SSNA106 - Cylindre creux soumis à un comportement thermoviscoélastique

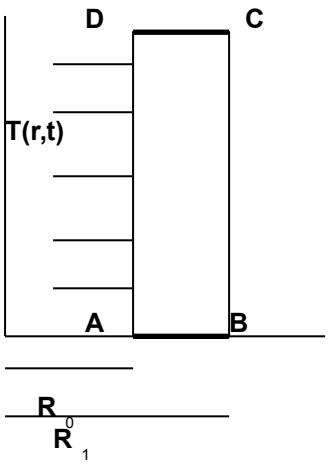
Résumé :

Ce cas-test permet de valider la loi de LEMAITRE implantée dans *Code_Aster* dans le cas de comportement thermoviscoélastique linéaire. Les résultats trouvés sont comparés à une solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



R_0 $1\,m$
R_1 $2\,m$

1.2 Propriétés des matériaux

Module d'Young : $E=1\,MPa$
Coefficient de Poisson : $\nu=0.3$
Coefficient de dilatation : $\alpha=0.7$

Loi de LEMAITRE :

$$g(\sigma,\lambda,T)=\left(\frac{1}{K}\frac{\sigma}{\lambda^{\frac{1}{m}}}\right)^n \text{ avec } \frac{1}{K}=1\,,\ \frac{1}{m}=0\,,\ n=1$$

1.3 Conditions aux limites et chargement

Conditions aux limites :
Le cylindre est bloqué en DY sur les côtés $[AB]$ et $[CD]$.

Chargement :
Le cylindre est soumis à un champ de température $T(r,t)=tr^2$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solutions de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour les solutions de référence

L'ensemble de cette démonstration peut être lue avec plus de détails dans le document [bib1].

Dans le cas d'un matériau isotrope viscoélastique linéaire, on peut décrire le comportement au cours du temps à l'aide de deux fonctions $I(t)$ et $K(t)$ de telle sorte que les déformations et les contraintes peuvent s'écrire :

$$\varepsilon(t) = (I + K) * \frac{d\sigma(t)}{d\tau} - K * \frac{d(Tr(\sigma(t)))}{d\tau}\mathbf{I}_3 + \alpha T(r,t)\mathbf{I}_3$$

où I_3 désigne la matrice identité de rang 3

et $*$ le produit de convolution : $(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$

Le problème thermoélastique équivalent, en passant par le transformée de Laplace est :

$$\begin{cases} \varepsilon^+ = (I^+ + K^+)\sigma^+ - K^+ Tr(\sigma^+)\mathbf{I_3} + \dfrac{\alpha r^2}{p}\mathbf{I_3} \\ \sigma_r^{+\prime} = \dfrac{d\sigma_r^+}{dr} = \dfrac{1}{r}(\sigma_\theta^+ - \sigma_r^+) \\ \varepsilon_z^+ = 0 \\ (r\varepsilon_\theta^+) = \varepsilon_r^+ \end{cases}$$

En éliminant le signe « + » :

$$\begin{cases} \sigma_r' + \dfrac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \\ (I + K)\sigma_z - K(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) + \dfrac{\alpha r^2}{p} = 0 \\ r\left[(I + K)\sigma_\theta - K(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) + \dfrac{\alpha r^2}{p}\right] = (I + K)\sigma_r - K(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) + \dfrac{\alpha r^2}{p} \end{cases}$$

soit,

$$\begin{cases} \sigma_r' + \dfrac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \\ \sigma_z = \dfrac{K}{I}(\sigma_r + \sigma_\theta) - \dfrac{\alpha r^2}{pI} \\ r\left[(I + K)\sigma_\theta - \dfrac{(I + K)K}{I}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \dfrac{\alpha r^2}{p}\right] = (I + K)\sigma_r - \dfrac{(I + K)K}{I}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \dfrac{(I + K)}{I}\dfrac{\alpha r^2}{p} \end{cases}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$(I+K)\sigma_\theta + r\left[(I+K)\sigma_\theta - \frac{(I+K)K}{I}(\sigma_r+\sigma_\theta) + \frac{(I+K)}{I}\frac{\alpha r^2}{p}\right] = (I+K)\sigma_r$$

D'après l'équation d'équilibre, on a $\sigma_\theta = r\sigma_r' + \sigma_r$, on obtient :

$$(I+K)\sigma_r' + r\left[(I+K)(r\sigma_r'+\sigma_r) - \frac{(I+K)K}{I}(2\sigma_r + r\sigma_r') + \frac{(I+K)}{I}\frac{\alpha r^2}{p}\right] = 0,$$

$$\left[(2\sigma_r + r\sigma_r') + \frac{\alpha r^2}{p(I-K)}\right] = 0,$$

$2\sigma_r + r\sigma_r' = A + \frac{\alpha r^2}{p(K-I)}$ ce qui en intégrant par rapport à r donne :

$$\sigma_r = \frac{A}{2} + \frac{B}{r^2} + \frac{\alpha r^2}{4p(K-I)},$$

les conditions aux limites $\sigma_r(r_0) = \sigma_r(r_1) = 0$ donnent :

$$A = -\frac{\alpha}{2p(K-I)}(r_0^2 + r_1^2)$$

$$B = \frac{\alpha r_0^2 r_1^2}{4p(K-I)}$$

On a donc en reprenant les notations initiales :

$$\sigma_r^+ = \frac{\alpha}{4p(I^+-K^+)}\left(r_0^2 + r_1^2 - r^2 - \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_\theta^+ = \frac{\alpha}{4p(I^+-K^+)}\left(r_0^2 + r_1^2 - 3r^2 + \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_z^+ = \frac{\alpha}{p(I^+-K^+)}\left(\frac{K^+}{I^+}\frac{(r_0^2+r_1^2)}{2} - r^2\right)$$

Soit, en prenant la transformée inverse,

$$\sigma = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2k}(1-e^{-bt})\left(r_0^2 + r_1^2 - r^2 - \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2k}(1-e^{-bt})\left(r_0^2 + r_1^2 - 3r^2 + \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{k}\left[(1-e^{-bt})(r_0^2 + r_1^2 - 2r^2) + \frac{r_0^2+r_1^2}{r^2}(1-e^{-Ekt})\right] \end{bmatrix}$$

On en déduit ε_V et w :

$$w(r,t) = \frac{1-2\nu}{Ek}\alpha r\left[(1-e^{-bt})\left[r_0^2 + r_1^2 - \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2}\right] + (1-e^{-Ekt})\left[-\frac{(r_0^2+r_1^2)}{4}\right] + \frac{3Ekt}{4(1-2\nu)}\left[\frac{r_0^2 r_1^2}{r^2} + r^2\right]\right]$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Résultats de référence

Déplacement DX sur le nœud B

2.3 Incertitude sur la solution

0% : solution analytique

2.4 Références bibliographiques

Ph. De BONNIERES, deux solutions analytiques de problèmes axisymétriques en viscoélasticité linéaire et avec contact unilatéral, Note HI-71/8301

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le problème est modélisé en axisymétrie

3.2 Caractéristiques du maillage

120 mailles QUAD4

3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Référence	Tolérance %
$DX(B)$	0.24	1.110	0.1 %

4 Synthèse des résultats

Les résultats calculés par *Code_Aster* sont en accord avec les solutions analytiques mais dépendent très fortement du raffinement du maillage.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)