SSLL104 - Pré-déformations dans une poutre droite

Résumé :
Ce test valide la prise en compte de pré-déformations dans le calcul élastique d'une poutre droite. Les caractéristiques du calcul sont :

- analyse statique,
- comportement linéaire,
- modèle linéique

La modélisation A valide la prise en compte de pré-déformations renseignées par valeur (AFFE_CHAR_MECA/PRE_EPSI) pour les éléments POU_D_E, POU_D_T, POU_D_TG, POU_D_EM et POU_D_TGM. La solution est analytique.

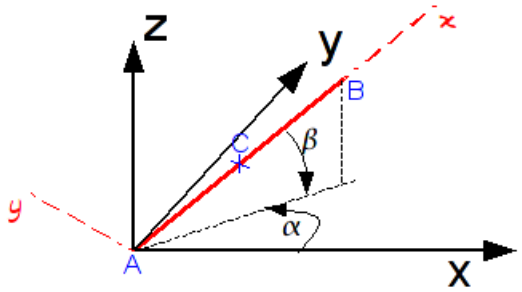
La modélisation B valide la prise en compte de pré-déformations renseignées par fonction (AFFE_CHAR_MECA_F/PRE_EPSI) pour les éléments POU_D_E, POU_D_T, POU_D_TG, POU_D_EM et POU_D_TGM. La solution de référence est un calcul avec pré-déformations renseignées par valeur. On précise que ce chargement est autorisé pour les éléments de poutre uniquement si la valeur de la fonction au deux nœuds d'un même élément est la même.

La modélisation C valide, pour l'élément BARRE, la prise en compte de pré-déformations renseignées par valeur, par comparaison à l'élément POU_D_E et la prise en compte de pré-déformations renseignées par fonction par comparaison à un calcul avec pré-déformations renseignées par valeur.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Une poutre AB de longueur $l=100\,mm$ est située sur la trisectrice du trièdre (X,Y,Z) :les coordonnées du point B sont : $B=\left(\frac{100}{\sqrt{3}},\frac{100}{\sqrt{3}},\frac{100}{\sqrt{3}}\right)$

On définit aussi un point C milieu de A,B.

Le repère local (A,x,y,z) se déduit du repère global (A,X,Y,Z) par les angles nautiques

$$\begin{cases}\alpha=45\,° \\ \beta=-35.26\,°\ solution\ de\ \cos\beta=\sqrt{\frac{2}{3}}\end{cases}$$

1.2 Propriétés de matériaux

Le matériau est élastique linéaire.

Module d'Young $E=1.0\,MPa$ (sans influence sur le résultat).

Coefficient de Poisson : $\nu=0$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Encastrement en A : $DX=DY=DZ=DRX=DRY=DRZ=0$.

Pour la modélisation A :

Chargement : pré-déformation dans la repère local (A,x,y,z)

- élongation suivant x : $\epsilon_X^0=0.001$
- courbure autour de y : $\chi_y^0=0.002$
- courbure autour de z : $\chi_z^0=0.003$

1.4 Caractéristiques de la section de poutre

Toutes les caractéristiques (aire, inerties, …) sont prises égales à 1. Elles sont sans influence sur le résultat.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Modélisation A :

La solution est analytique. Elle est calculée dans le repère local.
soit :

$U=(u,v,w,\theta_x,\theta_y,\theta_z)$ le déplacement de la poutre et $E=(\epsilon_x,\chi_y,\chi_z,\gamma_{xy},\gamma_{xz})$ la déformation généralisée.

Soit la solution :

$$u=\alpha x \qquad v=\gamma\frac{x^2}{2} \qquad w=-\beta\frac{x^2}{2} \qquad \theta_x=0 \qquad \theta_y=\beta x \qquad \theta_z=\gamma x$$

alors :

$$\epsilon_x=u_{,x}=\alpha \qquad \chi_y=\theta_{y,x}=\beta \qquad \chi_z=\theta_{z,x}=\gamma \qquad \gamma_{xy}=v_{,x}-\theta_z=0 \qquad \gamma_{xz}=w_{,x}+\theta_y=0$$

Si on choisit $\alpha=\epsilon_X(=0.001)$, $\beta=\chi_y^0(=0.002)$, $\gamma=\chi_z^0(=0.003)$ alors $E-E_{init}=0$ et les efforts sont nuls : l'équilibre est donc vérifié. Par ailleurs, la solution vérifie les conditions aux limites d'encastrement en A. C'est donc la solution du problème posé.

Modélisation B :

Les fonctions utilisées pour imposer les pré-déformations sont de type fonction « escalier » dépendant des coordonnées des nœuds des mailles. Pour obtenir la solution de référence, on affecte les valeurs des pré-déformations mailles par mailles.

Modélisation C :

Dans la modélisation C, les mailles de poutre sont dupliquées en mailles de barre.

Pour la validation des pré-déformations par valeur, un premier calcul est fait dans lequel les pré-déformations sont imposées sur les mailles de poutre, il sert de référence au second calcul dans lequel les pré-déformations sont imposées sur les mailles de barre.

Pour la validation des pré-déformations par fonction, la solution de référence est obtenue en affectant sur chaque maille la valeur de la fonction dépendant de la géométrie (coordonnées du point de Gauss).

2.2 Résultats de référence

Modélisation A :

Les résultats exprimés dans le repère local sont :
En B :

$$Dx=0.10\,mm\,;\ Dy=15.0\,mm\,;\ Dz=-10.0\,mm\,;\ DRx=0.0\,rd\,;\ DRy=0.2\,rd\,;\ DRz=0.30\,rd$$

En C :

$$Dx=0.05\,mm\,;\ Dy=3.75\,mm\,;\ Dz=-2.50\,mm\,;\ DRx=0.0\,rd\,;\ DRy=0.1\,rd\,;\ DRz=0.15\,rd$$

Dans le repère global, on trouve aux points B et C :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$DX(B)=\frac{\sqrt{3}}{30}+5\frac{\sqrt{3}}{6}\left(-3\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)[mm] \qquad DX(C)=\frac{\sqrt{3}}{60}+5\frac{\sqrt{3}}{24}\left(-3\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)[mm]$$

$$DY(B)=\frac{\sqrt{3}}{30}+5\frac{\sqrt{3}}{6}\left(3\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)[mm] \qquad DY(C)=\frac{\sqrt{3}}{60}+5\frac{\sqrt{3}}{24}\left(3\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)[mm]$$

$$DZ(B)=\frac{\sqrt{3}}{30}+5\frac{\sqrt{3}}{6}\left(-4\sqrt{2}\right)[mm] \qquad DZ(C)=\frac{\sqrt{3}}{60}+5\frac{\sqrt{3}}{24}\left(-4\sqrt{2}\right)[mm]$$

$$DRX(B)=\frac{1}{20}\left(-\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)[rd] \qquad DRX(C)=\frac{1}{40}\left(-\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)[rd]$$

$$DRY(B)=\frac{1}{20}\left(-\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)[rd] \qquad DRY(C)=\frac{1}{40}\left(-\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)[rd]$$

$$DRZ(B)=\frac{1}{20}\left(2\sqrt{6}\right)[rd] \qquad DRZ(C)=\frac{1}{40}\left(2\sqrt{6}\right)[rd]$$

Modélisation B et C :

Résultats provenant d'autres calculs effectués dans ce même test.

2.3 Incertitude sur la solution

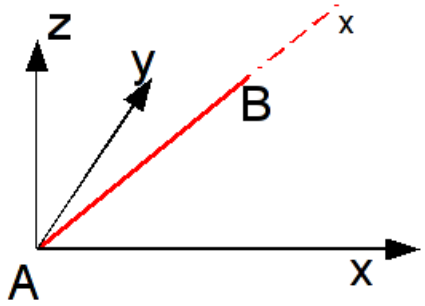
Modélisation A :

La solution est exacte pour la théorie des poutres d'Euler (ou de Timoshenko car il n'y pas de cisaillement). La torsion n'intervenant pas, la solution est aussi valable pour les éléments `POU_D_TG` et `POU_D_TGM`.

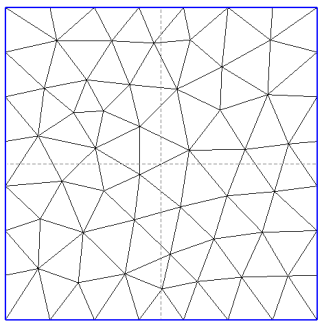
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



- Le segment AB est découpé en 10 éléments de même longueur (10.). (Un seul élément serait suffisant).
- 5 calculs identiques sont successivement faits sur ce maillage avec 4 modélisations différentes :
  - avec 10 éléments POU_D_E
  - avec 10 éléments POU_D_T
  - avec 10 éléments POU_D_TG
  - avec 10 éléments POU_D_EM
  - avec 10 éléments POU_D_TGM



Maillage de la section :
- 77 nœuds
- 124 TRIA3

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 11
Nombre de mailles et types : 10 SEG2

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 Grandeurs testées et résultats

Modélisation	Identification		Référence	% différence
POU_D_E	B	DX	–6.4664E+00	< 1.0E-9
		DY	1.4747E+01	< 1.0E-9
		DZ	–8.1072E+00	< 1.0E-9
		DRX	–2.6390E–01	< 1.0E-9
		DRY	1.8947E–02	< 1.0E-9
		DRZ	2.4495E–01	< 1.0E-9
	C	DX	–1.6022E+00	< 1.0E-9
		DY	3.7011E+00	< 1.0E-9
		DZ	–2.0124E+00	< 1.0E-9
		DRX	–1.3195E–01	< 1.0E-9
		DRY	9.4734E–03	< 1.0E-9
		DRZ	1.2247E–01	< 1.0E-9

Modélisation	Identification		Référence	% différence
POU_D_T	B	DX	–6.4664E+00	< 1.0E-9
		DY	1.4747E+01	< 1.0E-9
		DZ	–8.1072E+00	< 1.0E-9
		DRX	–2.6390E–01	< 1.0E-9
		DRY	1.8947E–02	< 1.0E-9
		DRZ	2.4495E–01	< 1.0E-9
	C	DX	–1.6022E+00	< 1.0E-9
		DY	3.7011E+00	< 1.0E-9
		DZ	–2.0124E+00	< 1.0E-9
		DRX	–1.3195E–01	< 1.0E-9
		DRY	9.4734E–03	< 1.0E-9
		DRZ	1.2247E–01	< 1.0E-9

Modélisation	Identification		Référence	% différence
POU_D_TG	B	DX	–6.4664E+00	< 1.0E-9
		DY	1.4747E+01	< 1.0E-9
		DZ	–8.1072E+00	< 1.0E-9
		DRX	–2.6390E–01	< 1.0E-9
		DRY	1.8947E–02	< 1.0E-9
		DRZ	2.4495E–01	< 1.0E-9
	C	DX	–1.6022E+00	< 1.0E-9
		DY	3.7011E+00	< 1.0E-9
		DZ	–2.0124E+00	< 1.0E-9
		DRX	–1.3195E–01	< 1.0E-9
		DRY	9.4734E–03	< 1.0E-9
		DRZ	1.2247E–01	< 1.0E-9

Modélisation	Identification		Référence	% différence
POU_D_EM	B	DX	–6.4664E+00	< 1.0E-6
		DY	1.4747E+01	< 1.0E-5
		DZ	–8.1072E+00	< 1.0E-5
		DRX	–2.6390E–01	< 1.0E-5
		DRY	1.8947E–02	< 1.0E-4
		DRZ	2.4495E–01	< 1.0E-5
	C	DX	–1.6022E+00	< 1.0E-6
		DY	3.7011E+00	< 1.0E-5
		DZ	–2.0124E+00	< 1.0E-5
		DRX	–1.3195E–01	< 1.0E-5
		DRY	9.4734E–03	< 1.0E-4
		DRZ	1.2247E–01	< 1.0E-5

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Modélisation	Identification	Référence	% différence
POU_D_TGM	B DX	–6.4664E+00	< 1.0E-8
	DY	1.4747E+01	< 1.0E-8
	DZ	–8.1072E+00	< 1.0E-8
	DRX	–2.6390E–01	< 1.0E-8
	DRY	1.8947E–02	< 1.0E-8
	DRZ	2.4495E–01	< 1.0E-9
	C DX	–1.6022E+00	< 1.0E-10
	DY	3.7011E+00	< 1.0E-8
	DZ	–2.0124E+00	< 1.0E-8
	DRX	–1.3195E–01	< 1.0E-8
	DRY	9.4734E–03	< 1.0E-7
	DRZ	1.2247E–01	< 1.0E-8

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Identique à la modélisation A

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 11
Nombre de mailles et types : 10 SEG2

4.3 Chargement

Pour les composantes de pré-déformation, les fonctions sont les suivantes :

EPX	$1\text{E-}3.escalier(X).INST$
KY	$2\text{E-}3.escalier(Y).INST$
KZ	$3\text{E-}3.escalier(Z).INST$

Pour chaque nœud du maillage la coordonnée X est égale à la coordonnée Y, elle-même égale à la coordonnée Z. La fonction escalier est faite de telle sorte que sa valeur soit :
- 1 sur les mailles E1 et E2
- 2 sur les mailles E4 et E5
- 3 sur les mailles E7 et E8

Il n'y a pas de pré-déformation imposée sur les autres mailles : E3, E6, E9 et E10.

Dans le calcul de référence, on affecte donc les valeurs de pré-déformation suivantes :

	E1, E2	E4, E5	E7, E8
EPX	1E-3	2E-3	3E-3
KY	2E-3	4E-3	6E-3
KZ	3E-3	6E-3	9E-3

La prise en compte de la dépendance au temps est faite par l'ajout d'une fonction multiplicatrice au chargement.

4.4 Grandeurs testées et résultats

Modélisation POU_D_E :
Calcul de référence :

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
Instant 1, Nœud B , DX	'NON_REGRESSION'	-	-
Instant 2, Nœud B , DY	'NON_REGRESSION'	-	-

Second calcul :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
Instant 1, Nœud B , DX	'AUTRE_ASTER'	-7.75966054341	1E-6
Instant 2, Nœud B , DY	'AUTRE_ASTER'	35.3923671581	1E-6

Modélisation POU_D_T :
Calcul de référence :

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
Instant 1, Nœud B , DX	'NON_REGRESSION'	-	-
Instant 2, Nœud B , DY	'NON_REGRESSION'	-	-

Second calcul :

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
Instant 1, Nœud B , DX	'AUTRE_ASTER'	-7.75966054341	1E-6
Instant 2, Nœud B , DY	'AUTRE_ASTER'	35.3923671581	1E-6

Modélisation POU_D_TG :
Calcul de référence :

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
Instant 1, Nœud B , DX	'NON_REGRESSION'	-	-
Instant 2, Nœud B , DY	'NON_REGRESSION'	-	-

Second calcul :

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
Instant 1, Nœud B , DX	'AUTRE_ASTER'	-7.75966054343	1E-6
Instant 2, Nœud B , DY	'AUTRE_ASTER'	35.3923671581	1E-6

Modélisation POU_D_EM :
Calcul de référence :

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
Instant 1, Nœud B , DX	'NON_REGRESSION'	-	-
Instant 2, Nœud B , DY	'NON_REGRESSION'	-	-

Second calcul :

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
Instant 1, Nœud B , DX	'AUTRE_ASTER'	-7.75966051002	1E-6
Instant 2, Nœud B , DY	'AUTRE_ASTER'	35.392366221	1E-6

Modélisation POU_D_TGM :
Calcul de référence :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
Instant 1, Nœud B , DX	'NON_REGRESSION'	-	-
Instant 2, Nœud B , DY	'NON_REGRESSION'	-	-

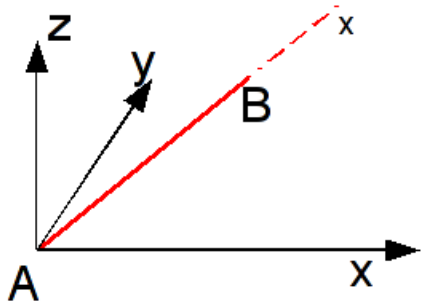
Second calcul :

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
Instant 1, Nœud B , DX	'AUTRE_ASTER'	-7.75966051062	1E-6
Instant 2, Nœud B , DY	'AUTRE_ASTER'	35.3923662219	1E-6

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation



Le segment AB est découpé en 10 éléments de même longueur (10.) qui forment le groupe POUTRE. Les mailles sont dupliquées pour former le groupe BARRE.

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 11
Nombre de mailles et types : 2 fois 10 SEG2

5.3 Chargement

5.3.1 Calculs avec affectation par valeur

Dans le calcul de référence, la pré-déformation est affectée sur les éléments de poutre.

EPX	1E-3

Dans le second calcul, la pré-déformation est affectée sur les éléments de barre.

EPXX	1E-3

5.3.2 Calculs avec affectation par fonction

La fonction de pré-déformation est la suivante :

EPXX	$1\text{E-}5.(X+Y+Z).INST$

Pour le calcul de référence (affectation par valeur), on calcule et on affecte la valeur de $1\text{E-}5.(X+Y+Z)$ pour chaque maille de barre en prenant les coordonnées de son point de Gauss (milieu de la maille). La dépendance au temps est faite par l'ajout d'une fonction multiplicatrice au chargement.

5.4 Grandeurs testées et résultats

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.4.1 Calculs avec affectation par valeur

Calcul de référence :

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
Instant 1, Nœud B , DX	'NON_REGRESSION'	-	-

Second calcul :

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
Instant 1, Nœud B , DX	'AUTRE_ASTER'	0.0288675134603	1E-6

5.4.2 Calculs avec affectation par fonction

Calcul de référence :

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
Instant 1, Nœud B , DX	'NON_REGRESSION'	-	-
Instant 2, Nœud B , DY	'NON_REGRESSION'	-	-

Second calcul :

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
Instant 1, Nœud B , DX	'AUTRE_ASTER'	0.0250000000004	1E-6
Instant 2, Nœud B , DY	'AUTRE_ASTER'	0.0499999999999	1E-6

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Synthèse des résultats

Comme on pouvait s'y attendre, les résultats sont très précis. Ils valident la bonne prise en compte des pré-déformations dans les éléments de poutre et de barre tant par affectation par valeur que par fonction.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)