# SSNL112 - Barre soumise a un chargement thermique cyclique

**Résumé :**
Ce cas test entre dans le cadre de la validation des relations de comportement en élastoplasticité des éléments barre pour la mécanique quasi-statique des structures.
Une barre encastrée a ces deux extrémités subit un chargement thermique cyclique induisant des efforts de traction-compression.

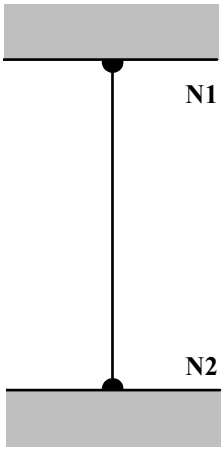
Chaque modélisation permet de valider une des relations de comportement non-linéaire introduite : Écrouissage isotrope linéaire avec critère de Von-Misès (modélisation A), écrouissage cinématique linéaire avec critère de Von-Misès (modélisation B), ainsi qu'un modèle dit de Pinto-Menegotto, représentant le comportement cyclique des armatures en acier dans le béton armé (modélisations C et D).

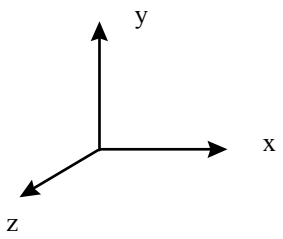


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Problème de référence

## 1.1 Géométrie

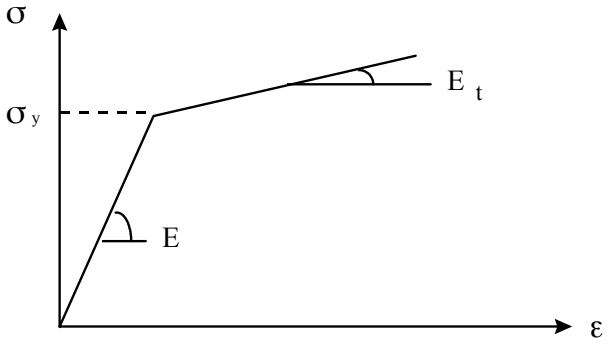



Longueur de la barre : $1\,m$
Section de la barre : $5\,cm^2$

## 1.2 Propriétés des matériaux

### 1.2.1 Écrouissages isotrope et cinématique linéaires



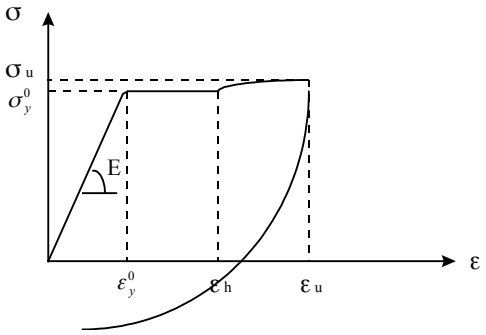

Module d'Young : $E=2.10^{11}\,Pa$
Pente d'écrouissage : $E_t=2.10^{9}\,Pa$
Limite d'élasticité : $\sigma=2.10^{8}\,Pa$
Coefficient de Poisson : $\nu=0,3$
Coefficient de dilatation thermique : $\alpha=1.10^{-5}\,K^{-1}$

Ce test permet de valider le fonctionnement de MFront (comportement plasticité) pour les barres (méthodes de Deborst).



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

### 1.2.2 Modèle de Pinto-Menegotto




| | | | |
|---|---|---|---|
| Module d'Young : | E | = | $2.\ 10^{11}\,Pa$ |
| Limite d'élasticité : | $\sigma_v^0$ | = | $2.10^8\,Pa$ |
| Coefficient de Poisson : | $\nu$ | = | 0,3 |
| Coefficient de dilatation thermique : | $\alpha$ | = | $1.10^{-5}\,K^{-1}$ |
| Déformation d'écrouissage : | $\varepsilon_h$ | = | $2.3\,10^{-3}$ |
| Contrainte ultime : | $\sigma_u$ | = | $2.58\,10^8\,Pa$ |
| Déformation ultime : | $\varepsilon_u$ | = | $3.10^{-2}$ |
| Coefficient définissant la courbe $\zeta$ : | $R_0$ | = | 20 |
| Coefficient définissant la courbe $\zeta$ | $A_1$ | = | 18.5 |
| Coefficient définissant la courbe $\zeta$ | $A_2$ | = | 0.15 |
| Coefficient de flambage : | $C$ | = | 0.5 |
| Coefficient de flambage : | $A$ | = | 0.008 |

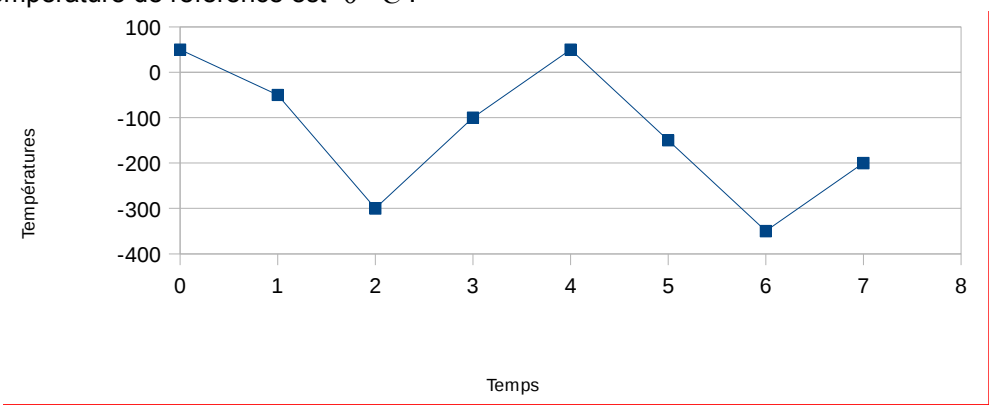
## 1.3 Conditions aux limites et chargement

**Conditions aux limites :**
La barre est encastrée. Les déplacements sont donc bloqués dans les trois directions.
En $N1$ et $N2$ : $DX=DY=DZ=0$

**Chargement :**
Le trajet de chargement est décrit par l'évolution de la température, uniforme dans la barre :

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T(°C)$ | 50 | –50 | –300 | –100 | 50 | –150 | –350 | –200 |

La température de référence est $0\,°C$.





Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Solutions de référence

## 2.1 Méthode de calcul utilisée pour les solutions de référence

### 2.1.1 Écrouissages linéaires

**Écrouissage isotrope**

Pour une traction uniaxiale, le critère de plasticité s'écrit :

$$\left|\sigma_L\right| - R(p) \leq 0$$

où $p$ est la déformation plastique cumulée

$$R(p) = R' p + \sigma^y \text{ et } R' = \frac{E\ E_1}{E - E_1}$$

Le critère s'écrit alors :

$$\left|\sigma_L\right| - R' p - \sigma^y \leq 0$$

Le tenseur des contraintes s'obtient par :

$$\sigma = \boldsymbol{A} . \left(\varepsilon(\boldsymbol{u}) - \varepsilon^p\right) - 3\mathrm{K}\alpha\left(T - T^{ref}\right)\boldsymbol{Id}$$

On en déduit donc l'expression de $\sigma_L$

$$\sigma_L = E(\varepsilon - \alpha T) - E\varepsilon^p \qquad \left(T^{ref} = 0\right)$$

Dans notre cas, $\varepsilon = 0$ donc :

$$\sigma_L = E\varepsilon_L - E\varepsilon^p \qquad \text{avec } \varepsilon_L = -\alpha T$$

Donc :

- Si $\left|\sigma_L\right| - R(p) < 0$ :
  $p=0$ et $\sigma_L = E\varepsilon_L$
- Si $\left|\sigma_L\right| - R(p) = 0$ :

$$p = \left(\frac{\left|\sigma\right| - \sigma^y}{R'}\right)$$

$$\sigma_L = E\varepsilon_L - E\varepsilon^p$$

**Application au trajet de chargement**

**Instant 1 :**

$\sigma = E\varepsilon = 200\mathrm{MPa}$ et $R(p) = R' p + \sigma^y = 100\mathrm{MPa}$ car $p=0$.

On a bien $\sigma_L - R(p) \leq 0$ .

Le critère n'est pas franchi, l'évolution est élastique : $\sigma_L = 100\mathrm{MPa}$ et $N = 100\mathrm{kN}$

**Instant 2 :**

Le critère est atteint :

$$\sigma_L = \frac{E}{E + R'}(R'\varepsilon_L + \sigma^y) = \frac{2\cdot 10^{11}}{2\cdot 10^{11} + 2.02\cdot 10^9}(2.02\cdot 10^9 \times 3.5\cdot 10^{-3} + 2\cdot 10^8) = 205\mathrm{MPa}$$

$N = 102.5\mathrm{kN}$

et $p = 2.475\cdot 10^{-3}$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

**Instant 3 :**
On décharge élastiquement :
$\sigma_L = E\,\varepsilon_L - E\,\varepsilon^p = 2\cdot 10^{11}(1.5\cdot 10^{-3} - 2.475\cdot 10^{-3}) = -195\,MPa$
$N = -97.5\,kN$

**Instant 4 :**
On plastifie à nouveau :
Le critère s'écrit : $|\sigma| - R'\,p - \sigma^y = 0$ avec $p = p_1 + p_2$ où $p_1 = 2.475\cdot 10^{-3}$
On obtient donc :
$$p_2 = \frac{|\sigma| - \sigma^y}{R'} - p_1$$
$$\sigma = -E\,\varepsilon^p = -E(p_1 - p_2)$$
$$\sigma = \left(\frac{R'}{R' + E}\right)\left(-2\,E\;p_1 - \frac{E\,\sigma^y}{R'}\right) = -207.9\text{MPa}$$

Et donc $N = -103.95\text{kN}$

**Instant 5 :**
On décharge élastiquement :
$\sigma_L = E\,\varepsilon_L - E\,\varepsilon^p = 2\cdot 10^{11}(2\cdot 10^{-3} - 1.0395\cdot 10^{-3}) = 192.1\,MPa$
$N = 96.05\,kN$

**Instants 6 et 7 :**
Le raisonnement est identique
On trouve :
$N_{(inst.6)} = 105.87\text{kN}$
$N_{(inst.7)} = -44.13\text{kN}$

**Écrouissage cinématique**
La méthode de calcul est identique, mais dans ce cas, le critère de plasticité s'écrit :
$$\sigma - X_{eq} - \sigma^y \le 0 \text{ avec } X_{eq} = C(\varepsilon^p)_{eq} = \frac{3}{2}C\,\varepsilon^p = \frac{E\;E_t}{E - E_t}\varepsilon^p$$
Avec les notations précédentes, le critère s'écrit :
$\left|\sigma_L - R'\,\varepsilon^p\right| - \sigma^y \le 0$ d'où $\sigma_L = R'\,\varepsilon^p \pm \sigma^y$ (suivant le sens de l'écoulement).

**Application au trajet de chargement**
**Instant 1 :**
Le critère n'est pas franchi, l'évolution est élastique : $\sigma_L = 100\text{MPa}$ et $N = 100\text{kN}$

**Instant 2 :**
Le critère est atteint : $|\sigma_L - R'\,\varepsilon^p| - \sigma^y = 0$
$\sigma_L = R'\,\varepsilon^p + \sigma^y = 2.02\cdot 10^9 \times 2.475\cdot 10^{-3} + 2\cdot 10^8 = 205\text{MPa}$

**Instant 3 :**
On décharge élastiquement :
$\sigma_L = E\,\varepsilon_L - E\,\varepsilon^p = 2\cdot 10^{11}(1.5\cdot 10^{-3} - 2.475\cdot 10^{-3}) = -195\text{MPa}$
$N = -97.5\text{kN}$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

**Instant 4 :**

$|\sigma - R'\varepsilon^p| - \sigma^y = 0$ avec $p_1 = 2.475 \cdot 10^{-3}$

$\varepsilon^p = p_1 - p_2$

$p_2 = p_1 - \dfrac{|\sigma + \sigma^y|}{R'}$

$\sigma = -E\,\varepsilon^p = -E(p_1 - p_2)$

$\sigma = -E\left(\dfrac{|\sigma + \sigma^y|}{R'}\right) = -198\text{MPa}$

$N = -99\text{kN}$

**Instant 5 :**

On décharge élastiquement :

$\sigma_L = E\,\varepsilon_L - E\,\varepsilon^p = 2 \cdot 10^{11}(2 \cdot 10^{-3} - 9.9 \cdot 10^{-4}) = 202\,MPa$

$N = 101\text{kN}$

**Instants 6 et 7 :**

Le raisonnement est identique. On trouve :

$N_{(inst.6)} = 103\text{kN}$

$N_{(inst.7)} = -47\text{kN}$

## 2.1.2 Modèle de Pinto-Menegotto

Ce modèle est décrit dans le Manuel de Référence de *Code_Aster* [R5.03.09] [bib1]. La loi constitutive des aciers est composée de deux parties distinctes : le chargement monotone composé de trois zones successives (élasticité linéaire, palier plastique et écrouissage) et le chargement cyclique où le trajet entre deux points d'inversion (demi-cycle) est décrit par une courbe d'expression analytique du type $\sigma = f(\varepsilon)$.

Comme précédemment les déformations imposées sont des déformations thermiques : $\varepsilon = -\alpha T$

### 2.1.2.1 Cas sans flambage

**Premier chargement**

- Élasticité linéaire : $\sigma = E\varepsilon$

**Instant 1 :**

$N = E\,\varepsilon\,S = 2 \cdot 10^{11} \times 1 \cdot 10^{-3} \times 5 \cdot 10^{-4} = 100\text{kN}$

- Palier plastique : $\sigma = \sigma^y$
- Polynôme de degré 4 : $\sigma = \sigma_u - (\sigma_{su} - \sigma_y^0)\left(\dfrac{\varepsilon_u - \varepsilon}{\varepsilon_u - \varepsilon_h}\right)^4$

**Instant 2 :**

$\varepsilon = 3.5 \cdot 10^{-3} > \varepsilon_h = 2.3 \cdot 10^{-3}$, on utilise le polynôme de degré 4 :

$\sigma = 209.416\text{MPa}$ et $N = 104.708\text{kN}$

**Cycles**

**Demi-cycle 1 :**

On détermine $\zeta_p^0$ :

$\zeta_p^0 = \varepsilon_r^0 - \varepsilon_y^0 = 3.5 \cdot 10^{-3} - 1.10^{-3} = 2.5 \cdot 10^{-3}$ car $\varepsilon_r^0 = \varepsilon_{(inst.2)}$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Puis $\Delta\sigma^0$ :

$$\Delta\sigma^0 = E_h \zeta_p^0 = 2\cdot 10^9 \times 2.5\cdot 10^{-3} = 5\text{MPa}$$

D'où $\sigma_y^1 = \sigma_y^0 \cdot sign(-\zeta_p^0) + \Delta\sigma^0 = -200 + 5 = -195\text{MPa}$

On calcule ensuite $\varepsilon_y^1$ :

$$\varepsilon_y^1 = \varepsilon_r^0 + \frac{\sigma_y^1 - \sigma_r^0}{E} = 3.5\cdot 10^{-3} + \frac{(-195 - 209.416)\,10^6}{2.0\cdot 10^{11}} = 1.477\cdot 10^{-3}$$

On détermine ainsi $\sigma^* = f(\varepsilon^*)$ , définie par :

$$\sigma^* = b\,\varepsilon^* + \left(\frac{1-b}{(1+(\varepsilon^*)^R)^{(1/R)}}\right)\varepsilon^* \qquad \text{, avec } b = \frac{E_h}{E}$$

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_r^0}{\varepsilon_y^1 - \varepsilon_r^0}$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_r^0}{\sigma_y^1 - \sigma_r^0}$$

$$\xi_p^0 = \frac{\zeta_p^0}{|\varepsilon_y^1 - \varepsilon_r^0|} \text{ et } R^I = R_0 - \frac{A_1 \cdot \xi_p^0}{A_2 + \xi_p^0}$$

On obtient $\xi_p^0 = -1.23$ et $R^I = 3.51$

On peut alors calculer la valeur de $\sigma$ aux instants 3 et 4 :

**Instant 3 :**

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon_{(inst.3)} - \varepsilon_r^0}{\varepsilon_y^1 - \varepsilon_r^0} = \frac{1.5\cdot 10^{-3} - 3.5\cdot 10^{-3}}{1.477\cdot 10^{-3} - 3.5\cdot 10^{-3}} = 0.988$$

$$\sigma^* = b\,\varepsilon^* + \left(\frac{1-b}{(1+(\varepsilon^*)^R)^{(1/R)}}\right)\varepsilon^* = 0.01\times 0.988 + \left(\frac{1-0.01}{(1+(0.988)^{3.51})^{(1/3.51)}}\right) = 0.82$$

et $\sigma = \sigma^*(\sigma_y^1 - \sigma_r^0) + \sigma_r^0 = 0.82\times(-195 - 209.416) + 209.416 = -122\,MPa$

d'où $N = -61\text{kN}$

**Instant 4 :**

On utilise la même méthode, avec $\varepsilon = 0$ .

$\varepsilon^* = 1.73$

$\sigma^* = 0.56$

$\sigma = -20\,MPa$

$N = -10\text{kN}$

**Demi-cycle 2 : Instant 5 et 6 :**

La méthode de calcul est identique, on détermine :

$\zeta_p^1$ , $\sigma_y^2$ , $\varepsilon_y^2$ , $\xi_p^1$ , $R^2$ , puis $\sigma_{(inst.5)}^* = f(\varepsilon_{(inst.5)}^*)$ et $\sigma_{(inst.6)}^* = f(\varepsilon_{(inst.6)}^*)$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

et finalement $\sigma_{(inst.5)}$ et $\sigma_{(inst.6)}$.

**Demi-cycle 3 : Instant 7** : Idem

#### 2.1.2.2 Cas avec flambage

**Premier chargement**
Identique au cas précédent.

**Cycles**
**Demi-cycle 1 (compression) :**
La méthode de calcul est identique, mais la valeur de la pente de l'asymptote est modifiée :
On calcule un nouveau coefficient $b_c$ :

$$b_c = a(5.0 - L/D)e\left(b\xi' \frac{E}{\sigma^y - \sigma^\infty}\right) = 0.006 \times (5.0 - 5.9) e^{(0.01 \times 1.477 \cdot 10^{-3} \frac{2 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 10^8 - 1.36 \cdot 10^8})} = -0.0057$$

Il faut ensuite, comme dans le modèle sans flambage, déterminer $\sigma_y^n$. La raisonnement est identique, mais on ajoute une contrainte complémentaire $\sigma_s^*$ afin de positionner correctement la courbe par rapport à l'asymptote.

$$\sigma_s^* = \gamma_s b E \frac{b - b_c}{1 - b_c} = 0.028 \times 0.01 \times 2 \cdot 10^{11} \times \frac{0.01 + 0.0057}{1 + 0.0057} = 0.87\,MPa$$

où $\gamma_s$ est donné par : $\gamma_s = \frac{11.0 - L/D}{10\left(e^{c(L/D)} - 1.0\right)} = 0.028$

**Demi-cycle 2 (traction) :**

- En traction, on adopte un module d'Young réduit :
  $E_r = E\left(a_5 + (1.0 - a_5) e^{-a_6 \xi^{*2}}\right) = 2 \cdot 10^{11} \times (0{,}88 + (1 - 0.88) e^{(-620 \times 1.473 \cdot 10^{-6})}) = 1.99 \cdot 10^{11}\,MPa$
  avec $a_5 = 1.0 + (5.0 - L/D)/7.5 = 0.88$

Le reste de la méthode est identique.

## 2.2 Résultats de référence

Effort normal $N$ constant sur la barre

## 2.3 Incertitude sur la solution

Aucune, la solution est analytique

## 2.4 Références bibliographiques

[1] Manuel de référence du *Code_Aster* [R5.03.09].
[2] S. ANDRIEUX : TD 1 Trois barres thermoélastoplastiques Von Mises parfait. In « Initiation à la thermoplasticité dans le *Code_Aster* », HI-74/96/013 novembre 1996 (manuel de référence du cours).



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Modélisation A

## 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'un élément de barre (BARRE).
Loi de comportement : élastoplasticité avec écrouissage isotrope linéaire - Critère de Von Mises

## 3.2 Caractéristiques du maillage

2 nœuds.
1 maille SEG2

## 3.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification | Instants | Référence | Écart ( % ) |
|---|---|---|---|
| effort normal N | 1 | 1.0000E+05 | 0 |
| effort normal N | 2 | 1.0250E+05 | 0 |
| effort normal N | 3 | –9.7500E+04 | 0 |
| effort normal N | 4 | –1.0395E+05 | 0 |
| effort normal N | 5 | 9.6050E+04 | 0 |
| effort normal N | 6 | 1.0587E+05 | 0 |
| effort normal N | 7 | –4.4129E+04 | 0 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 4 Modélisation B

## 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'un élément de barre (BARRE).
Loi de comportement : élastoplasticité avec écrouissage cinématique linéaire - Critère de Von Mises

## 4.2 Caractéristiques du maillage

2 nœuds.
1 maille SEG2

## 4.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification | Instants | Référence | Écart ( % ) |
|---|---|---|---|
| effort normal N | 1 | 1.0000E+05 | 0 |
| effort normal N | 2 | 1.0250E+05 | 0 |
| effort normal N | 3 | –9.7500E+04 | 0 |
| effort normal N | 4 | –9.9000E+04 | 0 |
| effort normal N | 5 | 1.0100E+05 | 0 |
| effort normal N | 6 | 1.0300E+05 | 0 |
| effort normal N | 7 | –4.7000E+04 | 0 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 5 Modélisation C

## 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'un élément de barre (BARRE).
Loi de comportement : modèle de Pinto-Menegotto sans flambage (valeur de ELAN inférieure à 5).

## 5.2 Caractéristiques du maillage

2 nœuds.
1 maille SEG2

## 5.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification | Instants | Référence | Écart ( % ) |
|---|---|---|---|
| effort normal N | 1 | 1.0000E+05 | 0 |
| effort normal N | 2 | 1.0470E+05 | 0 |
| effort normal N | 3 | –6.0777E+04 | 0 |
| effort normal N | 4 | –9.1430E+04 | 0 |
| effort normal N | 5 | 7.6082E+04 | 0 |
| effort normal N | 6 | 1.0125E+05 | 0 |
| effort normal N | 7 | –3.7965E+04 | 0 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 6 Modélisation D

## 6.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'1 élément de barre (BARRE).
Loi de comportement : modèle de Pinto-Menegotto avec flambage (valeur de ELAN supérieure à 5).

## 6.2 Caractéristiques du maillage

2 nœuds.
1 maille SEG2

## 6.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification | Instants | Référence | Écart ( % ) |
|---|---|---|---|
| effort normal N | 1 | 1.0000E+05 | 0 |
| effort normal N | 2 | 1.0470E+05 | 0 |
| effort normal N | 3 | –6.0556E+04 | 0 |
| effort normal N | 4 | –8.9078E+05 | 0 |
| effort normal N | 5 | 7.6905E+05 | 0 |
| effort normal N | 6 | 1.0125E+05 | 0 |
| effort normal N | 7 | –3.8119E+04 | 0 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 7 Synthèse des résultats

Les résultats calculés par *Code_Aster* sont en excellent accord avec les solutions analytiques.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)