SDLX400 – Poutre articulée sur appui élastique

Résumé :

Ce test consiste à calculer les fréquences propres d'une poutre dont une des extrémités est articulée et l'autre est soit libre, soit appuyée sur un ressort.
La solution de référence de ce problème est analytique.
L'originalité de ce test est de modéliser cette poutre au moyen d'éléments volumiques et poutres.

Ce test comporte trois modélisations :
- Modélisation A : POU_D_E ;
- Modélisation B : 3D et POU_D_E ;
- Modélisation C : POU_D_TG.

Le raccord 3D-poutre est effectué par LIAISON_ELEM dans l'opérateur AFFE_CHAR_MECA.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

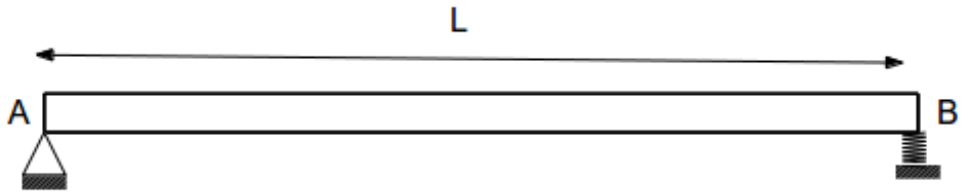


Figure 1.1 Géométrie du problème et système de chargement

Poutre à section carrée de côté : $c=0.014$ m
Longueur de la poutre : $L=0.783$ m

1.2 Propriétés du matériau

Module d'Young	$E=6.07\times10^{10}$ Pa
Coefficient de Poisson	$\nu=0$
Masse volumique	$\rho=2400.0$ kg.m^{-3}
Raideur du ressort	$k=18\,000$ N.m^{-1}

1.3 Conditions aux limites et chargements

Déplacement imposé :

Au point A	$DX=0$, $DY=0$
Au point B	Cas 1 : extrémité libre Cas 2 : appui élastique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

2.1.1 Cas 1 : extrémité libre

L'équation de la poutre s'écrit :

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{-\rho S}{EI} \frac{d^2 v}{dt^2} \tag{1}$$

On cherche une solution de la forme :

$$v(x) = \sin(\omega t)\left[A\cos(kx) + B\sin(kx) + C\cosh(kx) + D\sinh(kx)\right] \tag{2}$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} k^2$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

En $x=0$, $v=0$ et $\frac{d^2 v}{dx^2}=0$

En $x=L$, $\frac{d^2 v}{dx^2}=0$ et $\frac{d^3 v}{dx^3}=0$

En remplaçant v par l'expression (2), on obtient :

- En $x=0$, $A=C=0$;
- En $x=L$, $\sin(kL)\cosh(kL) = \cos(kL)\sinh(kL)$ (3)

Les six premières racines de (3) sont données dans le tableau suivant :

kL
0
3.9266
7.06858
10.2102
13.3518
16.4934

On en déduit les valeurs de ω_i , $i=1,\ldots,6$.

2.1.2 Cas 2 : extrémité en appui élastique

L'équation aux valeurs propres est la suivante :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\sin(kL)\left(k^3 L^3 \frac{EI}{L^3}\cosh(kL) - K\sinh(kL)\right) - \sinh(kL)\left(k^3 L^3 \frac{EI}{L^3}\cos(kL) + K\sin(kL)\right) = 0 \quad (4)$$

Les pulsations propres sont données par :

$$\omega = \frac{1}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}k^2 L^2 \quad (5)$$

Les six premierès racines de (4) sont données dans le tableau suivant :

kL
2.7880886
4.5619625
7.1895724
10.249031
13.368916
16.502406

On en déduit alors les valeurs de ω_i , $i = 1, \ldots, 6$.

2.2 Résultats de référence

2.2.1 Cas 1 : extrémité libre

La structure possède un mode rigide à fréquence nulle. Le tableau suivant présente les fréquences non nulles.

Mode	Fréquence (Hz)
1	85.5
2	277
3	577.9
4	988.2
5	1507.9

2.2.2 Cas 2 : extrémité en appui élastique

Mode	Fréquence (Hz)
1	43.1
2	115.4
3	286.5
4	582.3

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5	990.7
6	1509.6

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation A



Figure 3.1 Maillage du problème

Modélisation POU_D_E et élément discret de type DIS_TR.

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 11
Nombre de mailles et types : 10 SEG2 et 1 POI1

3.3 Grandeurs testées et résultats

3.3.1 Cas 1 : extrémité libre

METHODE='SORENSEN'

Identification	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (%)
Mode 1	85.5	'ANALYTIQUE'	0.1
Mode 2	277	'ANALYTIQUE'	0.1
Mode 3	577.9	'ANALYTIQUE'	0.1
Mode 4	988.2	'ANALYTIQUE'	0.3
Mode 5	1507.9	'ANALYTIQUE'	0.5

METHODE='JACOBI'

Identification	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (%)
Mode 1	85.5	'ANALYTIQUE'	0.1
Mode 2	277	'ANALYTIQUE'	0.1
Mode 3	577.9	'ANALYTIQUE'	0.1
Mode 4	988.2	'ANALYTIQUE'	0.3
Mode 5	1507.9	'ANALYTIQUE'	0.5

3.3.2 Cas 2 : extrémité en appui simple

METHODE='SORENSEN'

Identification	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (%)
Mode 1	43.1	'ANALYTIQUE'	0.1
Mode 2	115.4	'ANALYTIQUE'	0.1
Mode 3	286.5	'ANALYTIQUE'	0.1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Mode 4	582.3	'ANALYTIQUE'	0.1
Mode 5	990.7	'ANALYTIQUE'	0.3
Mode 6	1509.6	'ANALYTIQUE'	0.5

METHODE='JACOBI'

Identification	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (%)
Mode 1	43.1	'ANALYTIQUE'	0.1
Mode 2	115.4	'ANALYTIQUE'	0.1
Mode 3	286.5	'ANALYTIQUE'	0.1
Mode 4	582.3	'ANALYTIQUE'	0.1
Mode 5	990.7	'ANALYTIQUE'	0.3
Mode 6	1509.6	'ANALYTIQUE'	0.5

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation B

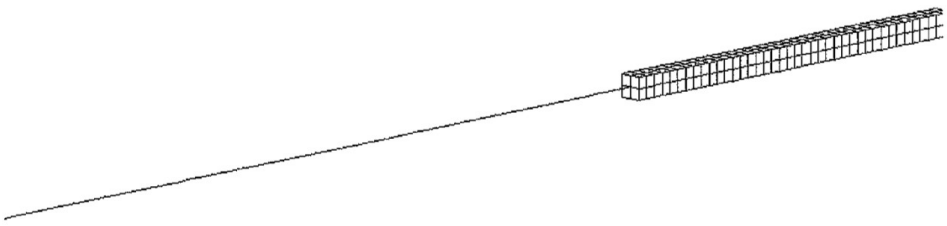


Figure 4.1 Maillage du problème

Modélisation POU_D_E pour un tiers de la structure et le reste en modélisation 3D, élément discret de type DIS_TR.

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1303
Nombre de mailles et types : 160 HEXA20, 8 QUAD8, 80 SEG2 et 1 POI1

4.3 Grandeurs testées et résultats

4.3.1 Cas 1 : extrémité libre

METHODE='SORENSEN'

Identification	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (%)
Mode 1	85.5	'ANALYTIQUE'	0.85
Mode 2	277	'ANALYTIQUE'	0.7
Mode 3	577.9	'ANALYTIQUE'	0.8
Mode 4	988.2	'ANALYTIQUE'	1.2
Mode 5	1507.9	'ANALYTIQUE'	3.6

METHODE='JACOBI'

Identification	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (%)
Mode 1	85.5	'ANALYTIQUE'	0.85
Mode 2	277	'ANALYTIQUE'	0.7
Mode 3	577.9	'ANALYTIQUE'	0.8
Mode 4	988.2	'ANALYTIQUE'	1.2
Mode 5	1507.9	'ANALYTIQUE'	3.7

4.3.2 Cas 2 : extrémité en appui simple

METHODE='SORENSEN'

Identification	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (%)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Mode 1	43.1	'ANALYTIQUE'	0.4
Mode 2	115.4	'ANALYTIQUE'	0.6
Mode 3	286.5	'ANALYTIQUE'	0.6
Mode 4	582.3	'ANALYTIQUE'	0.8
Mode 5	990.7	'ANALYTIQUE'	1.2
Mode 6	1509.6	'ANALYTIQUE'	3.7

METHODE='JACOBI'

Identification	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (%)
Mode 1	43.1	'ANALYTIQUE'	0.4
Mode 2	115.4	'ANALYTIQUE'	0.6
Mode 3	286.5	'ANALYTIQUE'	0.6
Mode 4	582.3	'ANALYTIQUE'	0.8
Mode 5	990.7	'ANALYTIQUE'	1.2
Mode 6	1509.6	'ANALYTIQUE'	3.7

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation C

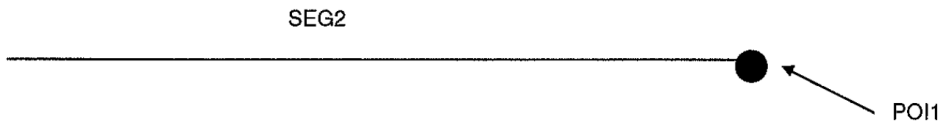


Figure 5.1 Maillage du problème

Modélisation POU_D_TG et élément discret de type DIS_TR.

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 11
Nombre de mailles et types : 10 SEG2 et 1 POI1

5.3 Grandeurs testées et résultats

5.3.1 Cas 1 : extrémité libre

METHODE='SORENSEN'

Identification	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (%)
Mode 1	85.5	'ANALYTIQUE'	0.11
Mode 2	277	'ANALYTIQUE'	0.3
Mode 3	577.9	'ANALYTIQUE'	0.4
Mode 4	988.2	'ANALYTIQUE'	0.6
Mode 5	1507.9	'ANALYTIQUE'	0.7

METHODE='JACOBI'

Identification	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (%)
Mode 1	85.5	'ANALYTIQUE'	0.11
Mode 2	277	'ANALYTIQUE'	0.3
Mode 3	577.9	'ANALYTIQUE'	0.4
Mode 4	988.2	'ANALYTIQUE'	0.6
Mode 5	1507.9	'ANALYTIQUE'	0.7

5.3.2 Cas 2 : extrémité en appui simple

METHODE='SORENSEN'

Identification	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (%)
Mode 1	43.1	'ANALYTIQUE'	0.1
Mode 2	115.4	'ANALYTIQUE'	0.1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Mode 3	286.5	'ANALYTIQUE'	0.2
Mode 4	582.3	'ANALYTIQUE'	0.4
Mode 5	990.7	'ANALYTIQUE'	0.6
Mode 6	1509.6	'ANALYTIQUE'	0.7

METHODE='JACOBI'

Identification	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (%)
Mode 1	43.1	'ANALYTIQUE'	0.1
Mode 2	115.4	'ANALYTIQUE'	0.1
Mode 3	286.5	'ANALYTIQUE'	0.2
Mode 4	582.3	'ANALYTIQUE'	0.4
Mode 5	990.7	'ANALYTIQUE'	0.6
Mode 6	1509.6	'ANALYTIQUE'	0.7

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus avec les éléments de poutre POU_D_E et POU_D_TG sont en très bon accord avec la solution analytique et respectivement inférieurs à 0.46 % et 0.61 %. Les résultats obtenus en mélangeant deux types d'éléments (poutre et volumique) puis en raccordant les degrés de liberté au moyen de l'option LIAISON_ELEM sont moins précis (mais l'écart reste inférieur à 3.61 %).
Il est à noter que les fréquences propres calculées sont identiques quelle que soit la méthode utilisée dans le solveur modal (SORENSEN ou JACOBI).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)