# SSLP311 - Fissure centrale oblique dans une plaque rectangulaire finie, à deux matériaux, soumise à traction uniforme

**Résumé :**

Ce test est issu de la validation indépendante de la version 3 en mécanique de la rupture.

Il s'agit d'un test bidimensionnel en statique avec bi-matériau en présence d'une fissure d'interface interne oblique.

Le comportement de la structure (bi-matériau) est élastique linéaire isotrope.

Le cas test comprend quatre modélisations en contraintes planes dans lesquelles l'influence de l'inclinaison de la fissure $\theta$ est étudiée (4 cas).

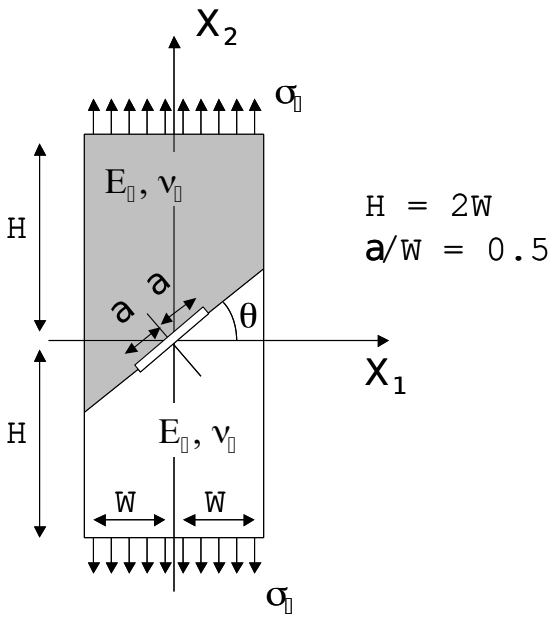
Le calcul des facteurs d'intensité des contraintes n'est pas disponible pour une fissure située à l'interface d'un bi-matériau ; la comparaison à la solution de référence se fait donc sur le taux de restitution de l'énergie uniquement, calculé avec l'opérateur CALC_G.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Problème de référence

## 1.1 Géométrie




On considère 4 valeurs de l'angle $\theta$ : 15°, 30°, 45° et 60°.
Les autres dimensions sont choisies telles que $H=2\mathrm{W}=4\mathrm{a}$.
La valeur de $a$ vaut $1.\mathrm{E}-3\,m$.

## 1.2 Propriétés des matériaux

**Matériau n° 1**

Élastique, linéaire, isotrope, module d'Young $E_1=2\mathrm{E}{+}12\,Pa$ et coefficient de Poisson $\nu_1=0{,}3$.

**Matériau n° 2**

Élastique, linéaire, isotrope, module d'Young $E_2=2\mathrm{E}{+}11\,Pa$ et coefficient de Poisson $\nu_2=0{,}3$.

## 1.3 Conditions aux limites et chargement

- Les modes rigides sont bloqués par les conditions aux limites suivantes :
  $UX=UY=0$ au coin inférieur gauche du modèle.
  $UY=0$ sur le bord inférieur.
- Chargement : tension uniforme $\sigma_{yy}=\sigma_0$ sur le bord supérieur.
  La valeur de $\sigma_0$ est $100\,MPa$.


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Solution de référence

## 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Méthode des éléments de frontière, avec des éléments quadratiques [bib1].

Le calcul de $K_I$ et $K_{II}$ est effectué par une intégrale de contour (intégrale M [bib2]) dans laquelle interviennent les contraintes et déplacements calculés dans la pièce, ainsi que les contraintes et déplacements déduits de solutions asymptotiques définies analytiquement, dans lesquelles $K_I$ et $K_{II}$ sont alternativement nuls.

A titre de comparaison, le calcul des $K$ est également effectué par la méthode d'extension virtuelle.

## 2.2 Résultats de référence

Les résultats de la solution de référence sont présentés dans le tableau ci-dessous, pour les différentes valeurs de l'angle et pour les deux extrémités de la fissure, avec $F_j = \dfrac{K_j}{\sigma_0\sqrt{\pi a}} \quad (j = I, II)$.

| Méthode | | Côté gauche | | | | Côté droit | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\theta=15°$ | $\theta=30°$ | $\theta=45°$ | $\theta=60°$ | $\theta=15°$ | $\theta=30°$ | $\theta=45°$ | $\theta=60°$ |
| intégrale | $F_I$ | 1,0115 | 0,7868 | 0,5211 | 0,2770 | 1,1266 | 0,9910 | 0,7646 | 0,4919 |
| $M$ | $F_{II}$ | 0,4434 | 0,6244 | 0,6723 | 0,5804 | 0,0862 | 0,2961 | 0,4056 | 0,4057 |
| extension | $F_I$ | 1,0110 | 0,7864 | 0,5210 | 0,2769 | 1,1260 | 0,9904 | 0,7643 | 0,4919 |
| virtuelle | $F_{II}$ | 0,4429 | 0,6240 | 0,6720 | 0,5801 | 0,0865 | 0,2960 | 0,4055 | 0,4056 |

La relation entre le taux global de restitution de l'énergie $G$ et les $K_j$ s'écrit comme suit [bib3] :

$$G = \beta\,(K_I^2 + K_{II}^2)$$

avec :

$$\kappa_i = \frac{3-\nu_i}{1+\nu_i}$$

$$\beta = \frac{1}{16\,C\,h^2(\alpha\pi)}\left(\frac{1+\kappa_1}{\mu_1}+\frac{1+\kappa_2}{\mu_2}\right) \text{ et } \quad \mu_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}$$

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}\ln\left[\left(\frac{\kappa_1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)\left(\frac{\kappa_2}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_1}\right)^{-1}\right]$$

## 2.3 Incertitude sur la solution

Estimée à moins de 0,1%. On note que l'écart entre la méthode des intégrales de contour et la méthode d'extension virtuelle est généralement inférieur à 0,05 %.

## 2.4 Références bibliographiques

1) Stress intensity factor analysis of interface crack using boundary element method. Application of contour-integral method. N. MIYAZAKI, T. IKEDA, T.SODA et T. MUNAKATA. Engng.Fract.Mechs., 45, n°5, 599-610, 1993.

2) An analysis of interface cracks between dissimilar isotropic materials using conservation integrals in elasticity. J. F. YAU et T. C. CHANG. Engng.Fract.Mechs., 20, 423-432, 1984.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3) The strength of adhesive joints using the theory of cracks. B. M. MALYSHEV et R. L. SALGANIK. Int.J.Fract.Mech., 1, 114-128, 1965.

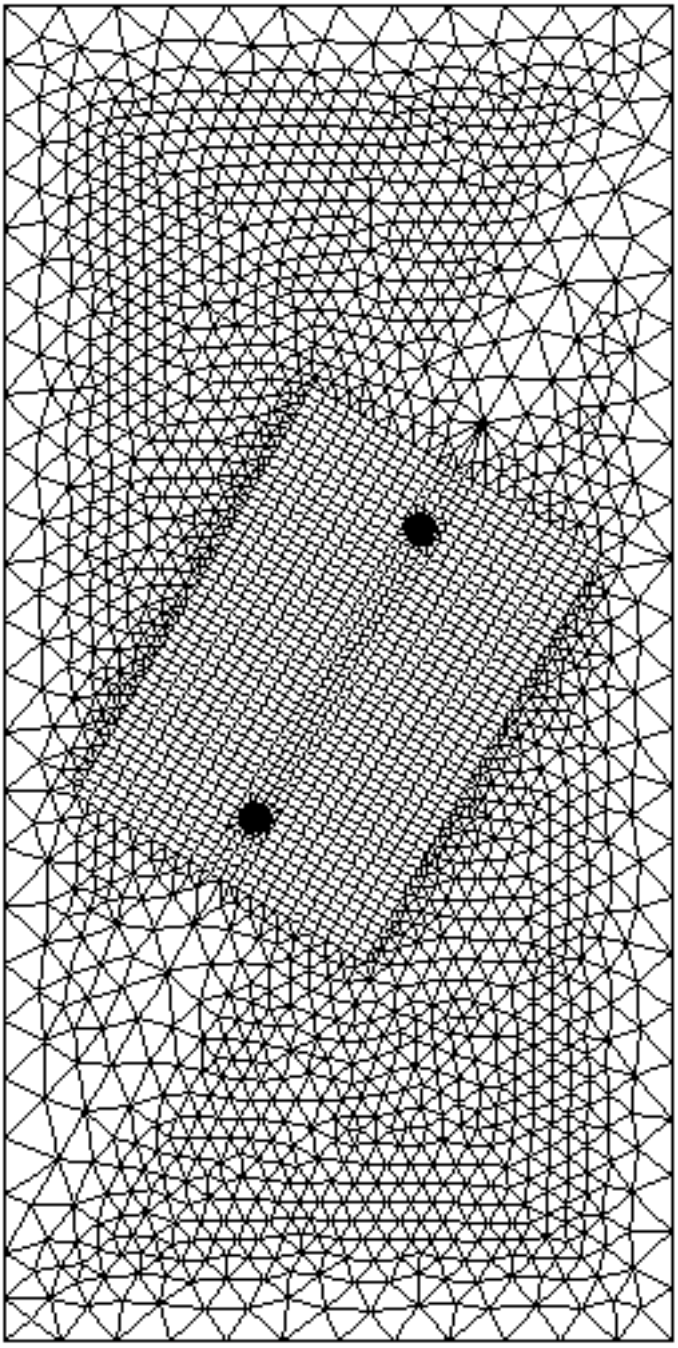


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Modélisation A

## 3.1 Caractéristiques de la modélisation

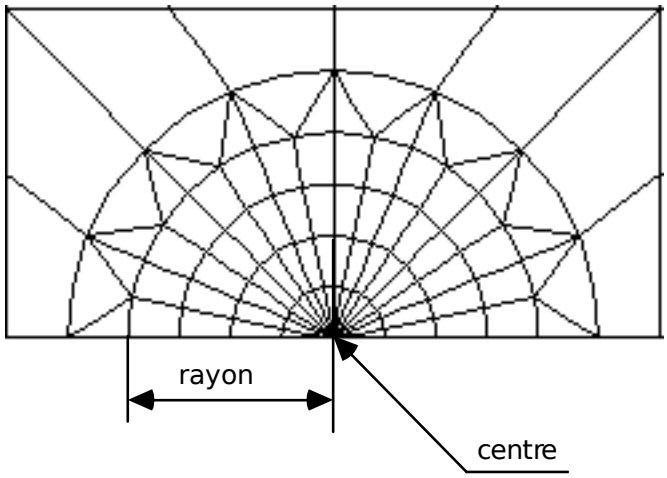
Les différentes modélisations sont identiques à part l'inclinaison de la fissure.



**Maillage complet pour un angle** $\beta = 60°$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)




**Zoom sur la pointe de fissure**

Le rayon vaut $7.5\mathrm{E}-5\,m$ .

Il y a quatre couronnes définies par la commande CALC_G :

couronne 1 : $Rinf=0.$ $R\sup=1.875\mathrm{E}-5\mathrm{m}$
couronne 2 : $Rinf=1.875\mathrm{E}-5\mathrm{m}$ $R\sup=3.750\mathrm{E}-5\mathrm{m}$
couronne 3 : $Rinf=3.750\mathrm{E}-5\mathrm{m}$ $R\sup=5.625\mathrm{E}-5\mathrm{m}$
couronne 4 : $Rinf=5.625\mathrm{E}-5\mathrm{m}$ $R\sup=7.500\mathrm{E}-5\mathrm{m}$

La direction de propagation est définie par : $\cos\theta,\sin\theta$

## 3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 10676 nœuds et 4584 éléments, dont 1392 éléments QUA8 et 3168 éléments TRI6.

## 3.3 Fonctionnalités testées

Le calcul de $K_I$ et $K_{II}$ n'est pas valide pour un bimatériau : l'option K ne peut être utilisée et seul le calcul du taux de restitution de l'énergie est possible.

## 3.4 Grandeurs testées et résultats

### 3.4.1 Valeurs testées

| Identification | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|
| Extrémité gauche, $\theta=15°$ | | | |
| $G$ , couronne 1 | 9,67362E+1 | 9,2428E+1 | -4,45 |
| $G$ , couronne 2 | 9,67362E+1 | 9,6392E+1 | -0,356 |
| $G$ , couronne 3 | 9,67362E+1 | 9,6417E+1 | -0,330 |
| $G$ , couronne 4 | 9,67362E+1 | 9,6421E+1 | -0,326 |
| $K_I$ | 5,6694E+6 | - | - |
| $K_{II}$ | -2,4852E+6 | - | - |
| Extrémité droite, $\theta=15°$ | | | |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $G$ , couronne 1 | 1,0125E+2 | 9,6763E+1 | 4,33 |
| $G$ , couronne 2 | 1,0125E+2 | 1,0093E+2 | 0,315 |
| $G$ , couronne 3 | 1,0125E+2 | 1,0095E+2 | 0,295 |
| $G$ , couronne 4 | 1,0125E+2 | 1,0095E+2 | 0,291 |
| $K_I$ | 6,3145E+6 | - | - |
| $K_{II}$ | 4,8309E+5 | - | - |

### 3.4.2 Remarques

Pour obtenir le $G$ sur le fond de fissure, on calcule le taux de restitution d'énergie à l'aide de la relation entre $G$ et les $K_j$ [bib3] :

$$\kappa_1=\kappa_2=2.076923$$
$$\mu_1=7.6923\,E+11$$
$$\mu_2=7.6923\,E+10$$
$$\alpha=-9.37742\,E-2$$
$$\beta=2.524488\,E-12$$
$$G=\beta\,(K_I^2+K_{II}^2)$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 4 Modélisation B

## 4.1 Valeurs testées

| Identification | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|
| Extrémité gauche, $\theta=30°$ | | | |
| $G$ , couronne 1 | 8,0017E+1 | 7,6431E+1 | -4,48 |
| $G$ , couronne 2 | 8,0017E+1 | 7,9707E+1 | -0,387 |
| $G$ , couronne 3 | 8,0017E+1 | 7,9730E+1 | -0,358 |
| $G$ , couronne 4 | 8,0017E+1 | 7,9734E+1 | -0,353 |
| $K_I$ | 4,4100E+6 | - | - |
| $K_{II}$ | -3,499E+6 | - | - |
| Extrémité droite, $\theta=30°$ | | | |
| $G$ , couronne 1 | 8,48417E+1 | 8,1080E+1 | -4,433 |
| $G$ , couronne 2 | 8,48417E+1 | 8,4583E+1 | -0,305 |
| $G$ , couronne 3 | 8,48417E+1 | 8,4602E+1 | -0,282 |
| $G$ , couronne 4 | 8,48417E+1 | 8,4602E+1 | -0,282 |
| $K_I$ | 5,5545E+6 | - | - |
| $K_{II}$ | 1,6596E+6 | - | - |

# 5 Modélisation C

## 5.1 Valeurs testées

| Identification | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|
| Extrémité gauche, $\theta=45°$ | | | |
| $G$ , couronne 1 | 5,73826E+1 | 5,48161E+1 | -4,473 |
| $G$ , couronne 2 | 5,73826E+1 | 5,71687E+1 | -0,373 |
| $G$ , couronne 3 | 5,73826E+1 | 5,71865E+1 | -0,342 |
| $G$ , couronne 4 | 5,73826E+1 | 5,7189E+1 | -0,337 |
| $K_I$ | 2,92076E+6 | - | - |
| $K_{II}$ | -3,7682E+6 | - | - |
| Extrémité droite, $\theta=45°$ | | | |
| $G$ , couronne 1 | 5,94122E+1 | 5,7039E+1 | -3,994 |
| $G$ , couronne 2 | 5,94122E+1 | 5,9505E+1 | 0,157 |
| $G$ , couronne 3 | 5,94122E+1 | 5,9516E+1 | 0,175 |
| $G$ , couronne 4 | 5,94122E+1 | 5,9518E+1 | 0,179 |
| $K_I$ | 4,28557E+6 | - | - |
| $K_{II}$ | 2,27338E+6 | - | - |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 6 Modélisation D

## 6.1 Valeurs testées

| Identification | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|
| Extrémité gauche, $\theta=60°$ | | | |
| $G$, couronne 1 | 3,28015E+1 | 3,10680E+1 | 5,285 |
| $G$, couronne 2 | 3,28015E+1 | 3,24037E+1 | 1,213 |
| $G$, couronne 3 | 3,28015E+1 | 3,24140E+1 | 1,181 |
| $G$, couronne 4 | 3,28015E+1 | 3,24156E+1 | 1,177 |
| $K_I$ | 1,55258E+6 | - | - |
| $K_{II}$ | 3,2531E+6 | - | - |
| Extrémité droite, $\theta=60°$ | | | |
| $G$, couronne 1 | 3,22436E+1 | 3,11825E+1 | 3,291 |
| $G$, couronne 2 | 3,22436E+1 | 3,25321E+1 | 0,895 |
| $G$, couronne 3 | 3,22436E+1 | 3,25383E+1 | 0,914 |
| $G$, couronne 4 | 3,22436E+1 | 3,25398E+1 | 0,919 |
| $K_I$ | 2,75709E+6 | - | - |
| $K_{II}$ | 2,27394E+6 | - | - |

# 7 Synthèse des résultats

Le calcul de $K_I$ et $K_{II}$ n'est pas disponible pour une fissure située à l'interface d'un bimatériau, et la comparaison se fait donc directement sur le taux de restitution de l'énergie $G$.

Le calcul de $G$ n'est pas précis sur la première couronne dans tous les cas d'inclinaison de la fissure, ce qui confirme qu'il faut éviter de prendre un rayon $Rinf$ nul. En ce qui concerne les autres couronnes, les écarts sont de l'ordre de 0,4%. Pour le cas d'inclinaison $\theta=60°$ l'écart dépasse 1 %. Dans l'ensemble, les résultats sont satisfaisants pour $G$.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)