SDLS505 - Flambement d'une enveloppe cylindrique sous pression externe

Résumé :

Ce test représente un calcul de stabilité d'une enveloppe cylindrique mince bouchée à ses extrémités soumise à une pression externe et à une pression axiale. On calcule les charges critiques conduisant au flambement élastique d'Euler. La matrice de rigidité géométrique utilisée dans la résolution du problème aux valeurs propres est celle qui est due aux contraintes initiales.

Il permet de valider la modélisation éléments finis :

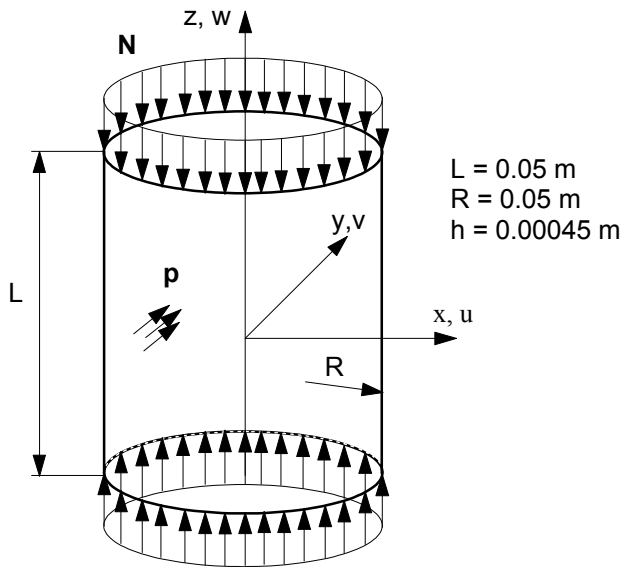
- COQUE_3D avec les mailles TRIA7 et QUAD9.
- DKT avec les mailles TRIA3 et QUAD4.

La charge critique et le mode propre obtenus sont comparés à une solution de référence analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



La symétrie du problème permet de modéliser un demi cylindre de longueur $L/2$, bouché à l'une de ses extrémités, avec des conditions de symétrie spécifiques au bord inférieur.

1.2 Propriétés du matériau

Les propriétés du matériau constituant la plaque sont :

$E=2.10^{11}Pa$ Module d'Young
$\nu=0.3$ Coefficient de poisson

1.3 Conditions aux limites et chargements

- Chargement :
  - pression uniformément répartie de $p_{cr}=1.523\,10^{6}Pa$ sur la partie cylindrique. Cette pression correspond à la valeur de la charge critique,
  - effort réparti sur le contour du fond $N=0.5\times R\cdot p_{cr}=3.8075\,10^{4}N/m$.

1.4 Conditions initiales

Sans objet

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La pression critique est donnée en [bib1] ou [bib2] par l'expression suivante :

$$P_{cr}=\frac{Eh}{R}\frac{1}{\left(n^2+\frac{b^2}{2}\right)}\left[\frac{1}{\left(\frac{n^2}{b^2}+1\right)^2}+\frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)}(n^2+b^2)^2\right]$$

avec $b=\frac{\pi R}{L}$

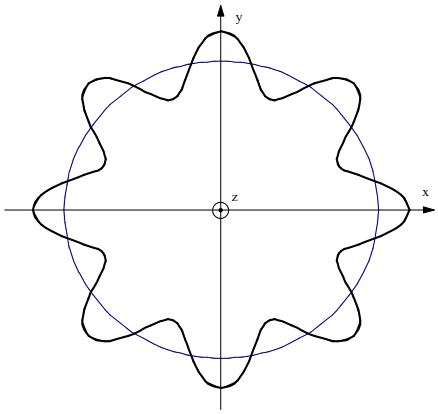
n représente le nombre de modes circonférentiels

Cette formule est valable dans le cas où $N=0.5\,R\,p_{cr}$.

2.2 Résultats de référence

Pour les caractéristiques géométriques données, la pression critique est minimum pour un nombre n=8 et vaut p_{cr} = 1.523 10^6Pa.

Le nombre n est obtenu à partir d'un abaque.



2.3 Incertitudes sur la solution

Solution analytique

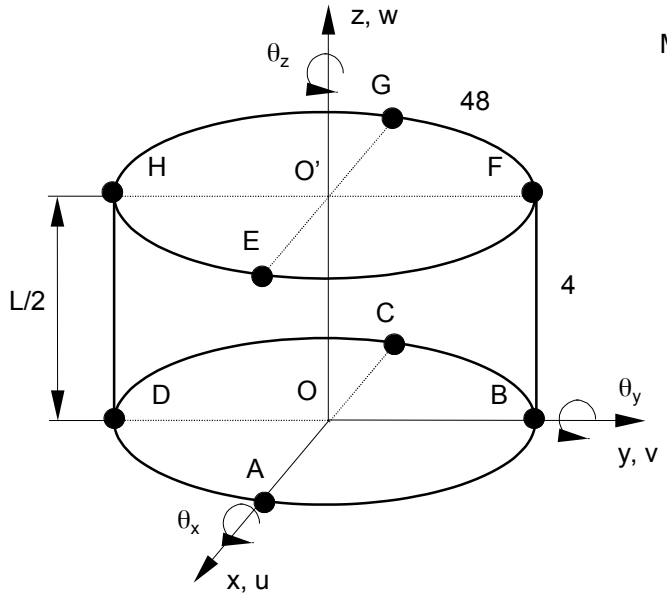
2.4 Références bibliographiques

1) S.P. TIMOSHENKO, J.M. GERE : Théorie de la stabilité élastique, page 500, deuxième édition, DUNOD 1966.
2) BO O. ALMROTH, D.O. BRUSH : Buckling of bars, plates and shells, page 173, Mc Graw-Hill, New York,1975.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation COQUE_3D (TRIA7)

Conditions de symétrie :
- Contour ABCD : w = 0

Conditions limites :
- Point O' : u = v =0
- Point E : v = 0

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2464
Nombre de mailles et types : 834 TRIA7

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

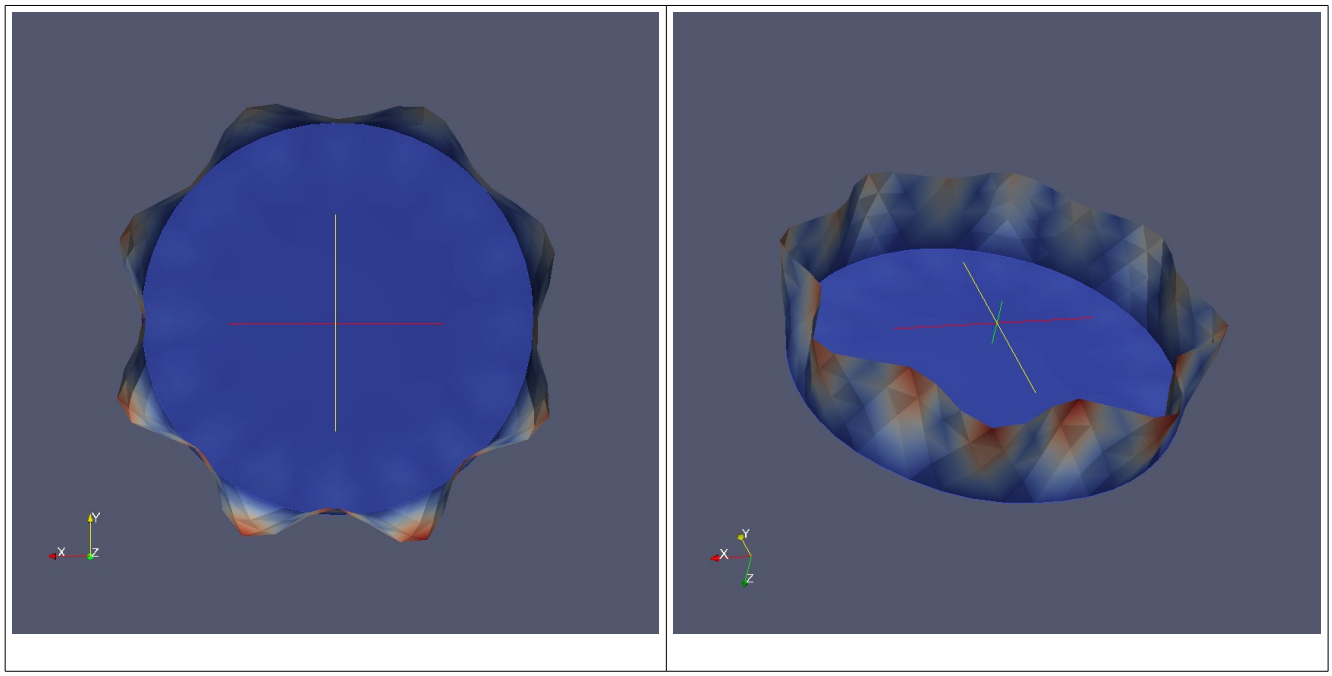
3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	% différence
Pression critique($n=8$)	1.523 10^6 Pa	10.715

3.4 Remarques

La pression critique est testée sans difficulté.
En revanche, il est difficile de tester le mode de flambement car c'est un mode double.

La validation de ce mode de flambement est faite de la manière suivante :
1) On modifie très légèrement les coordonnées du maillage (de 1.e-8) pour que le mode associé à n=8 soit le même, à chaque exécution, sur toutes les machines où on exécute le test. (On dé-symétrise un peu le problème).
2) On valide visuellement que les modes de flambement 7 et 8 ont bien une forme avec 8 lobes (voir images ci-dessous).
3) On vérifie (avec un test de non-régression) que le mode 8 reste le même au cours des évolutions du code.

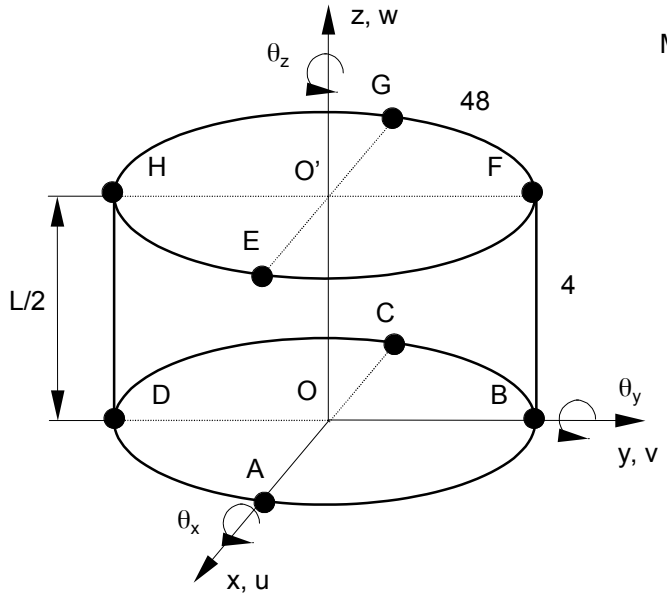


Remarque :
Pour les 4 modélisations de ce test, la finesse du maillage est insuffisante pour bien représenter la forme du mode. C'est ce qui explique que le mode observé n'est pas rigoureusement symétrique par rotation de 45 degrés.
On a vérifié que la symétrie était améliorée avec un maillage plus fin. Mais, pour conserver un test rapide, on conserve le maillage grossier.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation COQUE_3D (QUAD9)

Conditions de symétrie :
- Contour ABCD : w = 0

Conditions limites :
- Point O' : u = v =0
- Point E : v = 0

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1802
Nombre de mailles et types : 472 QUAD9

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	% différence
Pression critique($n=8$)	1.523 10^6 Pa	2.272

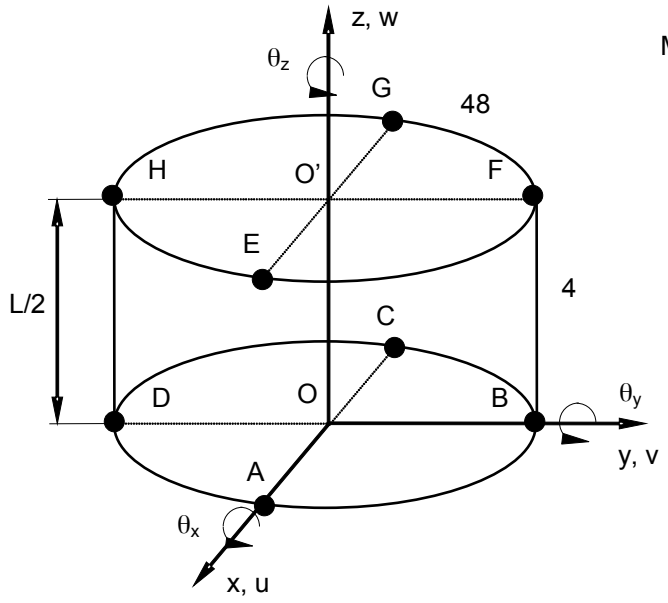
4.4 Remarques

Le mode de flambement est testé de la même façon que pour la modélisation A.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation DKT (TRIA3)

Conditions de symétrie :
- Contour ABCD : w = 0

Conditions limites :
- Point O' : u = v =0
- Point E : v = 0

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 418
Nombre de mailles et types : 786 TRIA3

5.3 Grandeurs testées et résultats

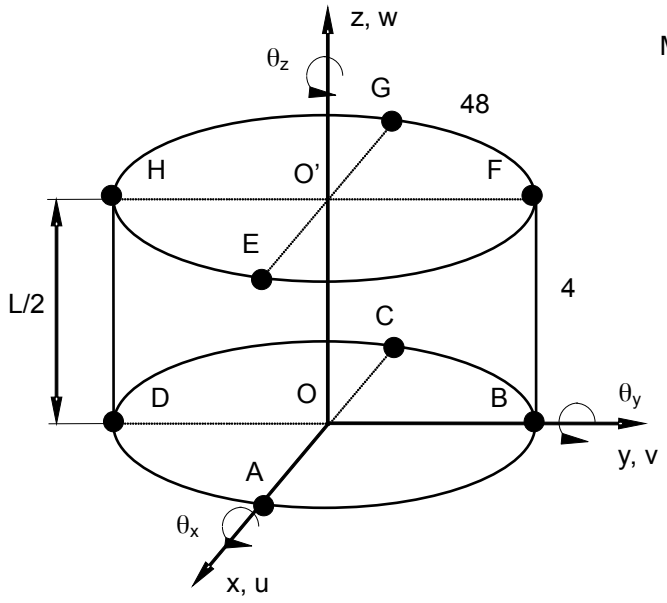
Identification	Type de référence	Référence	% Tolérance
Pression critique($n=8$)	'ANALYTIQUE'	1.523 10^6 Pa	12.5

Le mode de flambement est testé de la même façon que pour la modélisation A.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation DKT (QUAD4)

Conditions de symétrie :
- Contour ABCD : w = 0

Conditions limites :
- Point O' : u = v =0
- Point E : v = 0

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 449
Nombre de mailles et types : 424 QUAD4

6.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Référence	% Tolérance
Pression critique($n=8$)	'ANALYTIQUE'	1.523 10^6 Pa	12.5

Le mode de flambement est testé de la même façon que pour la modélisation A.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Synthèse des résultats

Modélisation COQUE_3D

Les résultats obtenus sont satisfaisants. Les incertitudes sur la pression critique ne dépassent pas :

- 10.71% avec des mailles TRIA7,
- 2.3% avec des mailles QUAD9.

La déformée modale obtenue correspond bien au mode circonférentiel attendu : $n=8$ pour les deux modélisations.

On constate que la modélisation COQUE_3D avec des mailles QUAD9 est plus précise que la modélisation COQUE_3D avec des mailles TRIA7.

Modélisation DKT

Les résultats obtenus sont satisfaisants pour des éléments de plaques. Les incertitudes sur la pression critique ne dépassent pas 12.5% quelque soit la maille (QUAD4, TRIA3).

La déformée modale obtenue correspond bien au mode circonférentiel attendu : $n=8$ pour les deux modélisations.

Ce test a permis de tester les modélisations COQUE_3D et DKT en flambement linéaire d'Euler d'une structure mince soumis à une pression extérieure.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)