SDLS106 - Calcul modal d'une plaque rectangulaire simplement appuyée sur tous ses bords

Résumé :

Ce test du domaine de l'analyse modale met en œuvre le calcul de modes propres de flexion d'une plaque rectangulaire simplement appuyée sur tous ses bords.

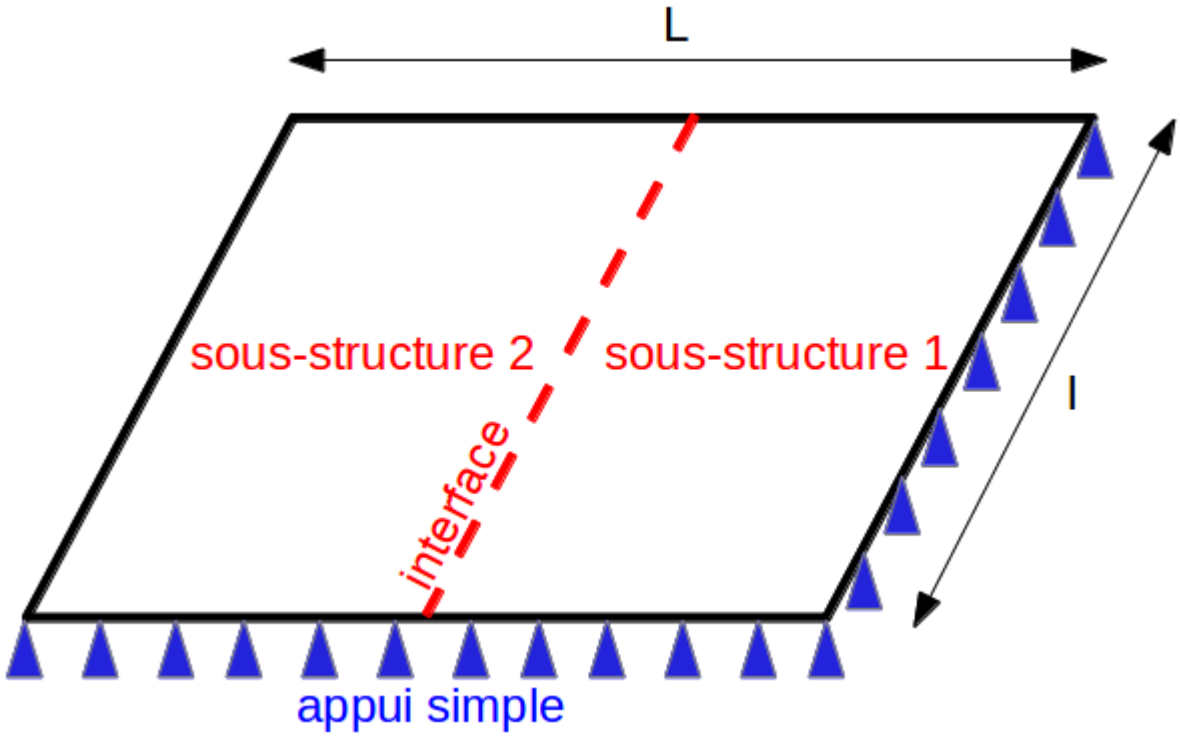
Le calcul est fait
- soit en sous-structuration sur base modale de Ritz, avec une interface de type Craig-Bampton ou Mac Neal ;
- soit de manière directe.

La solution de référence est analytique, à la fois pour les fréquences propres et les déformées modales.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



$L = 2\,m$

$l = 1{,}5\,m$

1.2 Propriétés de la structure

$\rho_v = 7800\,kg/m^3$ $E = 2.10^{11}\,Pa$ $\nu = 0.3$ épaisseur $h = 1\,mm$.

1.3 Conditions aux limites et chargements

La plaque est en appui simple sur ses quatre bords.

Remarque : dans le cas des calculs par sous-structuration (modélisations A à G), l'interface de chaque sous-structure est encastrée (interface de type Craig-Bampton).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Solution de référence

D'après [bib1], les fréquences propres de vibration d'une plaque rectangulaire appuyée sur tous ses bords sont données par la formule analytique :

$$f_{ij}=\frac{\lambda_{ij}^2}{2\pi L^2}\left[\frac{E h^3}{12\rho_s(1-\nu^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

avec

$$\lambda_{ij}^2=\pi^2\left[i^2+\left(\frac{L}{l}\right)^2 j^2\right]$$

où

i et j sont le nombre de demi-ondes de la déformée modale le long du grand axe et du petit axe de la plaque. ρ_s est la masse par unité de surface.

Soit

$$\begin{aligned} f_{11}&=17{,}13\ Hz\\ f_{21}&=35{,}63\ Hz\\ f_{12}&=50{,}01\ Hz\\ f_{31}&=66{,}46\ Hz\\ f_{22}&=68{,}51\ Hz \end{aligned}$$.

Les déformées modales sont également calculées analytiquement : le déplacement modal z_{ij} perpendiculaire à la plaque, pour le mode (i,j), en fonction du point de coordonnées (x,y), est donné par :

$$z_{ij}(x,y)=\sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{j\pi y}{l}\right)$$.

2.2 Cas des calculs par sous-structuration : solution de référence de chaque sous-structure

Chaque sous-structure est une plaque de longueur $l=1{,}5\,m$ et de largeur $\frac{L}{2}=1\,m$, appuyée sur trois cotés et encastrée sur un côté long, vibrant en flexion.

On montre [bib1] que les fréquences propres valent :

$$f_{ij}=\frac{\lambda_{ij}^2}{2\pi l^2}\left[\frac{E h^3}{12\rho_s(1-\nu^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

avec $\lambda_{11}^2=42{,}53$, $\lambda_{21}^2=69{,}00$, $\lambda_{31}^2=116{,}30$, $\lambda_{12}^2=121{,}00$

ce qui donne pour les premières fréquences :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$f_{11} = 47{,}26\ Hz$$
$$f_{21} = 76{,}57\ Hz$$
$$f_{31} = 129{,}24\ Hz$$
$$f_{12} = 134{,}47\ Hz$$

2.3 Référence bibliographique

1.BLEVINS R.D : Formulas for natural frequency and mode shape. Ed. Krieger 1984.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Pour chacune des deux sous-structures : 600 mailles QUAD4.

3.2 Grandeurs testées sur la structure complète

On teste les fréquences propres :

Identification	Référence	Tolérance
Mode n°11 fréquence	$17.13\ Hz$	0.5 %
Mode n°21 fréquence	$35.63\ Hz$	0.5 %
Mode n°12 fréquence	$50.01\ Hz$	0.5 %
Mode n°31 fréquence	$66.46\ Hz$	0.5 %
Mode n°22 fréquence	$68.51\ Hz$	0.5 %

On teste aussi les déformées modales des troisième et quatrième modes (repérés par les indices $(1,2)$ et $(3,1)$ respectivement), en récupérant la composante DZ de la déformée suivant trois lignes : les deux axes médians et la diagonale de la plaque. Chaque ligne est discrétisée par 10 points.

Identification	Référence	Tolérance (relative, sauf mention contraire)
Mode n°12		
Déformée suivant le grand axe médian	cf. paragraphe 2.1	0.1 (en absolu)
Déformée suivant le petit axe médian	"	1 %
Déformée suivant la diagonale	"	2 %
Mode n°31		
Déformée suivant le grand axe médian	"	4 %
Déformée suivant le petit axe médian	"	1 %
Déformée suivant la diagonale	"	4 %

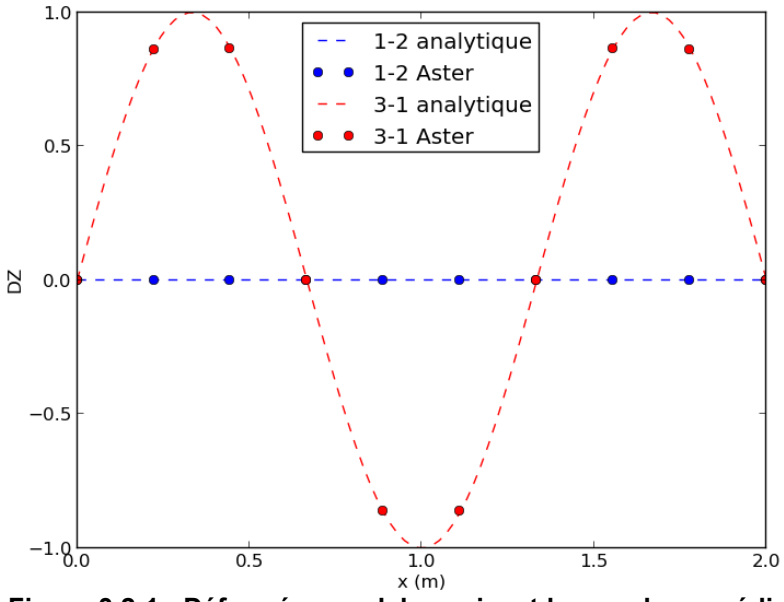


Figure 3.2-1 - Déformées modales suivant le grand axe médian.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

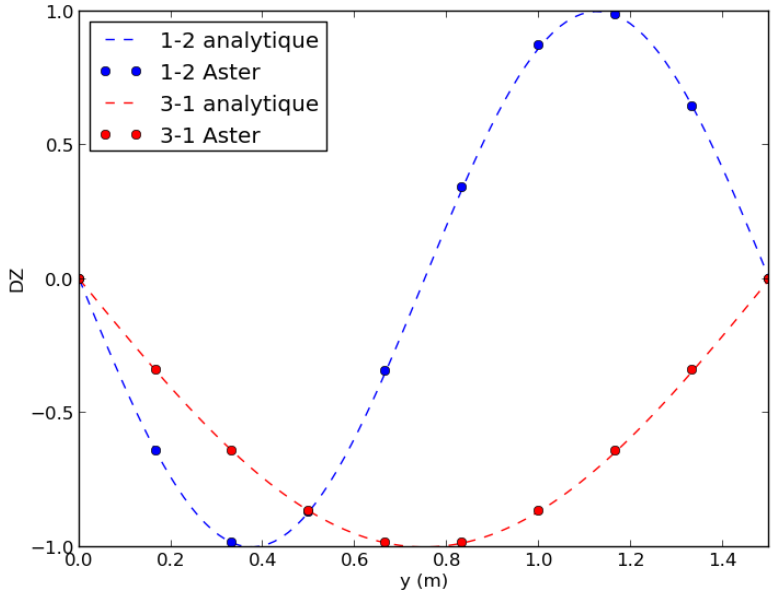


Figure 3.2-2 - Déformées modales suivant le petit axe médian.

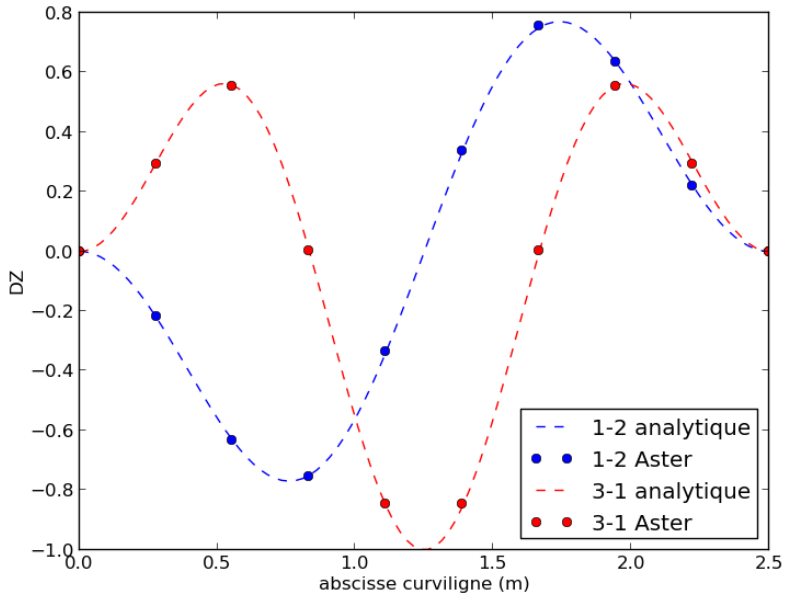


Figure 3.2-3 - Déformées modales suivant la diagonale.

Les résultats sont très satisfaisants.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Sous structure 1 : 600 mailles QUAD4.
Sous structure 2 : 509 mailles QUAD4.
Pour chaque sous structure : 6 modes à interface fixe + 20 modes de couplage.

4.2 Grandeurs testées sur la structure complète

Identification	Référence	Tolérance
Mode n°11 fréquence	17.13 *Hz*	1.25 %
Mode n°21 fréquence	35.63 *Hz*	1.25 %
Mode n°12 fréquence	50.01 *Hz*	1.25 %
Mode n°31 fréquence	66.46 *Hz*	1.25 %
Mode n°22 fréquence	68.51 *Hz*	1.25 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

On libère les appuis pour tester l'existence des 6 modes de corps rigide.

Sous structure 1 : 600 mailles QUAD4.
Sous structure 2 : 509 mailles QUAD4.
Pour chaque sous structure : 6 modes à interface fixe + 20 modes de couplage.

5.2 Grandeurs testées sur la structure complète

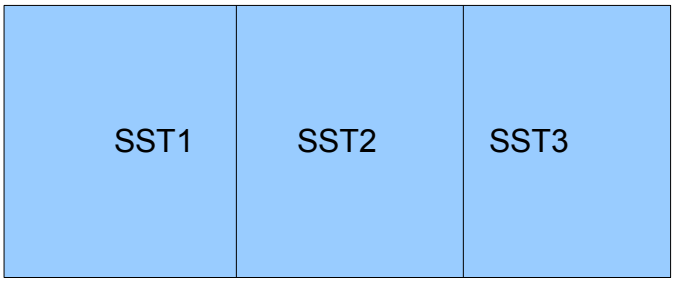
Identification	Référence	Tolérance
Mode n°1 fréquence	$0.0\ Hz$	$0.1\ Hz$
Mode n°2 fréquence	$0.0\ Hz$	$0.1\ Hz$
Mode n°3 fréquence	$0.0\ Hz$	$0.1\ Hz$
Mode n°4 fréquence	$0.0\ Hz$	$0.1\ Hz$
Mode n°5 fréquence	$0.0\ Hz$	$0.1\ Hz$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

La structure est découpées en 3 sous structures, toutes appuyées sur les bords extérieurs. Le modèle complet présente deux interfaces, une de type Craig&Bampton, l'autre de type MacNeal. On teste la possibilité d'avoir une sous structure possédant deux types d'interfaces différents :



Sous structure 1 et 3: 360 mailles QUAD4.
Sous structure 2 : 480 mailles QUAD4.
Pour chaque sous structure : 6 modes à interface fixe + 20 modes de couplage.

6.2 Grandeurs testées sur la structure complète

Identification	Référence	Tolérance
Mode n°11 fréquence	17.13 *Hz*	1.25 %
Mode n°21 fréquence	35.63 *Hz*	1.25 %
Mode n°12 fréquence	50.01 *Hz*	1.25 %
Mode n°31 fréquence	66.46 *Hz*	1.25 %
Mode n°22 fréquence	68.51 *Hz*	1.25 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Identique à la modélisation B, mais utilisation des opérateurs CREA_ELEM_SSD et ASSE_ELEM_SSD.

7.2 Grandeurs testées sur la structure complète

Identification	Référence	Tolérance
Mode n°11 fréquence	17.13 *Hz*	1.25 %
Mode n°21 fréquence	35.63 *Hz*	1.25 %
Mode n°12 fréquence	50.01 *Hz*	1.25 %
Mode n°31 fréquence	66.46 *Hz*	1.25 %
Mode n°22 fréquence	68.51 *Hz*	1.25 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Modélisation F

8.1 Caractéristiques de la modélisation

Identique à la modélisation D, mais utilisation des opérateurs CREA_ELEM_SSD et ASSE_ELEM_SSD.

8.2 Grandeurs testées sur la structure complète

Identification	Référence	Tolérance
Mode n°11 fréquence	17.13 *Hz*	1.25 %
Mode n°21 fréquence	35.63 *Hz*	1.25 %
Mode n°12 fréquence	50.01 *Hz*	1.25 %
Mode n°31 fréquence	66.46 *Hz*	1.25 %
Mode n°22 fréquence	68.51 *Hz*	1.25 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Modélisation G

9.1 Caractéristiques de la modélisation

Identique à la modélisation A, mais en utilisation une méthode de sous structuration par modes libres uniquement (MODELE_GENE avec OPTION « REDUIT », NUME_DDL_GENE avec méthode ELIMINE pour assurer la compatibilité des interfaces). Les résultats sont mauvais, comme attendus en utilisant ce type d'approche, d'où l'utilisation de tolérances importantes.

9.2 Grandeurs testées sur la structure complète

Identification	Référence	Tolérance
Mode n°11 fréquence	17.13 *Hz*	100 %
Mode n°21 fréquence	35.63 *Hz*	100 %
Mode n°12 fréquence	50.01 *Hz*	100 %
Mode n°31 fréquence	66.46 *Hz*	100 %
Mode n°22 fréquence	68.51 *Hz*	100 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

10 Modélisation H

10.1 Caractéristiques de la modélisation

La plaque est modélisée avec un maillage complet (contrairement à la sous-structuration). Le maillage comporte 1200 mailles QUAD4, ce qui correspond au double de la modélisation A.

10.2 Grandeurs testées sur la structure complète

On teste les fréquences propres :

Identification	Référence	Tolérance
Mode n°11 fréquence	$17.13\ Hz$	0.5 %
Mode n°21 fréquence	$35.63\ Hz$	0.5 %
Mode n°12 fréquence	$50.01\ Hz$	0.5 %
Mode n°31 fréquence	$66.46\ Hz$	0.5 %
Mode n°22 fréquence	$68.51\ Hz$	0.5 %

On teste aussi les déformées modales des troisième et quatrième modes (repérés par les indices $(1,2)$ et $(3,1)$ respectivement), en récupérant la composante DZ de la déformée suivant trois lignes : les deux axes médians et la diagonale de la plaque. Chaque ligne est discrétisée par 10 points.

Identification	Référence	Tolérance (relative, sauf mention contraire)
Mode n°12		
Déformée suivant le grand axe médian	cf. paragraphe 2.1	0.1 (en absolu)
Déformée suivant le petit axe médian	"	1 %
Déformée suivant la diagonale	"	1 %
Mode n°31		
Déformée suivant le grand axe médian	"	1 %
Déformée suivant le petit axe médian	"	1 %
Déformée suivant la diagonale	"	1 %

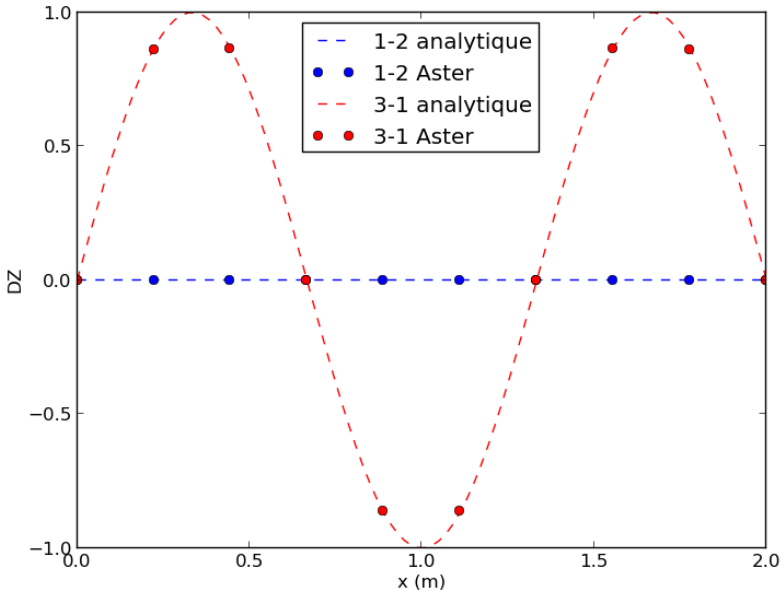


Figure 10.2-1 - Déformées modales suivant le grand axe médian.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

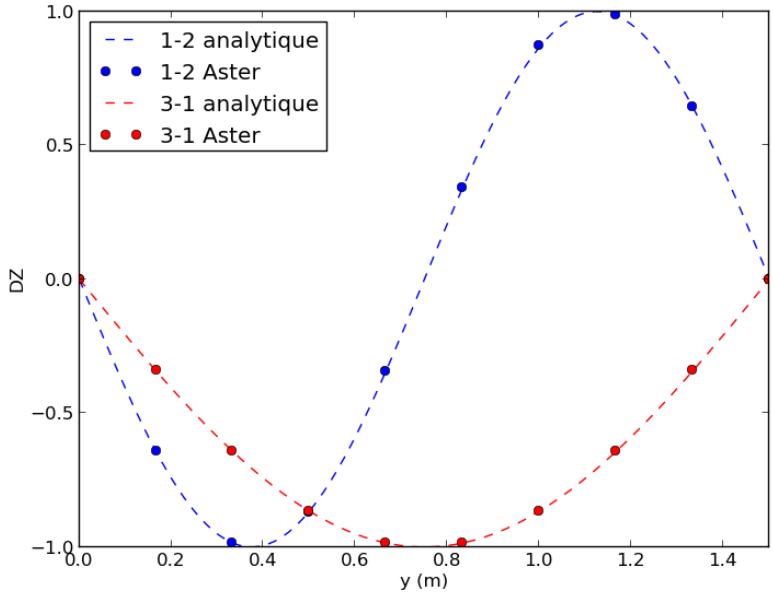


Figure 10.2-2 - Déformées modales suivant le petit axe médian.

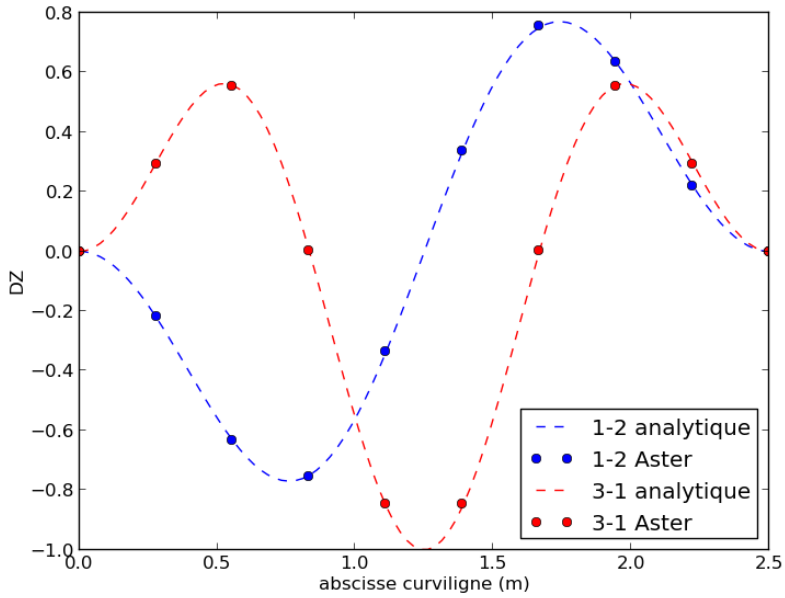


Figure 10.2-3 - Déformées modales suivant la diagonale.

Les résultats sont très satisfaisants.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

11 Synthèse des résultats

Le calcul modal a été validé sur les modes propres de flexion d'une plaque simplement appuyée sur ses quatre bords, aussi bien pour les fréquences propres que les déformées modales.

Les résultats sont satisfaisants, que le calcul soit fait de manière directe ou par sous-structuration avec base modale de type « Ritz ».

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)