 1.4 Conditions initiales

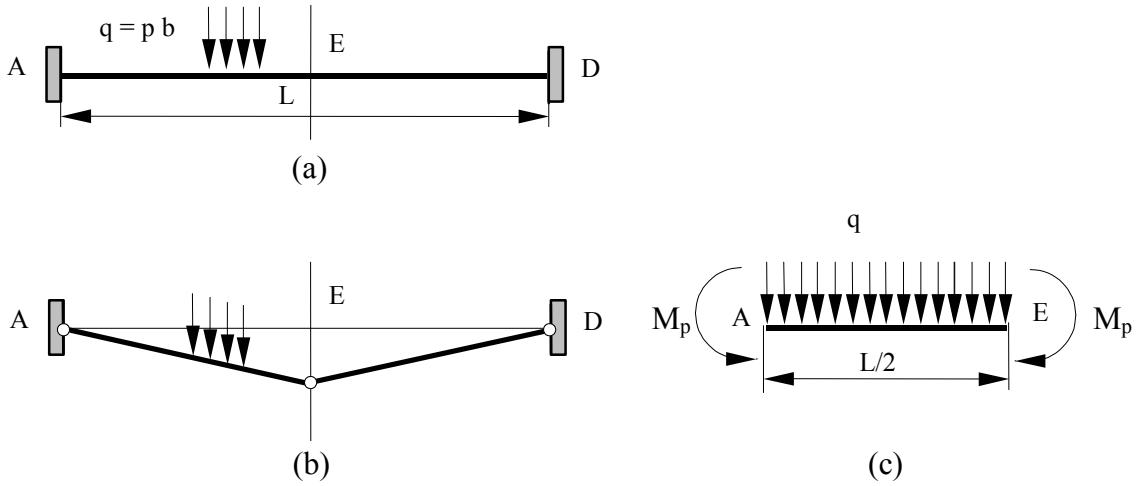
Sans objet



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Solution de référence

## 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence




La ruine de la poutre apparaît lorsqu'il y a des rotules plastiques aux points $A$, $D$ et $E$ (figure b). L'équilibre statique de la moitié gauche de la poutre, permet de déterminer la pression limite (figure c)

$$\sum M_A = 2M_p - q_L(\frac{L}{2})(\frac{L}{4}) = 0 \qquad \Rightarrow q_L = \frac{16M_p}{L^2}$$

où :

$q_L$ représente la pression limite

$M_p$ représente le moment plastique ( $M_p = \sigma_e \frac{bh^2}{4}$ )

L'apparition du premier point plastique sur la fibre extérieure de la poutre a lieu aux points $A$ et $D$, les autres fibres étant en régime élastique. La pression limite élastique est de $q_e = 2\sigma_e \frac{bh^2}{L^2}$.

## 2.2 Résultats de référence

Pression limite $q_L = 39\,166.67\,N/m$

## 2.3 Incertitudes sur la solution

Solution analytique

## 2.4 Références bibliographiques

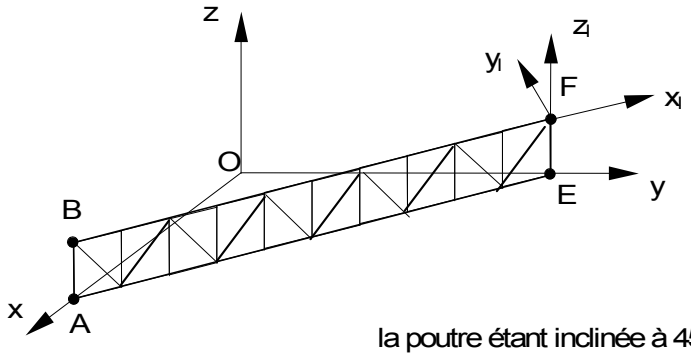
1) WILLIAM A. NASH : Theory and problems of Strength of material, Schaum's outline series, 2/ed, McGRAW-HILL



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Modélisation A

## 3.1 Caractéristiques de la modélisation




Modélisation DKT (TRIA3)
$OE = OA = L/2\sqrt{2}$
AB // EF // axe Z

Conditions aux limites (repère gobal)
- côté AB: u = v =w = $\theta_x$= $\theta_y$= $\theta_z$= 0

Conditions de symétrie
- côté EF: u = □ (repère local $x_1$ $y_1$ $z_1$)
- côté EF: $\theta_z$= □ (repère global)

la poutre étant inclinée à 45°, la valeur du déplacement imposé est alors : $DX_e$=6.609 $10^{-3}$ m . sin(45°)

## 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 43
Nombre de mailles et type : 20 TRIA3

## 3.3 Valeurs testées

| $DX(E)/DX_e$ | Identification | Instants | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | ETA_PILOTAGE | 5 | 1.0 | 1.11133 | 11.11 |
| 25 | ETA_PILOTAGE | 15 | 1.0 | 1.142 | 11.42 |

## 3.4 Remarques

Dans cette analyse, on utilise pour trouver la solution, une technique de résolution de type déplacement imposé ('DDL_IMPO'). Cette méthode fournit pour chaque valeur de déplacement imposé, un coefficient multiplicateur du chargement ('ETA_PILOTAGE'). La valeur du chargement imposé dans 'AFFE_CHAR_MECA' est égale à la pression limite, en conséquence la valeur de référence du paramètre 'ETA_PILOTAGE' est égale à 1.
Les calculs ont été arrêtés lorsque la valeur du paramètre ETA_PILOTAGE s'est stabilisée.

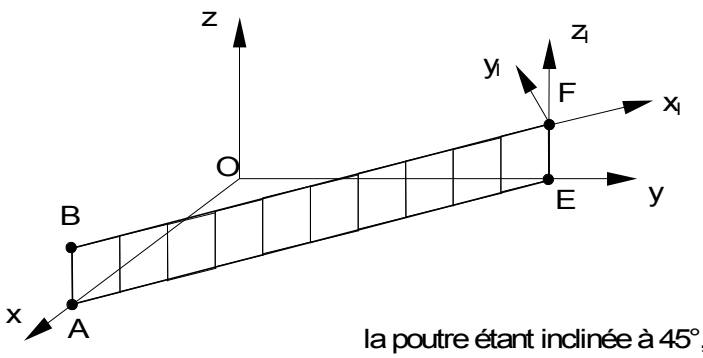
La référence étant prise par rapport à la solution poutre avec 50 éléments, on observe une amélioration des résultats DKT TRIA3 lorsque l'on raffine le maillage.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 4 Modélisation B

## 4.1 Caractéristiques de la modélisation




Modélisation DKT (QUAD4)
$OE = OA = L/2\sqrt{2}$
$AB // EF // axe Z$

Conditions aux limites (repère gobal)
- côté AB: $u = v = w = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$

Conditions de symétrie
- côté EF: $u =$ □ (repère local $x_1\ y_1\ z_1$)
- côté EF: $\theta_z =$ □ (repère global)

la poutre étant inclinée à 45°, la valeur du déplacement imposé est alors : $DX_e = 6.609\ 10^{-3}$ m . sin(45°)

## 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 43
Nombre de mailles et type : 10 QUAD4

## 4.3 Valeurs testées

| $DX(E)/DX_e$ | Identification | Instants | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | ETA_PILOTAGE | 5 | 1.0 | 1.0837 | 8.37 |
| 25 | ETA_PILOTAGE | 25 | 1.0 | 1.0998 | 9.98 |

## 4.4 Remarques

Dans cette analyse, on utilise pour trouver la solution, une technique de résolution de type déplacement imposé ('DDL_IMPO'). Cette méthode fournit pour chaque valeur de déplacement imposé, un coefficient multiplicateur du chargement ('ETA_PILOTAGE'). La valeur du chargement imposé dans 'AFFE_CHAR_MECA' est égale à la pression limite, en conséquence la valeur de référence du paramètre 'ETA_PILOTAGE' est égale à 1.
Les calculs ont été arrêtés lorsque la valeur du paramètre ETA_PILOTAGE s'est stabilisée.

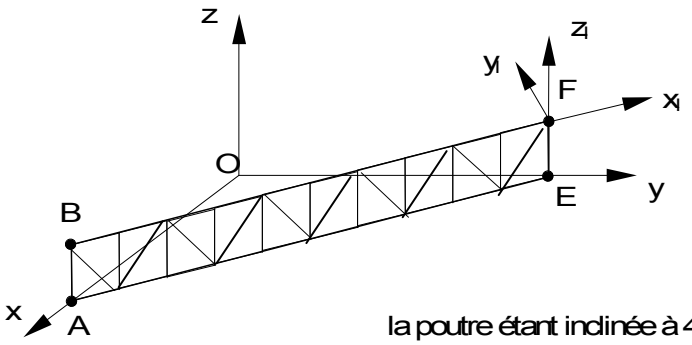
La référence étant prise par rapport à la solution poutre avec 50 éléments, on observe une amélioration des résultats DKT QUAD4 lorsque l'on raffine le maillage.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 5 Modélisation C

## 5.1 Caractéristiques de la modélisation




Modélisation COQUE_3D (TRIA7)
$OE = OA = L/2\sqrt{2}$
AB // EF // axe Z

Conditions aux limites (repère gobal)
- côté AB: $u = v = w = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$

Conditions de symétrie
- côté EF: $u =$ (repère local $x_1\ y_1 z_1$)
- côté EF: $\theta_z =$ (repère global)

la poutre étant inclinée à 45°, la valeur du déplacement imposé est alors : $DX_e = 6.609\ 10^{-3}$ m . sin(45°)

## 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 83
Nombre de mailles et type : 20 TRIA7

## 5.3 Valeurs testées

| $DX(E)/DX_e$ | Identification | Instants | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | ETA_PILOTAGE | 5 | 1.0 | 1.1143 | 11.43 |
| 15 | ETA_PILOTAGE | 15 | 1.0 | 1.1682 | 16.82 |

## 5.4 Remarques

Dans cette analyse, on utilise pour trouver la solution, une technique de résolution de type déplacement imposé ('DDL_IMPO'). Cette méthode fournit pour chaque valeur de déplacement imposé, un coefficient multiplicateur du chargement ('ETA_PILOTAGE'). La valeur du chargement imposé dans 'AFFE_CHAR_MECA' est égale à la pression limite, en conséquence la valeur de référence du paramètre 'ETA_PILOTAGE' est égale à 1.
Les calculs ont été arrêtés lorsque la valeur du paramètre ETA_PILOTAGE s'est stabilisée.

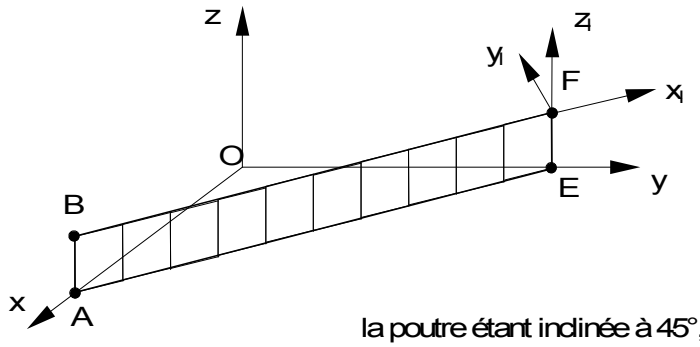
La référence étant prise par rapport à la solution poutre avec 50 éléments, on observe une amélioration des résultats coques 3D TRIA7 lorsque l'on raffine le maillage.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 6 Modélisation D

## 6.1 Caractéristiques de la modélisation




Modélisation COQUE_3D (QUAD9)
$OE = OA = L/2\sqrt{2}$
AB // EF // axe Z

Conditions aux limites (repère gobal)
- côté AB: $u = v = w = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$

Conditions de symétrie
- côté EF: $u =$ □ (repère local $x_1\ y_1\ z_1$)
- côté EF: $\theta_z =$ □ (repère global)

la poutre étant inclinée à 45°, la valeur du déplacement imposé est alors : $DX_e = 6.609\ 10^{-3}$ m . sin(45°)

## 6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 54
Nombre de mailles et type : 10 QUAD9

## 6.3 Valeurs testées

| $DX(E)/DX_e$ | Identification | Instants | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | ETA_PILOTAGE | 5 | 1.0 | 1.0978 | 9.78 |
| 25 | ETA_PILOTAGE | 25 | 1.0 | 1.1085 | 10.85 |

## 6.4 Remarques

Dans cette analyse, on utilise pour trouver la solution, une technique de résolution de type déplacement imposé ('DDL_IMPO'). Cette méthode fournit pour chaque valeur de déplacement imposé, un coefficient multiplicateur du chargement ('ETA_PILOTAGE'). La valeur du chargement imposé dans 'AFFE_CHAR_MECA' est égale à la pression limite, en conséquence la valeur de référence du paramètre 'ETA_PILOTAGE' est égale à 1.

Les calculs ont été arrêtés lorsque la valeur du paramètre ETA_PILOTAGE s'est stabilisée.

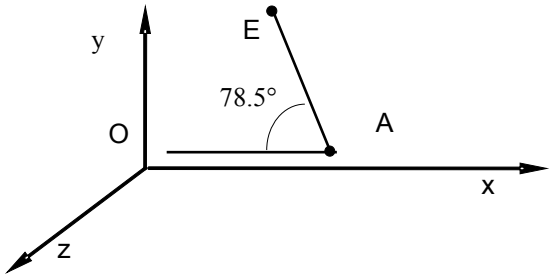
La référence étant prise par rapport à la solution poutre avec 50 éléments, on observe une amélioration des résultats coques 3D QUAD9 lorsque l'on raffine le maillage.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 7 Modélisation E

## 7.1 caractéristiques de la modélisation




Modélisation POU_D_TGM
A= 2.1 0.7 0.
AE =0.75 m

Conditions aux limites (repère gobal)
- noeud A: u = v =w = $\theta_x$= $\theta_y$= $\theta_z$= 0

Conditions de symétrie
- noeud E: u = 0 , $\theta_z$= 0

la poutre étant inclinée à 78.5°, la valeur du déplacement imposé est alors : $DX_e$=6.609 $10^{-3}$ m . sin(78.5°)

## 7.2 caractéristiques du maillage

- maillage de la poutre

  Nombre de nœuds : 21
  Nombre de mailles et type : 10 SEG2

- maillage de la section



  Nombre de nœuds : 355
  Nombre de mailles et type : 280 QUAD4

## 7.3 Valeurs testées

| $DX(E)/DX_e$ | Identification | Instants | Référence | % Tolérance |
|---|---|---|---|---|
| 5 | ETA_PILOTAGE | 10 | 1.0 | 14. |
| 5.24 | ETA_PILOTAGE | 12 | 1.0 | 14. |

Dans cette analyse, on utilise pour trouver la solution, une technique de résolution de type déplacement imposé ('DDL_IMPO'). Cette méthode fournit pour chaque valeur de déplacement imposé, un coefficient multiplicateur du chargement ('ETA_PILOTAGE'). La valeur du chargement imposé dans 'AFFE_CHAR_MECA' est égale à la pression limite, en conséquence la valeur de référence du paramètre 'ETA_PILOTAGE' est égale à 1.

Les calculs ont été arrêtés lorsque la valeur du paramètre ETA_PILOTAGE s'est stabilisée.

La solution poutre s'améliore sensiblement lorsque l'on raffine le maillage.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 8 Synthèse des résultats

Concernant l'évolution du déplacement normal au centre de la plaque en fonction du paramètre de pilotage, on observe que :

- les modélisations comportant des quadrangles donnent de meilleurs résultats, par rapport aux mailles triangles.

Les calculs ont été arrêtés lorsque la valeur du paramètre ETA_PILOTAGE s'est stabilisée, ou lorsque le calcul n'était plus possible. Compte tenu des maillages utilisés, les résultats obtenus sont satisfaisants. Les erreurs observées sont pour les modélisations :

- DKT :11.4% pour la maille TRIA3 (A) et 9.9% pour la maille QUAD4 (B),
- COQUE_3D : 16% pour la maille TRIA7 (C) et 10.8% pour la maille QUAD9 (D),
- POUT_D_TGM :9% (E).

Mais on constate qu'avec un maillage plus fin aux extrémités et au centre de la plaque, lieu ou la plastification apparaît, il est possible de minimiser l'erreur par rapport à la solution de référence.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)