TTNL101 - Source thermique non-linéaire dans un barreau

Résumé :

Ce test vérifie le calcul thermique en présence d'un chargement de source non-linéaire, dépendant de la température.

La solution de référence est analytique et variable en temps et en espace. La pièce considérée dans les trois modélisations est un barreau symétrique composé d'éléments lumpés.

On vérifie les mailles suivantes :

- Modélisation A :
  - des quadrangles QUAD4, QUAD8, QUAD9 pour une modélisation AXIS
  - des quadrangles QUAD4 pour une modélisation AXIS_DIAG
- Modélisation B :
  - des hexaèdres HEXA8 pour un modélisation 3D_DIAG
- Modélisation C :
  - des triangles TRIA3 pour une modélisation AXIS
  - des triangles TRIA3 pour une modélisation AXIS_DIAG

Les deux extrémités du barreau sont soumises aux conditions d'adiabadicité par défaut. La source volumique de chaleur est une fonction linéaire de la température.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

On considère une structure unidimensionnelle (un barreau dont les faces latérales sont soumises à des conditions adiabatiques) de longueur $2\mathrm{L}$ occupant le domaine $[-L;L]$.

La température étant homogène dans les directions normales au barreau, le calcul peut être considéré comme 1D.

1.2 Propriétés du matériau

$\lambda=2$	conductivité thermique
$\rho C=2$	chaleur volumique

1.3 Conditions aux limites et chargements

Chargement de source volumique non-linéaire, fonction de la température :
$s(T)=2-2\times w\times T$ avec $w=2$

Les conditions aux limites sont adiabatiques sur les faces latérales et de type température imposée nulle à l'extrémité de la barre ; une condition de symétrie est mise en œuvre sur le plan de symétrie (ce qui est équivalent à une condition aux limites adiabatique).

La plage temporelle $[0.;1.]$ est discrétisée en 100 pas de temps (durée de chaque pas de temps égale à 0.01).

1.4 Conditions initiales

Un état initial analytique est fourni. Voir les développements dans le paragraphe détaillant la solution de référence.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Le barreau est soumis à une source de chaleur $r(T)=r_0-r_1 T$, où $r_1>0$ pour des questions de stabilité thermique. Sa température initiale vaut $T_0(x)$ et les extrémités de la barre sont maintenues à une température nulle. L'évolution de température obéit à l'équation de la chaleur :

$$\rho c \dot{T}=\lambda \nabla^2 T+r(T) \ ; \ T(x,0)=T_0(x) \ ; \ T(-L,t)=T(L,t)=0$$

Par normalisation, on peut se ramener sans perte de généralité à l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+1-\omega^2 u \ ; \ u(x,0)=u_0(x) \ ; \ u(-1,t)=u(1,t)=0$$

Pour résoudre cette équation, on s'intéresse d'abord à la solution asymptotique $u_\infty(x)$ qui vérifie :

$$0=\frac{\partial^2 u_\infty}{\partial x^2}+1-\omega^2 u_\infty \ ; \ u_\infty(-1)=u_\infty(1)=0$$

La solution de cette équation différentielle linéaire du second ordre vaut :

$$u_\infty(x)=\frac{1}{\omega^2}\left(1-\frac{\cosh \omega x}{\cosh \omega}\right)$$

La solution de l'équation transitoire est ensuite obtenue par projection de $v=u-u_\infty$ sur les fonctions propres du Laplacien sur $]-1,1[$. Pour simplifier l'analyse, on adopte une condition initiale u_0 égale au premier mode propre, à savoir :

$$u_0(x)=u_\infty(x)-\cos\frac{\pi x}{2}$$

Seul le premier mode étant activé, on est ramené à la résolution d'une équation différentielle en temps du premier ordre, pour obtenir finalement la solution :

$$u(x,t)=u_\infty(x)-\exp\left(-\omega^2 t-\frac{\pi^2}{4}t\right)\cos\frac{\pi x}{2}$$

Enfin, comme précédemment, on remonte de u à T en adoptant un jeu de paramètres spécifique, sans tenir compte des unités, de sorte que $T=u$. Pour cela, on prend $\lambda=r_0=\rho c$, $r_1=\omega^2 r_0$, $L=1$ et $T_0(x)=u_0(x)$.

2.2 Résultats de référence

Le cas-test est mené avec $\omega=\sqrt{2}$ et on examine la température à $t=1$ en un nœud du plan de symétrie $(x=0)$. Les données sont les suivantes :

Conductivité thermique	LAMBDA	2.
Capacité calorifique volumique	RHO_CP	2.
Température initiale	T_0	$u_0(x)=\frac{1}{\omega^2}\left(1-\frac{\cosh \omega x}{\cosh \omega}\right)-\cos\frac{\pi x}{2}$ avec $\omega=\sqrt{2}$
Source de chaleur	r_0 r_1	2. 4.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Grandeur testée	$T\ (\ x=0,t=1\ )$
Valeur de référence	0.258974

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise les modélisations AXIS puis AXIS_DIAG .

Seule une moitié de la barre est représentée (symétrie).

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est co nstitué de 40 quadrangles de même taille. Les types suivants sont considérés successivement :

Modélisations	Mailles
AXIS	QUAD4 QUAD8 QUAD9
AXIS_DIAG	QUAD4

3.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la température à $t=1$ en un nœud du plan de symétrie $(x=0)$

La solution est conforme à la valeur analytique à moins de 0.1 % pour une discrétisation temporelle de 100 pas de temps.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise les modélisations 3D_DIAG .

Seule une moitié de la barre est représentée (symétrie).

4.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est co nstitué de 40 hexaèdr es de même taille de type HEXA8 .

4.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la température à $t=1$ en un nœud du plan de symétrie $(x=0)$

La solution est conforme à la valeur analytique à moins de 0.1 % pour une discrétisation temporelle de 100 pas de temps.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise les modélisations AXIS puis AXIS_DIAG .

Seule une moitié de la barre est représentée (symétrie).

5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est co nstitué de 80 triang les de même taille. Les types suivants sont considérés successivement :

Modélisations	Mailles
AXIS	TRIA3 TRIA6
AXIS_DIAG	TRIA3

5.3 Grand eurs testées et résultats

On teste la température à $t=1$ en un nœud du plan de symétrie $(x=0)$

La solution est conforme à la valeur analytique à moins de 0.1 % pour la modélisation AXIS et de 0.13% pour la modélisation AXIS_DIAG, avec une discrétisation temporelle de 100 pas de temps.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Synthèse des résultats

Les résultats sont conformes à la solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)