SSLV109 - Cylindre plein en pression non uniforme mode 1

Résumé :

Ce test valide tous les éléments de Fourier (triangles et quadrangles de degrés 1 et 2) en élasticité. Les fonctionnalités sont les suivantes :

- pression variable en espace,
- déplacements imposés,
- matrices de rigidité Fourier mode 1,
- contraintes aux nœuds Fourier mode 1,
- recombinaison de Fourier sur les déplacements et contraintes (modélisation A),
- matériau isotrope transverse (modélisation F).

Le test a une solution analytique quadratique en déplacements.

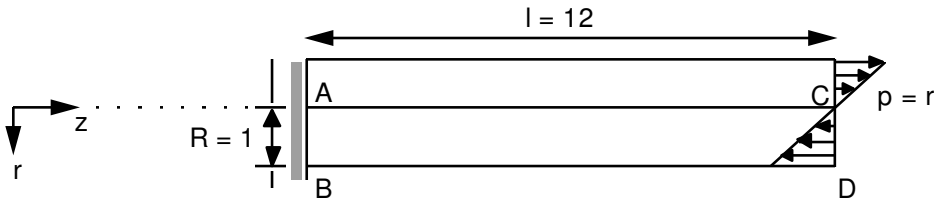
L'intérêt du test réside dans :

- la comparaison entre solution calculée et solution analytique sur les différents éléments finis,
- la comparaison des résultats avec le Code PERMAS sur les éléments TRIA6 (modélisation A).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Le domaine modélisé est $ACDB$ (plan $\theta=0$).

1.2 Propriétés de matériaux

$E=72\,N/m^2$

$\nu=0.3$

1.3 Conditions aux limites et chargements

$$u_r(A)=u_z(A)=u_\theta(A)=0$$
$$u_z(AB)=0$$

$$p=\bar{p}\frac{r}{R}\cos\theta$$

avec $\bar{p}=1.$ et $R=1$ appliqué en $z=12$.

1.4 Conditions initiales

Sans objet pour l'analyse statique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

$$u_r(r,z,\theta)=u(r,z)\cos\theta \quad \text{avec} \quad u(r,z)=\frac{M}{2EI}z^2+\frac{\nu\bar{p}}{2ER}r^2$$

$$u_z(r,z,\theta)=v(r,z)\cos\theta \quad \text{avec} \quad v(r,z)=-\frac{\bar{p}}{2EI}rz$$

$$u_\theta(r,z,\theta)=w(r,z)(-\sin\theta) \quad \text{avec} \quad w(r,z)=\frac{M}{2EI}z^2-\frac{\nu\bar{p}}{2ER}r^2$$

Toutes les contraintes sont nulles sauf $\sigma_{zz}(r,z)=-\frac{\bar{p}}{R}r$.

Les données ont été choisies de telle façon que $u(x)=u(0,l)=1$.

Les déplacements s'écrivent donc ici :

$$u(r,z)=\frac{z^2}{144}+\frac{r^2}{480} \;;\; v(r,z)=-\frac{rz}{72} \;;\; w(r,z)=\frac{z^2}{144}-\frac{r^2}{480}$$

et :

$$\sigma_{zz}(r,z)=-r$$

2.2 Résultats de référence

u, v, w, σ_{zz} en $r=0.,0.5,1.$ $z=0.,6.,12.$

u_r, u_z, u_θ en $r=0.$ $z=6.$ $\theta=45°$

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

2.4 Références bibliographiques

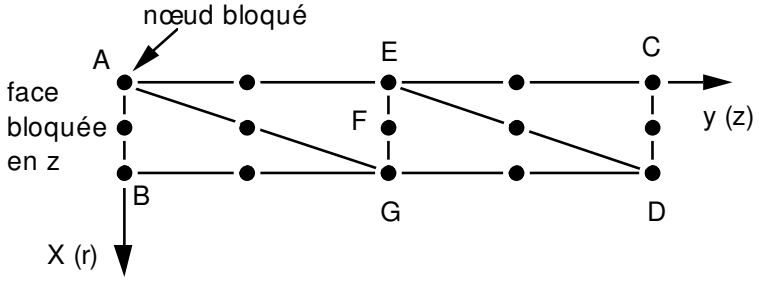
1) PERMAS-HS. Axisymmetric Continua with arbitrary loads. Stuttgart 1985. INTES publication n°224 pp 42 - 49.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des noeuds : $A=N1$ $B=N3$ $C=N13$
$D=N15$ $E=N7$ $F=N8$ $G=N9$



Conditions limites :

DDL_IMPO :	(NOEUD : A	DX = 0. DY = 0. DZ = 0.)
face AB	(GROUP_NO : AB	DY = 0.)

Pression sur la face CD : PRES_REP (GROUP_MA : Bout PRES : p)

p étant défini par AFFE_CHAR_MECA_F par $p(X)=-X$

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 15

Nombre de mailles et types : 4 TRIA6, 1SEG3 sur segment CD

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

Nœud	Grandeur	Référence
B	u	2.0833 10 $^{-3}$
	v	0.
	w	–2.0833 10^{-3}
	σ_{zz}	–1.
E	u	0.25
	v	0.
	w	0.25
	σ_{zz}	0.
F	u	0.250521
	v	–0.04166
	w	0.0249479
	σ_{zz}	–0.5
G	u	0.252083
	v	–0.083333
	w	0.247917
	σ_{zz}	–1.
C	u	1.
	v	0.
	w	1.
	σ_{zz}	0.
D	u	1.00208
	v	–0.16666
	w	0.99791
	σ_{zz}	–1.

4.2 Remarques

La solution analytique est trouvée avec une précision <0.02 pour les déplacements et <0.1 pour les contraintes.

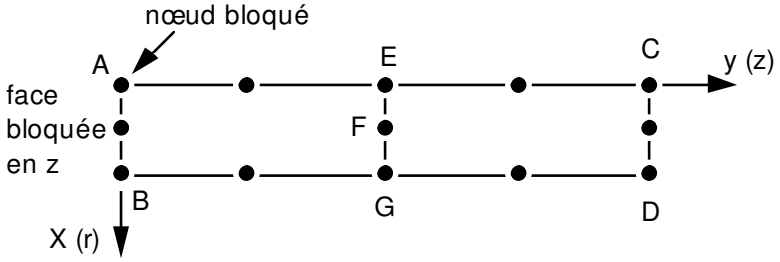
Avec une formule d'intégration numérique à 6 points de GAUSS (au lieu de 3) pour calculer la raideur, on trouverait la relation à 10^{-10} près (comme PERMAS).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds : $A=N1$ $B=N3$ $C=N13$
$D=N15$ $E=N7$ $F=N8$ $G=N9$



Conditions limites :

face AB

```
DDL_IMPO :     ( NOEUD : A           DX = 0.  DY = 0.  DZ = 0.)
               ( GROUP_NO : AB                DY = 0.)
```

Pression sur la face CD : `PRES_REP (GROUP_MA : Bout PRES : p)`

p étant défini par `AFFE_CHAR_MECA_F` par $p(X)=-X$

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 15

Nombre de mailles et types : 2 QUAD8, 1 SEG3 sur segment CD

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées

Nœud	Grandeur	Référence
B	u	2.0833 10 $^{-3}$
	v	0.
	w	–2.0833 10^{-3}
	σ_{zz}	–1.
E	u	0.25
	v	0.
	w	0.25
	σ_{zz}	0.
F	u	0.250521
	v	–0.04166
	w	0.0249479
	σ_{zz}	–0.5
G	u	0.252083
	v	–0.08333
	w	0.247917
	σ_{zz}	–1.
C	u	1.
	v	0.
	w	1.
	σ_{zz}	0.
D	u	1.00208
	v	–0.16666
	w	0.99791
	σ_{zz}	–1.

6.2 Remarques

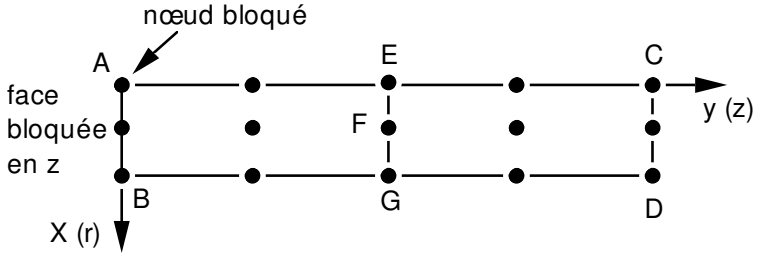
La solution analytique est trouvée avec 10 ou 11 chiffres significatifs.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation C

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds : $A=N1$ $B=N3$ $C=N13$
$D=N15$ $E=N7$ $F=N8$ $G=N9$



Conditions limites :

DDL_IMPO :	(NOEUD : A	DX = 0. DY = 0. DZ = 0.)	
face AB	(GROUP_NO : AB	DY = 0.)	

Pression sur la face CD : PRES_REP (GROUP_MA = Bout, PRES = p)

p étant défini par AFFE_CHAR_MECA_F par $p(x)=-x$

7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds :15

Nombre de mailles et types : 2 QUAD9, 1 SEG3 sur segment CD

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Résultats de la modélisation C

8.1 Valeurs testées

Nœud	Grandeur	Référence
B	u	2.0833 10 $^{-3}$
	v	0.
	w	–2.0833 10^{-3}
	σ_{zz}	–1.
E	u	0.25
	v	0.
	w	0.25
	σ_{zz}	0.
F	u	0.250521
	v	–0.04166
	w	0.0249479
	σ_{zz}	–0.5
G	u	0.252083
	v	–0.08333
	w	0.247917
	σ_{zz}	–1.
C	u	1.
	v	0.
	w	1.
	σ_{zz}	0.
D	u	1.00208
	v	–0.16666
	w	0.99791
	σ_{zz}	–1.

8.2 Remarques

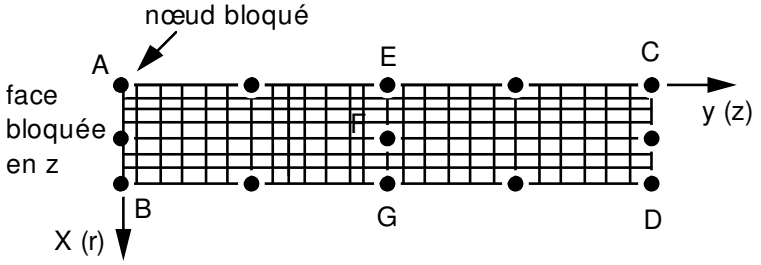
La solution analytique est trouvée avec 10 ou 11 chiffres significatifs.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Modélisation D

9.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds : $A=N1$ $B=N1129$ $C=N1369$
$D=N2169$ $E=N141$ $F=N705$ $G=N1269$



Conditions limites :

```
DDL_IMPO :     ( NOEUD : A              DX = 0.  DY = 0.  DZ = 0.)
```
face AB `( GROUP_NO : AB                DY = 0.)`

Pression sur la face CD : `PRES_REP (GROUP_MA : Bout PRES : p)`

p étant défini par `AFFE_CHAR_MECA_F` par $p(x)=-x$

9.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2169

Nombre de mailles et types : 1920 QUAD4, 8 SEG2 sur segment CD

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

10 Résultats de la modélisation D

10.1 Valeurs testées

Nœud	Grandeur	Référence
B	u	$2.0833\ 10^{-3}$
	v	0.
	w	$-2.0833\ 10^{-3}$
	σ_{zz}	–1.
E	u	0.25
	v	0.
	w	0.25
	σ_{zz}	0.
F	u	0.250521
	v	–0.04166
	w	0.0249479
	σ_{zz}	–0.5
G	u	0.252083
	v	–0.083333
	w	0.247917
	σ_{zz}	–1.
C	u	1.
	v	0.
	w	1.
	σ_{zz}	0.
D	u	1.00208
	v	–0.16666
	w	0.99791
	σ_{zz}	–1.

10.2 Remarques

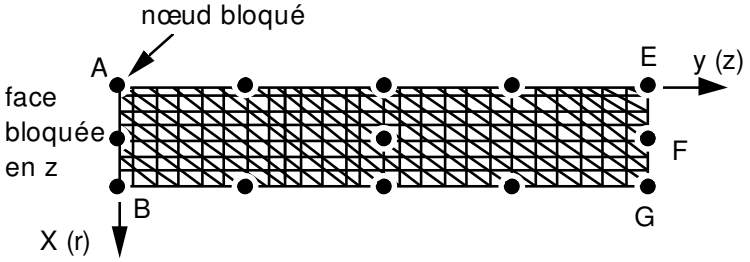
Pour obtenir une précision de l'ordre de 1 % sur les contraintes, il est nécessaire de modéliser la structure très finement (8 éléments radialement et 240 axialement).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

11 Modélisation E

11.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds : $A=N1$ $B=N2421$
$E=N121$ $F=N1331$ $G=N2541$



Conditions limites :

DDL_IMPO : (NOEUD : A DX = 0. DY = 0. DZ = 0.)
face AB (GROUP_NO : AB DY = 0.)

Pression sur la face EG : PRES_REP (GROUP_MA : Bout PRES : p)

p étant défini par AFFE_CHAR_MECA_F par $p(x)=-x$

11.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2541

Nombre de mailles et types : 4800 TRIA3, 20 SEG2 sur segment EG

11.3 Remarques

Pour diminuer le nombre de nœuds, on a modélisé la structure pour $y \leq 6$.
La précision sur les résultats est néanmoins moindre que pour les éléments QUAD4.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

12 Résultats de la modélisation E

12.1 Valeurs testées

Nœud	Grandeur	Référence
B	u	2.0833 10 $^{-3}$
	v	0.
	w	–2.0833 10^{-3}
	σ_{zz}	–1.
E	u	0.25
	v	0.
	w	0.25
	σ_{zz}	0.
F	u	0.250521
	v	–0.04166
	w	0.249479
	σ_{zz}	–0.5
G	u	0.252083
	v	–0.083333
	w	0.247917
	σ_{zz}	–1.

12.2 Remarques

La précision sur les déplacements est inférieure à 3%, celle sur les contraintes inférieure à 2 %.

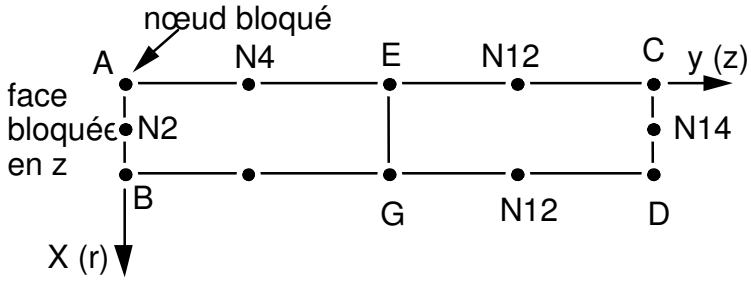
Sur cet exemple, les TRIA3 convergent nettement moins rapidement que les QUAD4 vers la solution exacte.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

13 Modélisation F

13.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds : $A=N1$ $B=N3$ C = N13
$D=N15$ $E=N7$ G = N9



Conditions limites :

face AB

```
DDL_IMPO :     ( NOEUD : A          DX = 0.  DY = 0.  DZ = 0.)
               ( GROUP_NO : AB               DY = 0.)
```

Pression sur la face CD : `PRES_REP (GROUP_MA : Bout PRES : p)`

p étant défini par `AFFE_CHAR_MECA_F` par $p(X)=-X$

13.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 15

Nombre de mailles et types : 2 QUAD8, 1SEG3 sur segment CD

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

14 Résultats de la modélisation F

14.1 Valeurs testées

Nœud	Grandeur	Référence
N2	*u*	2.6041666
	w	–2.6041666
A	σ_{zz}	0.
B	σ_{zz}	–1.
N4	*u*	0.0625
	w	0.0625
E	*u*	0.25
	w	0.25
	σ_{zz}	0.
G	*v*	–0.083333
	σ_{zz}	–1.
N10	*u*	0.5625
	w	0.5625
N12	*v*	–0.125
C	*u*	1.
	w	1.
	σ_{zz}	0.
N14	*v*	–0.083333
D	*v*	–0.166666
	σ_{zz}	–1.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

15 Synthèse des résultats

Les éléments d'ordre 2 donnent la solution analytique.

Les éléments d'ordre 1 convergent lentement vers la solution et nécessitent des maillages très fins. Les temps calculs restent toutefois raisonnables.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)