SDLV111 - Homogénéisation d'un réseau de poutres dans un fluide incompressible

Résumé :

Test en analyse modale, servant à valider les éléments de la modélisation 3D_FAISCEAU : hexaèdre à 8 nœuds ou hexaèdre à 20 nœuds. Ces éléments représentent le milieu homogénéisé d'un réseau de poutres baignant dans un fluide incompressible, initialement au repos.

On teste les fréquences propres des poutres du milieu homogénéisé sans ou avec fluide.
On calcule la masse, la position du centre de gravité ainsi que les inerties en ce point pour les cas avoir ou sans fluide.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

On considère un réseau périodique de 4×4 poutres [fig 1.1-a]. La période du domaine est εY. La figure [fig 1.1-b] représente un agrandissement de $1/\varepsilon$ de la période. Chaque poutre est droite de section carrée.

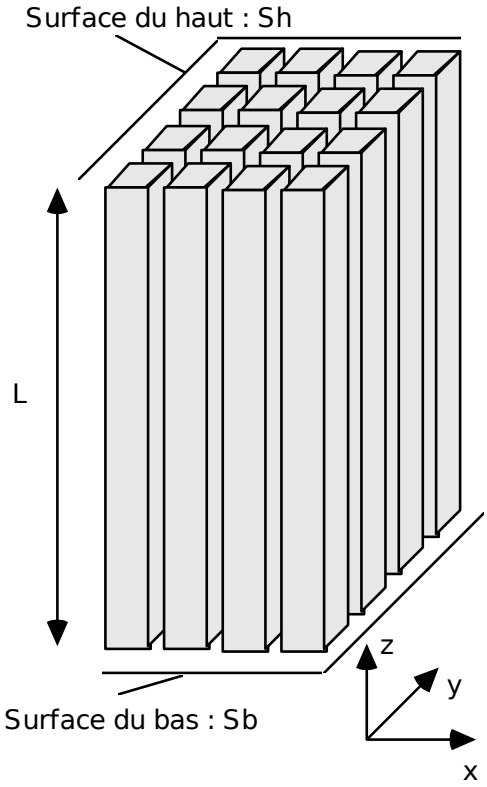


Figure 1.1-a : Géométrie du milieu hétérogène - Poutres sans fluide

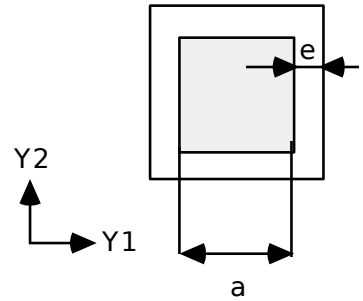


Figure 1.1-b : Cellule de référence Y - Agrandissement de $\frac{1}{\varepsilon}=10$

- Caractéristiques de la période :
  - Dimensions :
    $\varepsilon Y=(0.21m, 0.21m)$
    $a=1.5m$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$e = 0.3\,m$$

- Caractéristiques de chaque poutre :
  - Section :
    $A = (\varepsilon \times a)^2 = (0.1 \times 1.5)^2 = 0.0225\,m^2$
  - Longueur :
    $L = 4.1\,m$
  - Moment d'inertie de flexion :
    $I_x = I_y = (\varepsilon \times a)^4 / 12\,m^4$

1.2 Propriétés de matériaux

Matériau élastique linéaire isotrope :

$$E = 10^9\,Pa$$
$$NU = 0.3$$

Masses volumiques :

Poutre :

$$Rho = 7641\,kg/m^3$$

Fluide :

$Rho = 0\,kg/m^3$ (cas sans fluide)
$Rho = 1000\,kg/m^3$ (cas avec fluide)

1.3 Termes correcteurs

Les termes correcteurs sont calculés sur la cellule de référence Y [fig 1.1-b].

B_T= $0.79\,m^2$
B_N= $0.79\,m^2$
B_TN= $0\,m^2$
A_FLUI= $2.16\,m^2$
A_CELL= $2.25\,m^2$
COEF_ECHELLE=10

1.4 Conditions aux limites et chargements

Cas sans fluide :

Surface du bas Sb : encastrement
Tous les degrés de liberté sont bloqués.

Surface du haut Sh : encastrement
Tous les degrés de liberté sont bloqués.

Cas avec fluide :

Surface du bas Sb : encastrement
Tous les degrés de liberté sont bloqués.

Surface du haut Sh : appui plan (liaison bilatérale)
Toutes les rotations sont bloquées.
Le déplacement longitudinal DZ est bloqué.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Tous les nœuds de Sh ont le même déplacement transverse DX et le même déplacement normal DY.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Cas sans fluide :

Considérons le domaine hétérogène décrit au [§1] en absence du fluide. On suppose que les poutres respectent les hypothèses de modélisation d'une poutre droite d'Euler Bernoulli. Puisque les conditions aux limites appliquées à l'ensemble des poutres sont les mêmes que pour chacune d'entre elles, on peut ramener la recherche des fréquences propres de l'ensemble à celle d'une seule poutre.

On étudie donc le problème suivant :

Soit une poutre bi-encastrée [fig 2.1-a] de même caractéristiques géométriques et matérielles que les poutres du milieu hétérogène. On note A l'aire de la section, L sa longueur, et I le moment d'inertie de flexion.

Par la méthode de rigidité dynamique on montre qu'une telle poutre admet des fréquences doubles de la forme :

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2}\left[\frac{EI}{\rho A}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$\lambda_i = (2i+1)\pi/2 \quad i = 1,2,...$ pour le deuxième cas de conditions aux limites : [fig 2.1-a].

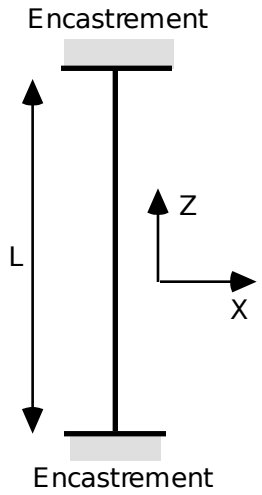


Figure 2.1-a

Le domaine contient N poutres indépendantes entre elles (pas de conditions aux limites qui couplent les déplacements de deux poutres différentes), Il en résulte que la multiplicité des fréquences est égale à $2N$ (2 modes de flexions par poutres).

Pour le milieu homogénéisé discrétisé par les éléments finis hexaèdre à 8 nœuds ou hexaèdre à 20 nœuds, le nombre N doit être remplacé par le nombre de droites parallèles à l'axe des poutres.

Cas avec fluide :

Le cas avec fluide est plus difficile à résoudre analytiquement : aucun résultat analytique n'a été trouvé jusqu'à la rédaction de ce cas test. Les résultats de référence qu'on a établis proviennent donc

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

d'une résolution numérique par éléments finis du problème hétérogène complet. On a utilisé pour ce fait la version 3.6.2 de *Code_Aster*.

Chaque poutre est représentée dans le maillage par sa fibre moyenne modélisée par POU_D_E (poutre droite d'Euler). Pour toutes les poutres, on lie chaque nœud de la fibre moyenne aux nœuds de la surface latérale, situés dans la même section transverse que le nœud en question, par LIAISON_SOLIDE. L'interface fluide poutre est modélisé par FLUI_STRU qui traduit la continuité des vitesses normales aux parois. Le fluide, devait être parfait incompressible, on a déduit sa modélisation de celle du fluide parfait compressible 3D_FLUIDE en enlevant la contribution de la pression.

Les conditions aux limites imposées aux domaines [§1.3], et surtout la relation qui couple le déplacement de toutes les poutres au niveau de Sh, font apparaître deux sortes de modes propres de la structure :

Des modes d'ensembles : toutes les poutres se déforment de la même façon et la surface du haut admet un déplacement non nul.

Des modes locaux : ils correspondent à des modes de poutres encastrées-encastrées. La surfaces du haut admet donc un déplacement nul. Aucun de ces modes ne peut correspondre à un mode d'ensemble.

L'action du fluide se traduit par un effet de masse ajoutée et donc un abaissement des fréquences par rapport au cas sans fluide. Il a pour effet aussi, dans le cas des modes locaux, d'étaler le spectre de fréquences associées. Dans le cas sans fluide on a vu que ce spectre était concentré en une seule fréquence de vibration.

2.2 Résultats de référence

Valeur des fréquences propres.
Pour la masse et les inerties au centre de gravité :

- En absence de fluide, la masse est déterminée par le produit du volume occupé par les poutres et de la masse volumique de ces éléments : $MASSE_{solide} = \rho_{poutre} \times Vol_{poutres}$ où $Vol_{poutres}$ est déterminé par le produit du nombre de poutre, de l'aire de la section et de la longueur de la poutre. À partir des données définies précédemment, on peut calculer $MASSE_{solide}$: on obtient ainsi $MASSE_{poutres} = 7641 \times 16 \times (1.5/10)^2 \times 4.1 = 11278.116\ kg$.

- La masse étant répartie uniformément dans le volume (en raison de la position des poutres dans le volume), le centre de gravité est donc localisé en son centre, à savoir au point de coordonnées $(0.42\ ,\ 0.42\ ,\ 2.05)$. Ce résultat est confirmé analytiquement par le calcul des intégrales suivantes :

$$X_G = Y_G = \frac{1}{Vol}\int_V x\ .\ \rho\ dV \text{ et } Z_G = \frac{1}{Vol}\int_V z\ .\ \rho\ dV$$

- Les inerties au centre de gravité G sont calculées par : .On obtient analytiquement :

$$I_{xx}(G) = \int_V \left(\left(y - y_G \right)^2 + \left(z - z_G \right)^2 \right) \rho\, dV \ ;\ I_{yy}(G) = \int_V \left(\left(x - x_G \right)^2 + \left(z - z_G \right)^2 \right) \rho\, dV \ ;$$
$$I_{zz}(G) = \int_V \left(\left(y - y_G \right)^2 + \left(x - x_G \right)^2 \right) \rho\, dV$$

On obtient analytiquement :

$$I_{xx}(G) = I_{YY}(G) = \frac{8\,\rho}{3}\left(4 \times 0.15^2 \times 2.05^2 + 4.1 \times 0.15 \times \left(0.39^3 - 0.24^3 + 0.18^3 - 0.03^3 \right) \right) = 16441.61 \ ;$$

$$I_{zz}(G) = \frac{16\,\rho \times 4.1 \times 0\,.\,15}{3}\left(0.39^3 - 0.24^3 + 0.18^3 - 0.03^3 \right) = 1285.71$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- En présence de fluide, la masse totale correspond à la somme de la masse solide et de la masse fluide. Connaissant le volume total, on détermine le volume occupé par le fluide :

$$Vol_{fluide} = Vol - Vol_{poutres} = 0.84^2 \times 4.1 - 16 \times (1.5/10)^2 \times 4.1 = 1.41696\, m^3 \ ;$$

$$MASSE_{fluide} = 1000 \times 1.41696 = 1416.96\, kg \ ;$$

$$MASSE_{totale} = MASSE_{solide} + MASSE_{fluide} = 12695.076\, kg$$

On en déduit la masse volumique de l'élément (avec fluide) :

$$\rho = \frac{MASSE_{totale}}{Vol} = 4388.265\, kg/m^3$$

- Le centre de gravité reste inchangé avec ou sans fluide.

- Les inerties au centre de gravité G sont :

$$I_{xx}(G) = I_{YY}(G) = \frac{2\rho \times 0.84\left(4.1 \times 0.42^3 + 0.84 \times 2.05^3\right)}{3} = 18530.155 \ ;$$

$$I_{zz}(G) = \frac{2\rho \times 0.84 \times 4.1 \times 2 \times 0.42^3}{3} = 1492.941$$

2.3 Références bibliographiques

1) Walter D. Pilkey : "Formulas for Stress, Strain and Structural Matrices", A Wiley-Interscience Publication JOHN WILEY & SONS, INC. Edition 1994.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation 3D_FAISCEAU

Conditions aux limites :

Cas sans fluide :

```
DDL_IMPO:(   GROUP_MA : Sb DX: 0  DY: 0  DZ: 0  DRX: 0 DRY: 0 DRZ: 0
             GROUP_MA : Sh DX: 0  DY: 0  DZ: 0  DRX: 0 DRY: 0 DRZ: 0
             NOEUD N1 : PHI: 0                                      )
```

Cas avec fluide :

```
DDL_IMPO: (  GROUP_MA : Sb DX: 0  DY: 0  DZ: 0  DRX: 0 DRY: 0 DRZ: 0
             GROUP_MA : Sh DZ: 0  DRX: 0 DRY: 0 DRZ: 0
             NOEUD N1 : PHI: 0                                      )
LIAISON_UNIF : ( GROUP_MA : Sh
                 DDL : 'DX' )
LIAISON_UNIF : ( GROUP_MA : Sh
                 DDL : 'DY' )
```

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage du milieu homogénéisé utilisé, pour les deux cas de figure : avec ou sans fluide, est représenté par [fig 3.2-a].

Il comporte 48 mailles HEXA8.

Le maillage contient 9 droites parallèles à la fibre moyenne de chaque poutre.

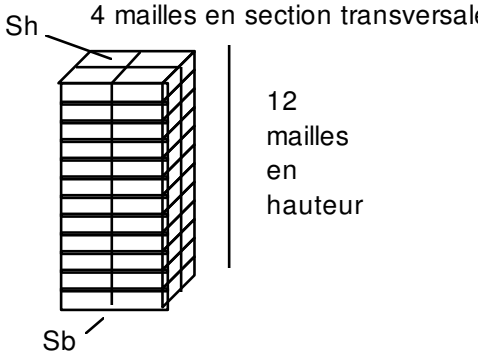


Figure 3.2-a : maillage

3.3 Valeurs testées

Cas sans fluide :

Numéro d'ordre	Grandeur et unité	Référence
1, 2 et 6	fréquence (Hz)	3.3333

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

19 et 20	fréquence (Hz)	9.2584

Cas avec fluide :

Numéro d'ordre	Grandeur et unité	Référence
1 et 2	fréquence (Hz)	0.6908
19 et 20	fréquence (Hz)	3.7871

Grandeur et unité	Référence
Masse (kg)	12695.076
Inertie I_{xx} en G	18530.155
Inertie I_{zz} en G	1492.941

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation 3D_FAISCEAU

Conditions aux limites :

Cas avec fluide :

```
DDL_IMPO: (  GROUP_MA : Sb DX: 0  DY: 0  DZ: 0  DRX: 0 DRY: 0 DRZ: 0
             GROUP_MA : Sh DZ: 0  DRX: 0 DRY: 0 DRZ: 0
             NOEUD N1 : PHI: 0                                        )
LIAISON_UNIF : ( GROUP_MA : Sh
                 DDL : 'DX' )
LIAISON_UNIF : ( GROUP_MA : Sh
                 DDL : 'DY' )
```

4.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage du milieu homogénéisé utilisé, pour les deux cas de figures : avec ou sans fluide, est représenté par [fig 5.2-a].

Il comporte 48 mailles HEXA20.

Le maillage contient 9 droites parallèles à la fibre moyenne de chaque poutre.

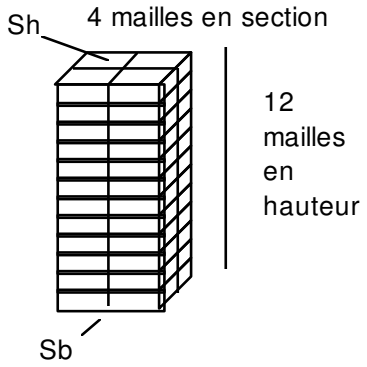


Figure 5.2-a : maillage

4.3 Valeurs testées

Cas avec fluide :

Numéro d'ordre	Grandeur et unité	Référence
1 et 2	fréquence (Hz)	0.6908
19 et 20	fréquence (Hz)	3.7871

Grandeur et unité	Référence
Masse (kg)	12695.076
Inertie I_{xx} en G	18530.155
Inertie I_{zz} en G	1492.941

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Synthèse des résultats

Les résultats montrent le bon comportement modal des éléments de la modélisation 3D_FAISCEAU en flexion, en absence du fluide. Il montrent aussi un très bon accord des fréquences des modes d'ensemble avec le calcul *Aster* en hétérogène, lorsqu'il y a du fluide.

Pour les fréquences des modes d'ensemble, on n'observe pas de différences entre un maillage HEXA8 et HEXA20 (ceci n'est pas vrai pour les autres modes).

Les résultats numériques des masses et des inerties obtenus par *Code-Aster* sont très proches des résultats analytiques (erreur $<6.10^{-6}$).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)