SSLP106 – Massif rectangulaire en flexion pure (test des éléments QUAD4 sous intégrés)

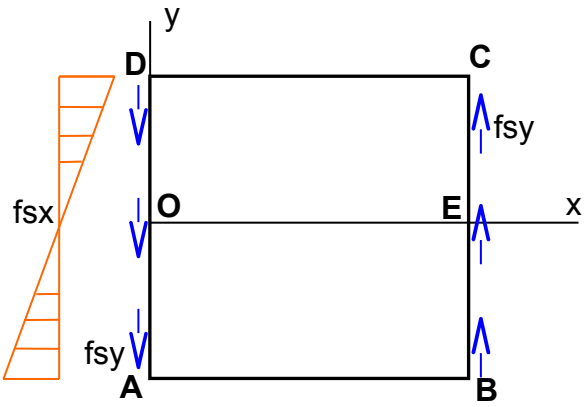
Résumé :
On teste les éléments finis sous intégrés à un point de Gauss stabilisés par la méthode *assumed strain* sur un calcul de flexion pure en déformation plane.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

La géométrie est un carré de côté $L=100\,\mathrm{mm}$.



1.2 Propriétés du matériau

Le matériau est élastique incompressible et a pour propriétés:

$$E=100\,\mathrm{MPa}$$
$$\nu=0.4999$$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Compte tenu de la nature antisymétrique du problème, on ne modélise que la moitié du massif avec les conditions aux limites suivantes :

Sur OE :

$$DX(OE)=0$$

Sur OD :

$$DX(O)=DY(O)=0$$
$$DX(D)=0$$
$$fsx=\frac{8y}{L}.\sigma_d$$
$$fsy=-\left(1-\frac{4y^2}{L^2}\right).\sigma_d$$

Sur BC :

$$fsy=+\left(1-\frac{4y^2}{L^2}\right).\sigma_d$$

Avec σ_d une contrainte donnée, qu'on prendra égale à 1 dans le test. $\sigma_d=1\,\mathrm{MPa}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

La solution de référence provient d'une solution analytique de [Bib1] :

$$u_x(x,y)=\frac{4(1-\nu^2)}{EL^2}.\left(y.(x^2-2.\mathrm{Lx})+\frac{2+\nu(1-\nu)}{3}.y.(\frac{L^2}{4}-y^2)\right).\sigma_d \quad (1)$$

Et suivant y :

$$u_y(x,y)=\frac{4(1-\nu^2)}{EL^2}\left(Lx^2-\frac{x^3}{3}-\nu.(1-\nu).y^2.(x-L)+\frac{4+5\nu.(1-\nu)}{12}.xL^2\right).\sigma_d \quad (2)$$

2.2 Grandeurs et résultats de référence

En appliquant 1, on trouve le déplacement suivant x au point C :
$u_x(L,L/2)=-1.5\,\mathrm{mm}$
Et en appliquant 2, on trouve le déplacement suivant y au point C : $u_y(L,L/2)=4.25\,\mathrm{mm}$

2.3 Références bibliographiques

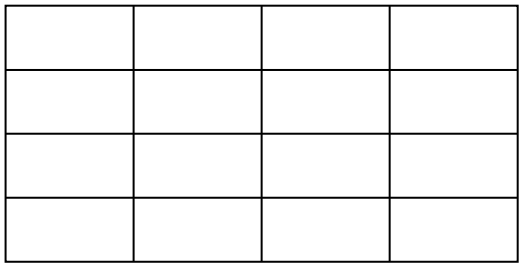
[Bib1] Timoshenko & Woinowsky-Krieger, « Theory of plates and shells », McGrawHill, 1964.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation en déformations planes sur le maillage $2D$ suivant :



3.2 Caractéristiques du maillage

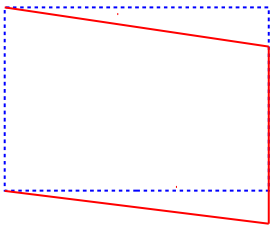
Nombre de nœuds : 25
Nombres et types de mailles : 16 SEG2, 16 QUAD4 avec les éléments D_PLAN_SI.

3.3 Grandeurs testées et résultats

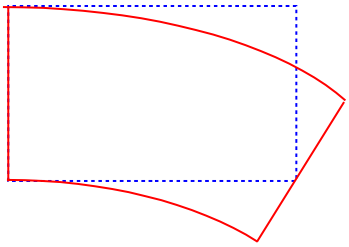
Valeur testée	Référence	Type	*Écart*
Déplacement DX en C	-1,25	Analytique	1.7%
Déplacement DY en C	4,25	Analytique	0,3%

3.4 Remarques

La sollicitation est dite à flexion dominante. A travers ce calcul, on montre la difficulté pour le QUAD4 même sous-intégré de représenter les modes de déformation en flexion en déformation plane et pour un coefficient ν proche de 0,5. Ceci se traduit par une rigidité excessive de l'élément due aux termes de cisaillement de l'opérateur gradient discrétisé : il s'agit d'un blocage numérique.



QUAD4
(cisaillement important)



QUAD8

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

On reprend le maillage précédent que l'on passe en éléments quadratiques dans le but d'utiliser la modélisation D_PLAN_INCO_UPG (éléments adaptés aux problèmes incompressibles).

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 65
Nombres et types de mailles : 16 SEG3, 16 QUAD8 avec les éléments D_PLAN_INCO_UPG.

4.3 Grandeurs testées et résultats

Valeur testée	Référence	Type	*Écart*
Déplacement DX en C	-1,25	Analytique	<0.01%
Déplacement DY en C	4,25	Analytique	<0.01%

4.4 Remarques

Ces éléments adaptés aux problèmes incompressibles donnent un résultat identique à la solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Synthèse des résultats

La mauvaise qualité du résultat des éléments QUAD4 sous-intégrés s'explique par le phénomène de blocage numérique qui rend l'élément très rigide. En outre, sa convergence vers la solution analytique est très lente. Ce phénomène apparaît bien sûr aussi pour l'élément intégré complètement. Le calcul à l'aide d'éléments quadratiques incompressibles permet d'obtenir une solution exacte.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)