# SDLS109 - Fréquences propres d'un anneau cylindrique épais

**Résumé :**

Ce test est inspiré d'une étude vibratoire réalisée sur le collecteur VVP des tranches N4. Ce collecteur est épais et présente un rapport maximum épaisseur sur rayon moyen de 0,13. Cette valeur, pouvant être typique d'une structure industrielle, est légèrement supérieure à la valeur limite de validité habituellement reconnue pour les plaques et coques. Dans cette étude, la modélisation du collecteur en coques est alors évaluée par comparaison avec un modèle volumique sur un anneau.

Ce test permet d'évaluer l'opérateur de recherche de valeurs propres CALC_MODES [U4.52.02] avec les matrices de rigidité et de masse correspondant aux modélisations suivantes :

1) plaques de type DKQ (élément fini MEDKQU4) et DSQ (élément fini MEDSQU4),
2) plaques de type DKT (élément fini MEDKTR3) et DST (élément fini MEDSTR3) avec un maillage en épis et en maillage en étoiles,
3) coques tridimensionnelles de type COQUE_3D (éléments finis MEC3QU9H et MEC3TR7H),
4) éléments filaires à cinématique de poutre et modes de Fourier TUYAU (élément fini METUSEG3) et TUYAU_6M (élément fini MET6SEG3),
5) éléments de plaque solide de type COQUE_SOLIDE

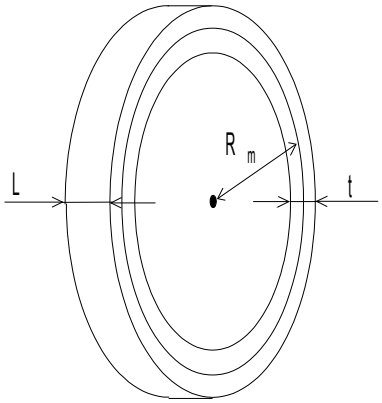
Les résultats obtenus sont comparés avec la solution issue d'une modélisation volumique de l'anneau (élément fini MECA_HEXA8) faisant apparaître les modes de Fourier d'ordre 2 (ovalisation) et 3 (trifolié) ainsi que 2 modes hors plan.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Problème de référence

## 1.1 Géométrie




Il s'agit d'un anneau cylindrique, de rayon moyen $R_m = 0.369\,m$, d'épaisseur $t = 0.048\,m$ et de longueur $L = 0.05\,m$.

## 1.2 Propriétés du matériau

Le matériau est homogène, isotrope, élastique linéaire. Les coefficients élastiques sont :
$E = 185000\,MPa$ et $\nu = 0.3$.
La masse volumique est constante et vaut : $\rho = 7800\,kg.m^{-3}$.

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

La structure est libre dans l'espace.

## 1.4 Ordre de grandeur des fréquences propres

Les modes propres recherchés correspondent aux modes de Fourier d'ordre 2 et 3 de l'anneau. Les fréquences d'un anneau peuvent être estimées à partir d'un modèle analytique de poutre courbe d'Euler [bib1]. Pour un mode de Fourier d'ordre $n$, la fréquence vaut :

$$f_n = \frac{n(n^2-1)}{2\pi R_m^2}\sqrt{\frac{E I_y}{m(n^2+1)}}$$

où : $I_y = \frac{L t^3}{12}$ et $m = \rho L t$

Pour les modes d'ovalisation ($n=2$) et trifolié ($n=3$), les fréquences correspondantes valent respectivement $211.65\,Hz$ et $598.64\,Hz$. La recherche de modes propres est effectuée sur la bande $200-800\,Hz$ afin de capter ces deux modes de Fourier.

## 1.5 Référence bibliographique

1) Blevins R.D., Formulas for natural frequency and mode shape, N.Y. : Van Nostrand Reynhold Company, 1979, 492 p.

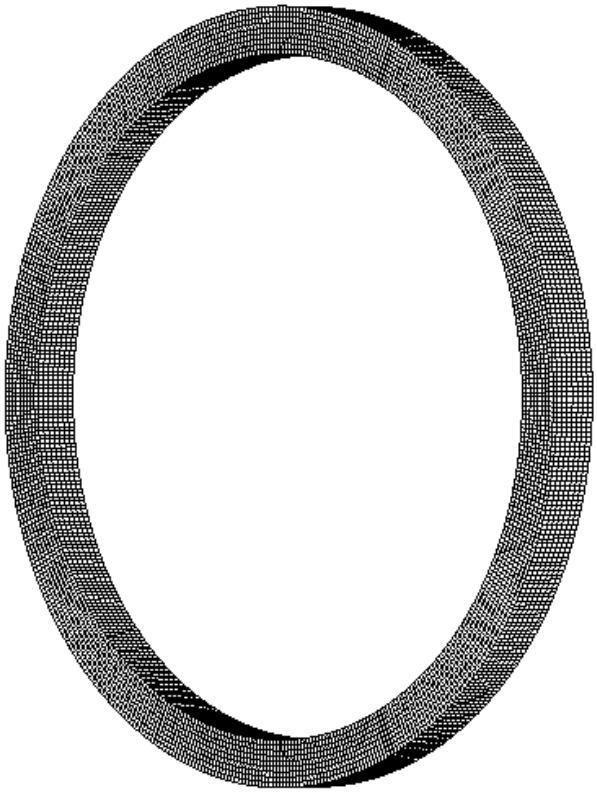


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Modélisation de référence

## 2.1 Caractéristiques de la modélisation de référence

Eléments volumiques 3D



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus. Les éléments 3D sont volumiques à 8 nœuds de type HEXA8. Le nombre de nœuds sur la circonférence est 600, sur l'épaisseur 9 et sur la longueur 9.

## 2.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 48600
Nombre de mailles et type : 38400 HEXA8

## 2.3 Valeurs de référence testées

Fréquences des modes propres d'ovalisation, trifolié et hors plan.

| Mode | Fréquences propres $(Hz)$ |
|---|---|
| ovalisation | 210.55 |
| | 210.55 |
| trifolié | 587.92 |
| | 587.92 |
| hors plan | 205.89 |
| | 205.89 |
| | 588.88 |
| | 588.88 |

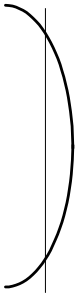


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

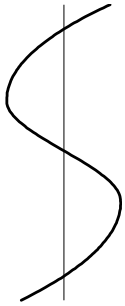
## 2.4 Remarques

Le problème axisymétrique possède des modes doubles dans le plan et hors plan.
Les modes hors plan ont les déformées suivantes :

$205.89\,Hz$ :



$588.88\,Hz$ :



## 2.5 Incertitudes

L'incertitude est issue de l'analyse de convergence du maillage où les fréquences propres avec la maillage de référence $600\times8\times8$ sont comparés à celles du maillages $500\times7\times9$.

| Nombre d'éléments | | | Fréquences propres ( $Hz$ ) | |
|---|---|---|---|---|
| **Circonférence** | **Epaisseur** | **Longueur** | **Ovalisation** | **Trifolié** |
| 100 | 3 | 3 | 232.03 | 648.62 |
| 200 | 3 | 3 | 225.20 | 628.74 |
| 400 | 5 | 8 | 221.02 | 616.34 |
| 500 | 7 | 9 | 210.64 | 588.18 |
| 600 | 8 | 8 | 210.55 | 587.92 |

L'incertitude est de 0.05% sur la fréquence.

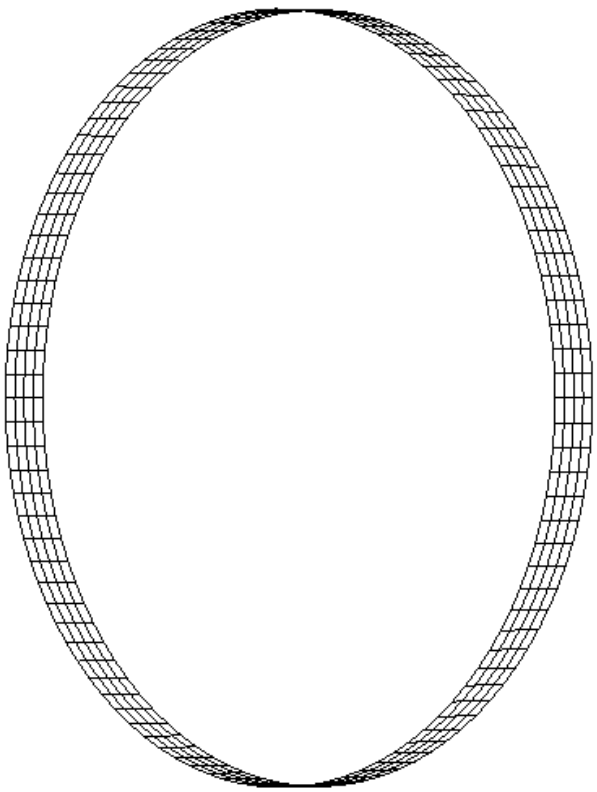


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Modélisation A

## 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Plaques DKQ et DSQ.



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus. Les éléments DKQ et DSQ sont des facettes planes à quatre noeuds de type QUAD4. Le nombre de noeuds sur la circonférence est 100 et sur la longueur 5.

## 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 500
Nombre de mailles et type : 400 QUAD4

## 3.3 Valeurs testées

(Fréquences en Hertz). La modélisation A teste COEF_RIGI_DRZ négatif. Dans ce cas le ddl DRZ a un sens physique de « drilling rotation » ou rotation autour de la normale à la surface moyenne.

| Mode | Référence | % différence | % différence |
|---|---|---|---|
| ovalisation | 210.55 | 0.44 | –0.46 |
| | 210.55 | 0.44 | –0.46 |
| trifolié | 587.92 | 1.75 | –0.27 |
| | 587.92 | 1.75 | –0.27 |
| hors plan | 205.89 | 13.99 | |
| | 205.89 | 13.99 | |
| | 588.88 | 9.75 | –9.49 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

| | | |
|---|---|---|
| 588.88 | 9.75 | –9.49 |

On teste également, les differences de résultat entre les modèles DSQ et DKQ.

## 3.4 Remarques

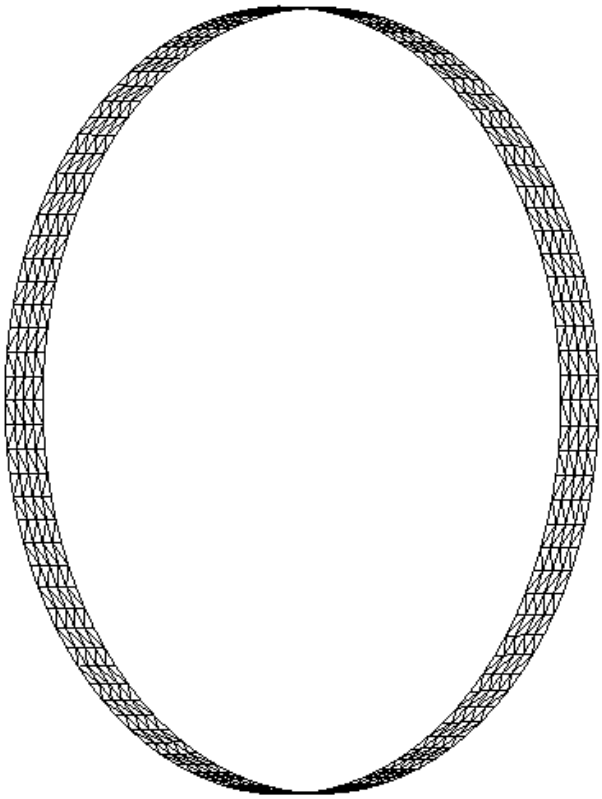
Les modélisations en plaques DKQ et DSQ ne permettent pas de représenter correctement les modes hors plan. On peut penser que cela est dû au nombre de mailles sur la longueur trop faible (4 au lieu de 8 dans la modélisation de référence). La première fréquence hors plan en plaques DSQ doit être inférieure à $200\,Hz$ .



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 4 Modélisation B

Plaques DKT et DST - maillage en épis



La géométrie discrétisée sur le rayon moyen $R_m = 0.369\,m$ est représentée ci-dessus. Les éléments DKT et DST sont des facettes planes à trois nœuds de type TRIA3 disposées en épis. Le nombre de nœuds sur la circonférence est 100 et sur la longueur 5.

## 4.1 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 500
Nombre de mailles et type : 800 TRIA3

## 4.2 Valeurs testées

(Fréquences en Hertz)

| Mode | Référence | Aster DKT | % différence | Aster DST | % différence |
|---|---|---|---|---|---|
| ovalisation | 210.55 | 211.54 | 0.47 | 203.69 | –3.25 |
| | 210.55 | 211.54 | 0.47 | 203.69 | –3.25 |
| trifolié | 587.92 | 598.64 | 1.82 | 568.70 | –3.27 |
| | 587.92 | 598.64 | 1.82 | 568.70 | –3.27 |
| hors plan | 205.89 | 254.89 | 23.80 | 202.38 | –1.70 |
| | 205.89 | 254.89 | 23.80 | 202.38 | –1.70 |
| | 588.88 | 707.53 | 20.14 | 617.18 | 4.81 |
| | 588.88 | 707.53 | 20.14 | 617.18 | 4.81 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 4.3 Remarques

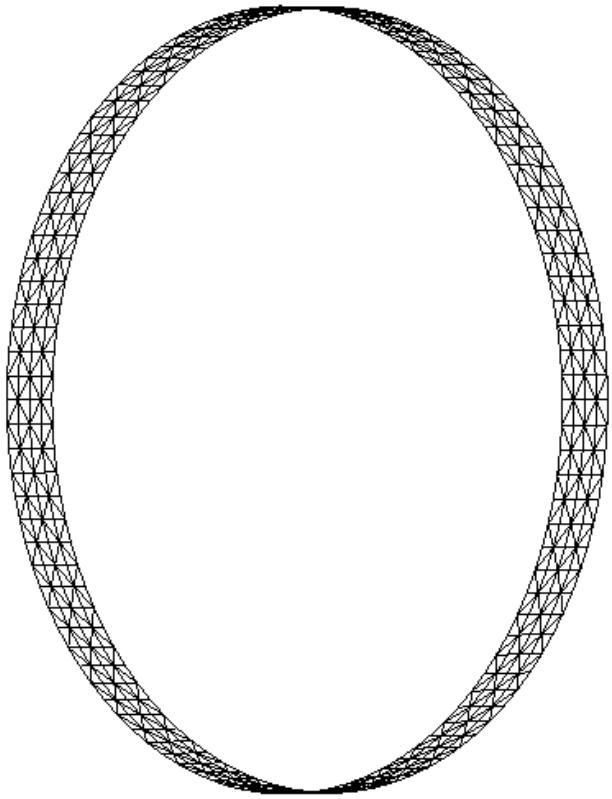
La modélisation en plaques DKT ne permet pas de représenter correctement les modes hors plan. Les erreurs sur les fréquences en plaques DST sont relativement importantes.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 5 Modélisation C

Plaques DKT et DST - maillage en étoiles



La géométrie discrétisée sur le rayon moyen $R_m = 0.369\ m$ est représentée ci-dessus. Les éléments DKT et DST sont des facettes planes à trois nœuds de type TRIA3 disposées en étoiles. Le nombre de nœuds sur la circonférence est 100 et sur la longueur 5.

## 5.1 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 500
Nombre de mailles et type : 800 TRIA3

## 5.2 Valeurs testées

(Fréquences en Hertz)

| Mode | Référence | Aster DKT | % différence | Aster DST | % différence |
|---|---|---|---|---|---|
| ovalisation | 210.55 | 211.54 | 0.47 | 208.20 | –1.11 |
| | 210.55 | 211.54 | 0.47 | 208.20 | –1.11 |
| trifolié | 587.92 | 598.58 | 1.81 | 581.00 | –1.18 |
| | 587.92 | 598.58 | 1.81 | 581.00 | –1.18 |
| hors plan | 205.89 | 284.38 | 38.12 | 225.23 | 9.39 |
| | 205.89 | 284.38 | 38.12 | 225.23 | 9.39 |
| | 588.88 | 797.24 | 35.38 | 690.73 | 17.29 |
| | 588.88 | 797.24 | 35.38 | 690.73 | 17.29 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 5.3 Remarques

Les modélisations en plaques DKT et DST ne permettent pas de représenter correctement les modes hors plan.

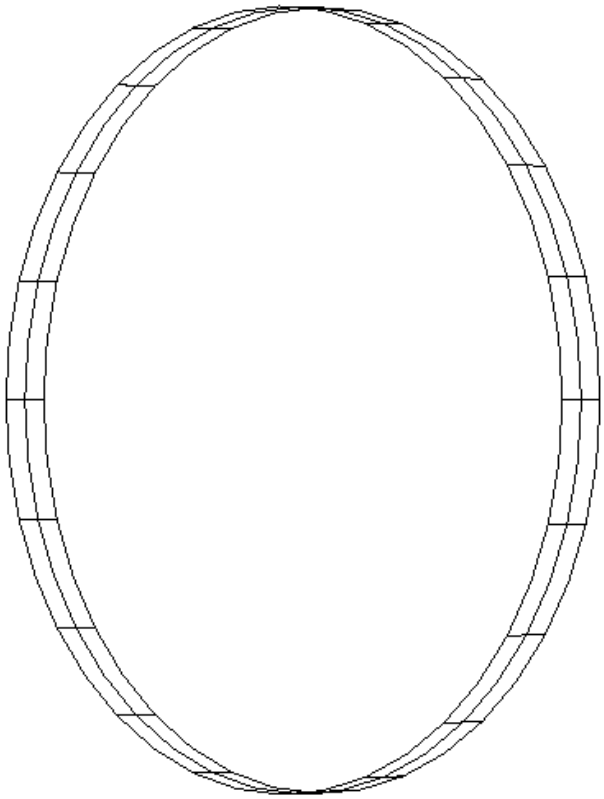


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 6 Modélisation D

## 6.1 Caractéristiques de la modélisation

COQUE_3D maillage en QUAD9.



La géométrie discrétisée sur le rayon moyen $R_m = 0.369\,m$ est représentée ci-dessus. Les éléments COQUE_3D sont des mailles à 9 nœuds de type QUAD9 permettant de prendre en compte le rayon de courbure de l'anneau. Les nœuds milieux sont bien sur la circonférence moyenne. Le nombre de nœuds sur la circonférence est 40 et sur la longueur 5.

## 6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 200
Nombre de mailles et type : 40 QUAD9

## 6.3 Valeurs testées

(Fréquences en Hertz)

| Mode | Référence | *Code_Aster* | % différence |
|---|---|---|---|
| ovalisation | 210.55 | 209.91 | –0.30 |
| | 210.55 | 209.91 | –0.30 |
| trifolié | 587.92 | 586.51 | –0.24 |
| | 587.92 | 586.51 | –0.24 |
| hors plan | 205.89 | 205.14 | –0.36 |
| | 205.89 | 205.14 | –0.36 |
| | 588.88 | 587.55 | –0.23 |
| | 588.88 | 587.55 | –0.23 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 6.4 Remarques

Toutes les fréquences sont correctement estimées.

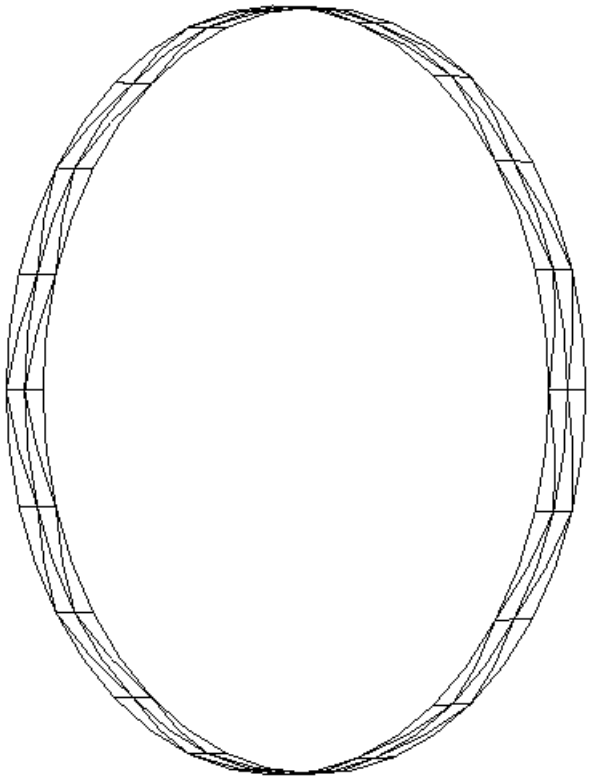


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 7 Modélisation E

## 7.1 Caractéristiques de la modélisation

COQUE_3D maillage en TRIA7.



La géométrie discrétisée sur le rayon moyen $R_m = 0.369\,m$ est représentée ci-dessus. Les éléments COQUE_3D sont des mailles à 7 nœuds de type TRIA7 permettant de prendre en compte le rayon de courbure de l'anneau. Les nœuds milieux sont bien sur la circonférence moyenne. Le nombre de nœuds sur la circonférence est 40 et sur la longueur 5.

## 7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 280
Nombre de mailles et type : 160 TRIA7

## 7.3 Valeurs testées

(Fréquences en Hertz)

| Mode | Référence | *Code_Aster* | % différence |
|---|---|---|---|
| ovalisation | 210.55 | 211.19 | 0.30 |
| | 210.55 | 211.19 | 0.30 |
| trifolié | 587.92 | 590.98 | 0.52 |
| | 587.92 | 590.98 | 0.52 |
| hors plan | 205.89 | 205.81 | –0.04 |
| | 205.89 | 205.81 | –0.04 |
| | 588.88 | 595.38 | 1.10 |
| | 588.88 | 595.38 | 1.10 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 7.4 Remarques

Les fréquences sont moins bien estimées qu'avec les éléments QUAD9.

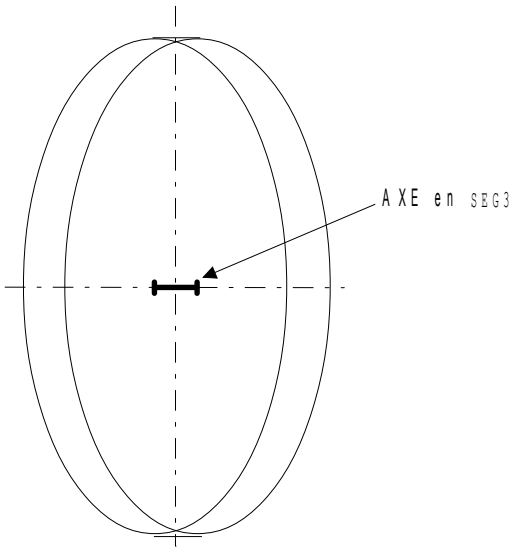


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 8 Modélisation F

## 8.1 Caractéristiques de la modélisation

TUYAU et TUYAU_6M.




La géométrie discrétisée sur l'axe de l'anneau est représentée ci-dessus. Les éléments TUYAU et TUYAU_6M sont des mailles à 3 nœuds de type SEG3 représentant l'axe de l'anneau. Le nombre de nœuds sur l'axe est 5.

## 8.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 5
Nombre de mailles et type : 2 SEG3

## 8.3 Valeurs testées

(Fréquences en Hertz)

| Mode | Référence | Aster TUYAU | % différence | Aster TUYAU_6M | % différence |
|---|---|---|---|---|---|
| ovalisation | 210.55 | 209.02 | –0.72 | 209.02 | –0.72 |
| | 210.55 | 209.02 | –0.72 | 209.02 | –0.72 |
| trifolié | 587.92 | 591.00 | 0.52 | 591.00 | 0.52 |
| | 587.92 | 591.00 | 0.52 | 591.00 | 0.52 |
| hors plan | 205.89 | 259.74 | 26.15 | 259.74 | 26.15 |
| | 205.89 | 259.74 | 26.15 | 259.74 | 26.15 |
| | 588.88 | 649.57 | 10.31 | 649.57 | 10.31 |
| | 588.88 | 649.57 | 10.31 | 649.57 | 10.31 |

## 8.4 Remarques

Les modélisations en TUYAU (limitée par construction à 3 modes de Fourier) et TUYAU_6M ne permettent pas de représenter correctement les modes hors plan. En revanche, ils fournissent les mêmes résultats sur les modes plans, proches de la référence.

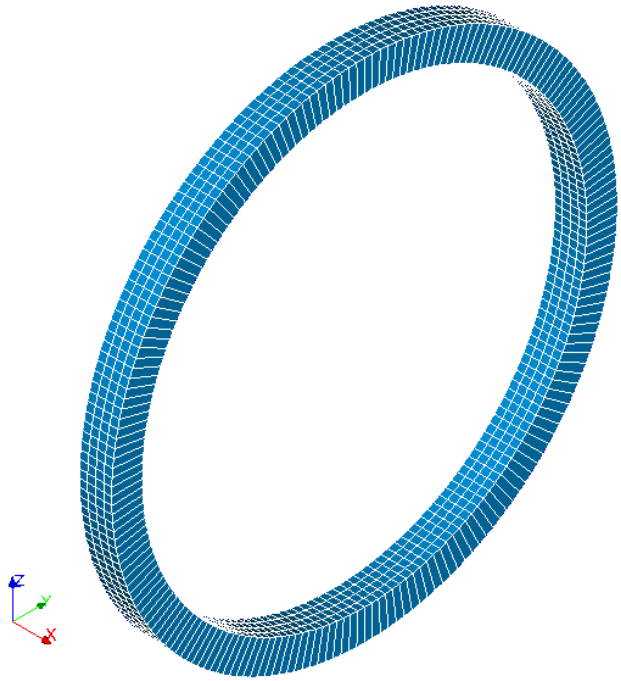


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 9 Modélisation H

## 9.1 Caractéristiques de la modélisation

Plaques COQUE_SOLIDE.



## 9.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2000
Nombre de mailles et type : 800 HEXA9

## 9.3 Valeurs testées

(Fréquences en Hertz).

| Mode | Référence | % différence |
|---|---|---|
| ovalisation | 210.55 | 0,3% |
| | 210.55 | 0,3% |
| trifolié | 587.92 | 0,4% |
| | 587.92 | 0,4% |
| hors plan | 205.89 | 1,9% |
| | 205.89 | 1,9% |
| | 588.88 | 1,4% |
| | 588.88 | 1,4% |

## 9.4 Remarques

Toutes les fréquences sont correctement estimées. Les résultats sont excellents pour les modes dans le plan et hors-plan. L'élément représente bien ces derniers, contrairement à l'élément DKT.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 10 Synthèse des résultats

- Même si les résultats obtenus sont honorables, les modèles DKQ, DSQ, DKT, DST, TUYAU et TUYAU_6M ne permettent pas d'estimer les modes hors plan de l'anneau. Seul le modèle COQUE_3D avec un maillage en QUAD9 et les éléments COQUE_SOLIDE fournissent une bonne estimation fréquentielle de ces modes
- Les modèles DSQ et COQUE_3D en QUAD9 donnent une erreur voisine de 0.3% pour les modes d'ovalisation et trifolié. Pour les modèles COQUE_3D en TRIA7, TUYAU et TUYAU_6M, cette erreur avoisine 0.7% et est supérieure à 1% pour les DKQ, DKT et DST.
- Les meilleurs résultats des DSQ par rapport aux DKQ confirment que l'effet du cisaillement transverse n'est pas négligeable dans les coques d'épaisseur notable.
- Sur une géométrie développable comme celle du cylindre étudié ici, les éléments finis quadrangulaires fournissent de meilleurs résultats que les éléments finis triangulaires. Les DST, testés sur un maillage en épis et sur un maillage symétrique en étoiles, sont beaucoup moins bons que les DSQ. La même remarque est également valable pour les COQUE_3D en TRIA7 par rapport aux COQUE_3D en QUAD9.
- Les performances des COQUE_3D sont bonnes quantitativement et en temps de calcul. La richesse de l'interpolation, la prise en compte de la courbure du cylindre dans les éléments et la correction métrique effectuée dans l'épaisseur de la coque semblent expliquer ces bons résultats.
- L'élément COQUE_SOLIDE donne d'excellents résultats malgré une approche plaque (et donc une approximation par facettes planes). Contrairement au DKQ et au DST, les modes hors plan sont correctement représentés.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)