SSLL403 - Flambement d'une poutre sous l'effet de son poids propre

Résumé :
Ce test permet de valider en élasticité linéaire le chargement dû aux forces de pesanteur pour une modélisation de type poutre droite d'Euler (POU_D_E). Il permet également la mise en œuvre et la validation du calcul de la matrice de rigidité géométrique.

La solution de référence est analytique et les résultats jugés satisfaisants.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

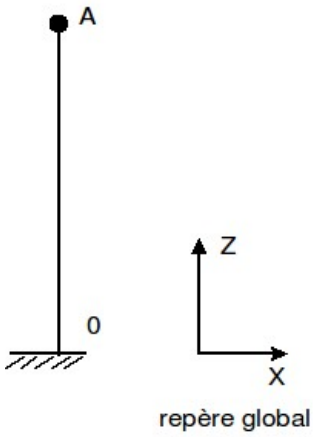


Figure 1.1-a : Poutre verticale.

Section rectangulaire : $H_y=0.01\,m$, $H_z=0.01\,m$
Longueur : $L=1\,m$

1.2 Propriétés des matériaux

Module d'Young : $E=2.10^{11}\,Pa$
Coefficient de Poisson : $\nu=0,3$
Masse volumique : $\rho=7800\,kg/m^3$

1.3 Conditions aux limites et chargement

Condition aux limites :
Extrémité encastrée (0) : $DX=DY=DZ=DRX=DRY=DRZ=0$.

Chargement :
Force de pesanteur : p poids par unité de longueur avec $g=(0,0,-9.81)$ (donné en repère global).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solutions de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour les solutions de référence

En repère local, x suivant l'axe OA de la poutre, le moment fléchissant, à l'abscisse x, a pour expression :

$$M_{F_y}(x)=p\int_x^L\left[v(\xi)-v(x)\right]d\xi\,.$$

La flèche $v(x)$ satisfait donc l'équation :

$$E\,I_z=\frac{d^2v}{dx^2}=p\int_x^L\left[v(\xi)-v(x)\right]d\xi=-p\left[\int_x^L v(\xi)\,d\xi+(L-x)\,v(x)\right]$$

En dérivant les deux membres, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{d^3v}{dx^3}+\frac{p}{E\,I_z}(L-x)\frac{dv}{dx}=0$$

La fonction $v'(x)=\frac{dv}{dx}$ satisfait l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre :

$$\frac{d^{2v\,\prime}}{dx^2}+\frac{p}{E\,I_z}(L-x)\,v'=0\,,$$

qui peut être résolue à l'aide des fonctions de Bessel. On trouve alors la valeur du poids linéique critique égale à :

$$p_c=7{,}837\frac{E\,I_z}{L^3}\,.$$

La solution analytique donne numériquement :

$$p_c=7{,}837\;\;2\;\;10^{11}\cdot\frac{10^{-8}}{12}=1{,}3061667\;\;10^3\,.$$

2.2 Résultats de référence

La valeur critique du multiplicateur λ : $\lambda_c=\frac{P_c}{\rho\,S\,g}$

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

2.4 Références bibliographiques

[1] Rapport n° 2314/A de l'Institut Aérotechnique « Proposition et réalisation de nouveaux cas tests manquant à la validation des poutres *Aster* »

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé de 10 éléments poutre droite d'Euler.

3.2 Caractéristiques du maillage

Il est constitué de 10 éléments POU_D_E.

3.3 Grandeurs testées et résultats

Valeur propre du système ($K+\lambda K_G$) $X=0$:

	Référence	Erreur
λ	170.701	0.01

3.4 Remarque

Puisque $p_c=\lambda \rho S g$, ($\rho S g$ représente la pré-contrainte linéique), nous avons comme chargement critique : $p_c=1300,84\, N.m^{-1}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Synthèse des résultats

Les résultats sont très proches de la solution analytique (écart : 1% pour 10 éléments). Cet écart est fonction de la finesse de discrétisation étant données les hypothèses utilisées pour la rigidité géométrique (cf. [R3.08.01]). Ceci valide donc ce type de chargement pour le flambement d'Euler.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)