SSLS141 – Plaque en Flexion et cisaillement

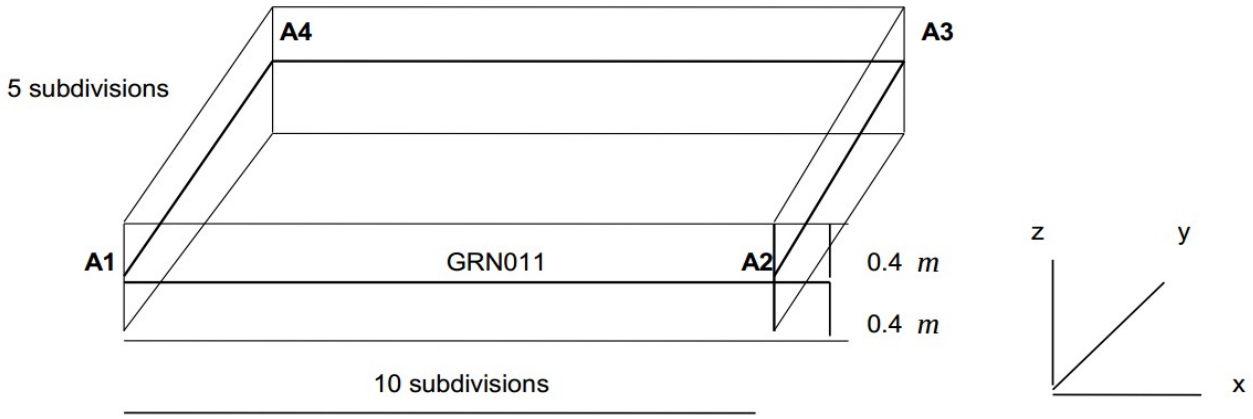
Résumé :

L'objectif de ce test est de valider la réponse en cisaillement des éléments coques DST (QUAD4) et Q4G (QUAD4).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Les coordonnées des points sont données en mètres (m):

$A1(0.0,0)$	$A3(10,5)$
$A2(10.0,0)$	$A4(0,5)$

Tableau 1.1-1

L'épaisseur de la plaque est $e=0,8\,m$

1.2 Propriétés du matériau

Le matériau a un comportement élastique isotrope :

Module d'Young : $E=200000\,MPa$

Coefficient de Poisson : $\nu=0$

1.3 Conditions aux limites et chargements

L'arête $A1A4$ est encastrée.
On applique une force nodale $Fz=-1000\,N$ sur l'arête $A2A3$.

1.4 Modélisations

Les différentes modélisations sont :

Modélisation	Type d'élément	Mailles	Nombre d'éléments du maillage
A	DST	QUAD4	50

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

B	DST (multi-couches, $ncou=2$)	QUAD4	50
C	Q4G	QUAD4	800
D	Q4G (multi-couches, $ncou=2$)	QUAD4	800
E	DST	TRIA3 (maillage régulier)	1600
F	DST	TRIA3 (maillage irrégulier)	1600

Tableau 1.4-1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Grandeurs et résultats de référence

2.1.1 Modèle analytique de la plaque

On considère que la réponse de la plaque correspond à la réponse d'une poutre en console (car $\nu=0$). Dans ce cas, le déplacement de la plaque est donné par les déplacements de chaque section de plaque, suivant la direction $x(u)$, $z(w)$ et leur rotation par rapport à l'axe $y(\theta_y)$.

$$U_x(x,z)=u(x)+z\,\theta_y(x) \quad U_z(x,z)=w(x)$$

En tout point , les déformations sont:

$$\varepsilon_{xx}(x,z)=u'+z\,\theta_y' \text{ et } 2\,\varepsilon_{xz}(x,z)=\theta_y+w'=\gamma_z$$

La poutre est encastrée en $x=0$ et soumis à une force verticale F en $x=L$.

La résolution (principe des travaux virtuels et l'équilibre des forces) donne l'expression des efforts généralisés dans le cas d'une réponse linéaire élastique:
N est la force axiale, M_y le moment suivant l'axe y et T l'effort tranchant.

$$\begin{array}{ll} N(x)=E\,A\,u'(x) & \text{et} \quad N(x)=0 \\ M_y(x)=E\,I\,\theta_y'(x) & M_y(x)=-F(L-x) \\ T(x)=G\,k\,A\,\gamma_z & T(x)=F \end{array}$$

où le paramètre k est le facteur de correction en cisaillement

avec les conditions aux limites, on en déduit les déplacements $u, w \text{ et } \theta_y$:

$$u(x)=0\ ,\ w(x)=\frac{F}{6\,E\,I}x^2(3\,L-x)+\frac{F\,x}{G\,k\,A}\ ,\ \theta_y(x)=\frac{F}{E\,I}\frac{x(x-2\,L)}{2}$$

Les déformations et contraintes sont:

$$\varepsilon_{xx}=z\frac{-F}{E\,I}(L-x) \text{ et } \sigma_{xx}=z\frac{-F}{I}(L-x)$$

$$2\,\varepsilon_{xz}=\frac{F}{G\,k\,A}=\gamma_z \text{ et } \sigma_{xz}=\frac{-F}{A}6(z^2/h^2-1/4)$$

où h est la hauteur de la plaque. La distribution des contraintes en cisaillement est parabolique dans l'épaisseur de la plaque pour respecter les conditions de surface libre
($\sigma_{xz}(z=h/2)=\sigma_{xz}(z=-h/2)=0$).

La réponse verticale en déplacement du point $x=L$ est:

$$U_z(L)=\frac{F}{3\,E\,I}L^3+\frac{F\,L}{G\,k\,A}$$

2.2 Incertitudes sur la solution

La solution de référence est analytique. Il n'y a donc pas d'incertitude.

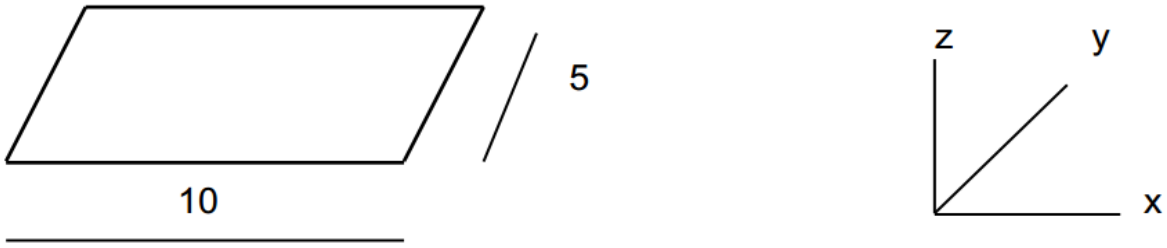
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est constitué de 1 plaque avec une couche.
Les éléments utilisés sont des éléments de plaque DST.

3.2 Caractéristiques du maillage



Le maillage est régulier. On a 10 subdivisions selon x et 5 subdivisions selon y ; soit au total 50 mailles DSQ (QUAD4) et 66 nœuds.

3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
DZ ($A3$)	'ANALYTIQUE'	-3.92125E-05	0.001
MXX($A1$)	'ANALYTIQUE'	10000	0.001
QX($A1$)	'ANALYTIQUE'	-1000	0.001
SIXX($M1, PT1, SSPT2$)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX($M1, PT1, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	1981.17	0.001
SIXZ($M1, PT1, SSPT2$)	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ($M1, PT1, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX($M50, PT2, SSPT2$)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX($M50, PT2, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	91768.83	0.001
SIXZ($M50, PT2, SSPT2$)	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ($M50, PT2, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX($M50, PT2, SSPT2$)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX($M50, PT2, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	4.58844E-07	0.001
EPXZ($M50, PT2, SSPT2$)	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001
EPXZ($M50, PT2, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001

Tableau 3.3-1

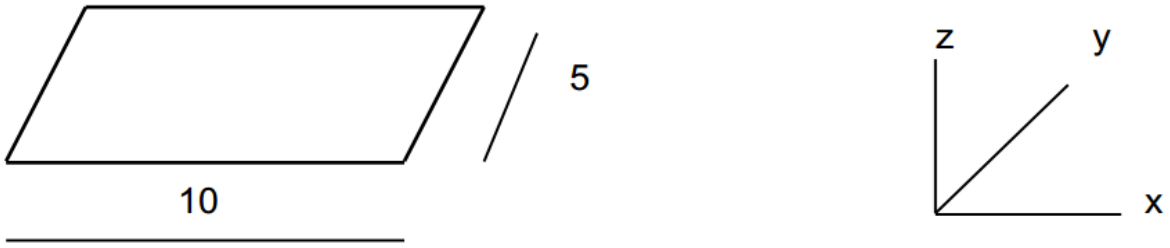
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est constitué de 1 plaque avec 2 couches.
Les éléments utilisés sont des éléments de plaque DST.

4.2 Caractéristiques du maillage



Le maillage est régulier. On a 10 subdivisions selon x et 5 subdivisions selon y ; soit au total 50 mailles DST (QUAD4) et 66 nœuds.

4.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
DZ ($A3$)	'ANALYTIQUE'	-3.92125E-05	0.001
MXX($A1$)	'ANALYTIQUE'	10000	0.001
QX($A1$)	'ANALYTIQUE'	-1000	0.001
SIXX($M1, PT1, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	0.	1.0E-8
SIXX($M1, PT1, SSPT6$)	'ANALYTIQUE'	1981.17	0.001
SIXZ($M1, PT1, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ($M1, PT1, SSPT6$)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX($M50, PT2, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX($M50, PT2, SSPT6$)	'ANALYTIQUE'	91768.83	0.001
SIXZ($M50, PT2, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ($M50, PT2, SSPT6$)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX($M50, PT2, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX($M50, PT2, SSPT6$)	'ANALYTIQUE'	4.58844E-07	0.001
EPXZ($M50, PT2, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001
EPXZ($M50, PT2, SSPT6$)	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001

Tableau 4.3-1

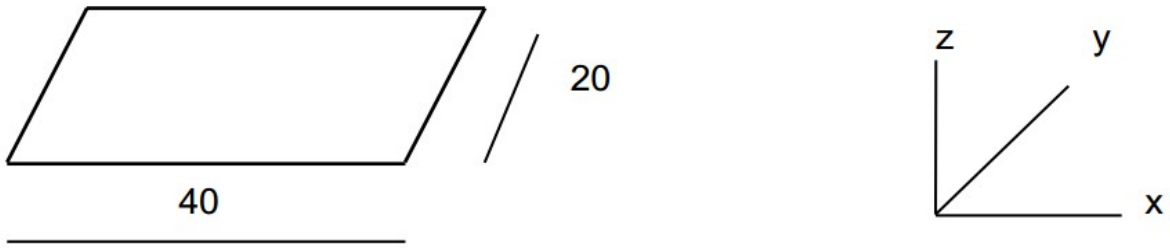
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est constitué de 1 plaque avec une couche.
Les éléments utilisés sont des éléments de plaque Q4G.

5.2 Caractéristiques du maillage



Le maillage est régulier. On a 40 subdivisions selon x et 20 subdivisions selon y ; soit au total 800 mailles Q4G (QUAD4) et 861 nœuds.

5.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
DZ ($A3$)	'ANALYTIQUE'	-3.92125E-05	0.001
MXX($A1$)	'ANALYTIQUE'	10000	0.02
QX($A1$)	'ANALYTIQUE'	-1000	0.001
SIXX($M141, PT1, SSPT2$)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX($M141, PT1, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	2839.04	0.3
SIXZ($M141, PT1, SSPT2$)	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ($M141, PT1, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX($M901, PT2, SSPT2$)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX($M901, PT2, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	93254.70	0.01
SIXZ($M901, PT2, SSPT2$)	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ($M901, PT2, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX($M901, PT2, SSPT2$)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX($M901, PT2, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	4.66273E-07	0.01
EPXZ($M901, PT2, SSPT2$)	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001
EPXZ($M901, PT2, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001

Tableau 5.3-1

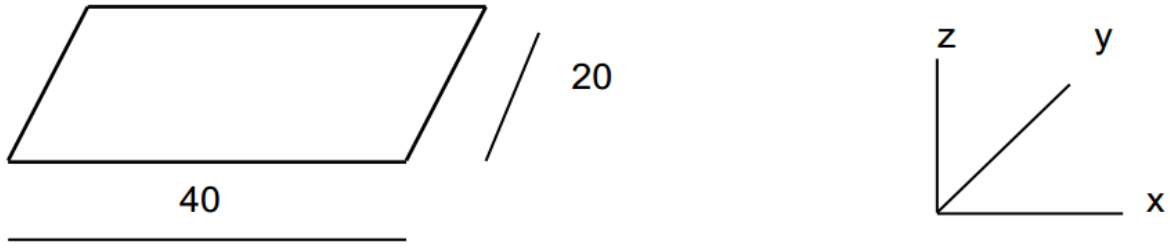
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est constitué de 1 plaque avec 2 couches.
Les éléments utilisés sont des éléments de plaque Q4G.

6.2 Caractéristiques du maillage



Le maillage est régulier. On a 40 subdivisions selon x et 20 subdivisions selon y ; soit au total 800 mailles Q4G (QUAD4) et 861 nœuds.

6.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
DZ($A3$)	'ANALYTIQUE'	-3.92125E-05	0.001
MXX($A1$)	'ANALYTIQUE'	10000	0.02
QX($A1$)	'ANALYTIQUE'	-1000	0.001
SIXX($M141, PT1, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX($M141, PT1, SSPT6$)	'ANALYTIQUE'	2839.04	0.3
SIXZ($M141, PT1, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ($M141, PT1, SSPT6$)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX($M901, PT2, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX($M901, PT2, SSPT6$)	'ANALYTIQUE'	93254.70	0.01
SIXZ($M901, PT2, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ($M901, PT2, SSPT6$)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX($M901, PT2, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX($M901, PT2, SSPT6$)	'ANALYTIQUE'	4.66273E-07	0.01
EPXZ($M901, PT2, SSPT3$)	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001
EPXZ($M901, PT2, SSPT6$)	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Tableau 6.3-1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est constitué de 1 plaque avec 1 couche.
Les éléments utilisés sont des éléments de plaque DST.

7.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est régulier. On a 40 subdivisions selon x et 20 subdivisions selon y ; soit au total 1600 mailles DST (TRIA3) et 861 nœuds.

7.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
DZ ($A3$)	'ANALYTIQUE'	-3.92125E-05	0.13
DZ ($A2$)	'ANALYTIQUE'	-3.92125E-05	0.13
MXX($A4$)	'ANALYTIQUE'	10000	0.33
MXX($A1$)	'ANALYTIQUE'	10000	0.02

Tableau 7.3-1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Modélisation F

8.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est constitué de 1 plaque avec 1 couche.
Les éléments utilisés sont des éléments de plaque DST.

8.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est libre. On a 1600 mailles DST (TRIA3) et 853 nœuds.

8.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
DZ (*A3*)	'ANALYTIQUE'	-3.92125E-05	0.011
DZ (*A2*)	'ANALYTIQUE'	-3.92125E-05	0.009
MXX(*A4*)	'ANALYTIQUE'	10000	0.053
MXX(*A1*)	'ANALYTIQUE'	10000	0.022

Tableau 8.3-1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Synthèse des résultats

- Pour une plaque avec une ou plusieurs couches, les éléments DST (QUAD4) donnent de bonnes estimations des déplacements, forces généralisées, déformations et contraintes (Modélisation A et B).
- Pour un maillage plus fin, les éléments Q4G (QUAD4) conduisent à des erreurs un peu plus importantes, en particulier pour les contraintes axiales SIXX (Modélisation C et D).
- Les deux types d'éléments DST (QUAD4) et Q4G (QUAD4) donnent respectivement les mêmes résultats avec une (Modélisation A et C) ou deux couches (Modélisation B et D).
- Les éléments DST (TRIA3) donnent des résultats beaucoup moins bons (Modélisations E et F). En particulier on met en évidence des effets de maillage importants : les modélisations E et F ont le même nombre d'éléments mais le maillage E est réglé alors que le maillage F est libre. L'erreur sur la flèche est de 13 % pour E et 1 % pour F. On note des écarts analogues sur les moments. Il y a également une forte dissymétrie sur les moments entre les points $A1$ et $A4$ pour les 2 maillages. Ceci est du au fait que les maillages ne sont pas symétriques par rapport au chargement. Sur un maillage symétrique le problème n'apparaît plus. Cet élément a donc un comportement en flexion très dépendant du maillage, ce qui mérite sans doute une étude plus approfondie.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)