SDLS07 - Modes propres d'une enveloppe sphérique mince

Résumé :

Ce test issu du guide VPCS permet de valider les algorithmes de l'opérateur de recherche de valeurs propres CALC_MODES avec les matrices de rigidité et de masse correspondant aux modélisations suivantes :

1) Coques tridimensionnelles : éléments finis DKT (mailllage d'un 1/8 de sphère),
2) Eléments finis 2D axisymétriques TRIA6 et QUAD8 (maillage d'une section),
3) Coques tridimensionnelles : éléments finis axisymétriques isoparamétriques SEG3 (maillage linéique de la section),
4) Coques tridimensionnelles COQUE_3D : élément fini MEC3QU9H (maillage 1/8 de sphère),
5) Coques tridimensionnelles COQUE_3D : élément fini MEC3TR7H.

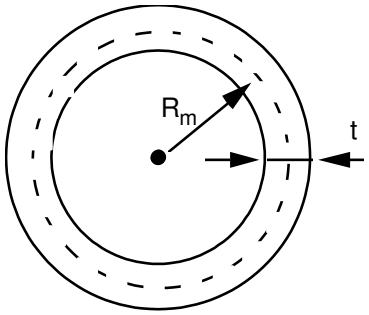
Les résultats obtenus sont comparés à la solution analytique (HAYEK) et font apparaître pour les six premiers modes des écarts inférieurs à :

- 0,45% pour les éléments milieux continus axisymétriques,
- 0,20% pour les éléments de coque DKT,
- 0,17% pour les éléments de coques axisymétriques isoparamétriques,
- 0,17% pour les éléments COQUE_3D.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Il s'agit d'une sphère mince, de rayon moyen $R_m = 2.5\,m$, et d'épaisseur $t = 0.1\,m$.

1.2 Propriétés des matériaux

Le matériau est homogène, isotrope, élastique linéaire. Les coefficients élastiques sont : $E = 200\,000\ MPa$ et $\nu = 0.3$.

La masse volumique est constante et vaut : $\rho = 7800\,kg/m^3$.

1.3 Conditions aux limites et chargements

La structure est libre dans l'espace.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Pour les sphères minces ($i.t \ll R$ avec i , ordre du mode), les modes propres avec déplacement radial et tangentiel établis par une théorie de membrane sont donnés par [bib1] et [bib2] :

$$f_i = \frac{\lambda_i}{2\pi R}\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$$

avec $\lambda_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{b \pm \sqrt{b^2 - 4(1-\nu^2)(i^2+i-2)}}$ et $b = i^2+i+1+3\nu$

La théorie présentée par Hayek permet d'introduire une correction de l'effet de flexion (approximation de la théorie générale de Wilkinson) qui conduit à des valeurs de λ_i fonction de

$a = t^2/12R^2$
$b = i(i+1)$

et solution de :

$$\lambda_i^4 - \lambda_i^2[1+3\nu - a(1-\nu) + b(1+a\nu+ab)] + ab[b^2 - 4b + 5 - \nu^2] + (1-\nu^2)[b - 2(1+a)] = 0$$

2.2 Résultats de référence

Fréquences propres :

i	Fréquences propres
2	237.25
3	282.85
4	305.24
5	324.17
6	346.76
7	376.68
8	416.
9	465.75
10	526.20

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

2.4 Références bibliographiques

1) Fiche VPCS SDLS 07/89 dans le Guide de Validation des Progiciels de Calcul de Structures/SFM AFNOR TECHNIQUE 1990.

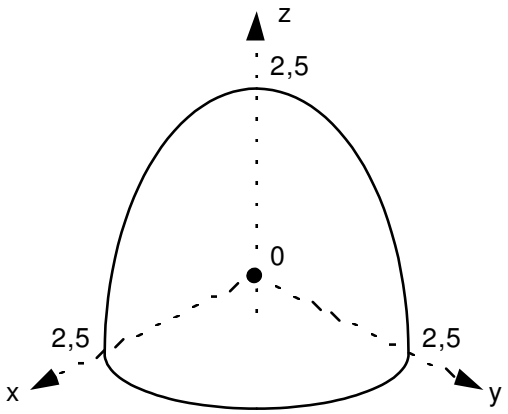
2) S. HAYEK : "Vibrations of a spherical shell in acoustic medium", Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 40, 2, 1996, p. 342-348

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Coques DKT



(3 plans de symétrie)

La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus. Les éléments DKT sont des facettes planes à 3 nœuds. Le nombre des nœuds sur le méridien et sur l'équateur est : 34.

Les conditions aux limites appliquées sur les trois frontières correspondent aux conditions de symétrie (déplacements et rotations bloquées).

3.2 Caractéristiques du maillage

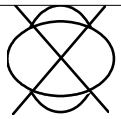
Nombre de nœuds : 1128

Nombre de mailles et types : 2125 TRIA3

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 Grandeurs testées et résultats

(Fréquences en Hertz)

Valeur du paramètre i de la solution de référence	Référence	*Aster*	% différence
 2	237.25	237.24 237.24	–0.005 –0.003
3	282.85	non obtenu [§4.2]	
4	305.24	304.97 304.99 305.08	–0.089 –0.080 –0.054
5	324.17	non obtenu [§4.2]	
6	346.76	346.11 346.12 346.30 346.38	–0.186 –0.185 –0.133 –0.108
7	376.68	non obtenu [§4.2]	
8	416.00	414.89 414.92 415.16 415.24 415.33	–0.266 –0.259 –0.201 –0.183 –0.161
9	465.75	non obtenu [§4.2]	
10	526.20	524.34 524.43 524.71 524.94 524.97 525.12	–0.353 –0.337 –0.283 –0.240 –0.234 –0.205

3.4 Remarques

La solution de référence ne donne pas la multiplicité des modes. On observe avec les calculs des ordres de multiplicité qui croissent avec la valeur de la fréquence.

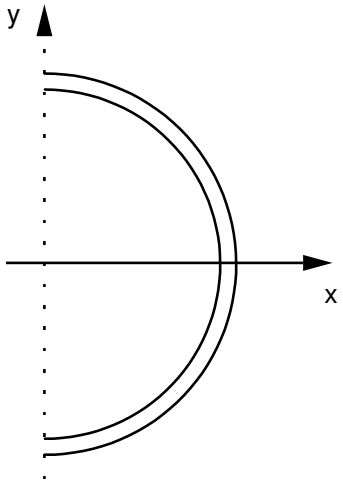
Les modes 3, 5, 7, 9 ne sont pas obtenus à cause des conditions aux limites choisies pour ce modèle, avec les trois plans de symétrie.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

2D axisymétrique



Aucune condition aux limites.

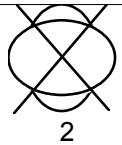
4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 365

Nombre de mailles et types : 40 QUAD8 et 80 TRIA6

4.3 Grandeurs testées et résultats

Fréquences en Hertz

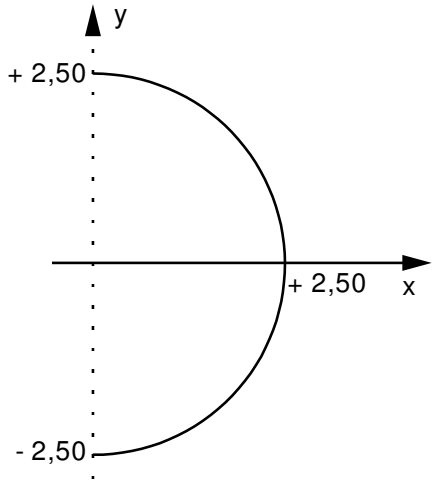
Identification n° mode	Référence	*Aster*	% différence
 2	237.25	237.24	0.036
3	282.85	282.78	–0.023
4	305.24	304.85	–0.125
5	324.17	323.32	–0.262
6	346.76	345.22	–0.443
7	376.68	374.14	–0.674
8	416.00	412.03	–0.955
9	465.75	459.75	–1.286
10	526.20	517.51	–1.651

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Coques 1D axisymétriques



Aucune condition aux limites.

On choisit le modèle de Love-Kirchhoff pour décrire la cinématique. Avec l'élément choisi, cette cinématique est obtenue par pénalisation : on met une grande valeur pour le coefficient A_CIS. Par ailleurs, on néglige la correction de métrique.

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 81

Nombre de mailles et types : 40 SEG3

5.3 Grandeurs testées et résultats

(Fréquences en Hertz)

Identification n° mode	Référence	*Aster* OPTION='BANDE' (méthode des itérations simultanées)	*Aster* OPTION='AJUSTE' (méthode des puissances inverses)	% différence
2	237.25	237.31	237.32	0.025/0.029
3	282.85	282.77	282.78	–0.028/–0.025
4	305.24	304.95	304.95	–0.096
5	324.17	323.68	323.68	–0.150
6	346.76	346.23	346.23	–0.154

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.4 Remarques

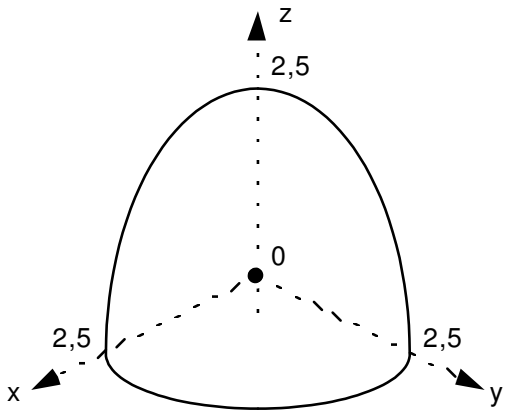
Ce test avec cette modélisation n'a pour but que de tester la matrice de masse. Un écart satisfaisant étant observé sur les six premières fréquences, on a choisi de ne pas calculer les suivantes.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Coques 3D MEC3QU9H



(3 plans de symétrie)

Les conditions aux limites appliquées sur les trois frontières correspondent aux conditions de symétrie (déplacements et rotations bloquées).

6.2 Caractéristiques du maillage

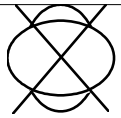
Nombre de nœuds : 331

Nombre de mailles et types : 75 QUAD9

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6.3 Grandeurs testées et résultats

(Fréquences en Hertz)

Identification n° mode	Référence	*Aster*	% différence
 2	237.25	237.25 237.26	0 0.004
3	282.85	non obtenu [§10.2]	
4	305.24	305.18 305.19 305.20	–0.019 –0.017 –0.011
5	324.17	non obtenu [§10.2]	
6	346.76	346.17 346.19 346.25 346.36	–0.169 –0.165 –0.147 –0.114
7	376.68	non obtenu [§10.2]	
8	416.00	413.81 413.84 413.84 414.02 414.09	–0.525 –0.520 –0.518 –0.476 –0.46
9	465.75	non obtenu [§10.2]	
10	526.20	520.57 520.62 520.64 521.28 521.29 521.31	–1.071 –1.06 –1.056 –0.935 –0.933 –0.929

6.4 Remarques

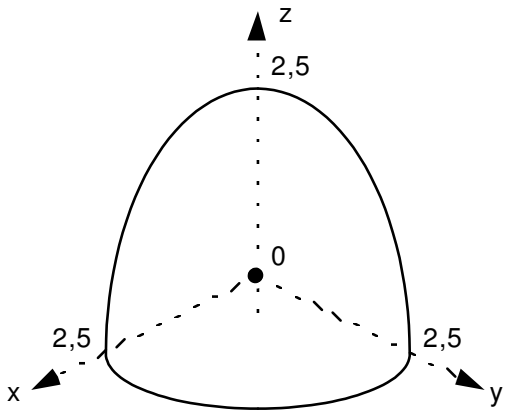
Les modes 3, 5, 7, 9 ne sont pas obtenus à cause des conditions aux limites choisies pour ce modèle, avec les trois plans de symétrie.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Coques 3D MEC3TR7H



(3 plans de symétrie)

7.2 Caractéristiques du maillage

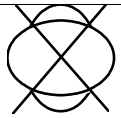
Nombre de nœuds : 925

Nombre de mailles et types : 294 TRIA7

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7.3 Grandeurs testées et résultats

(Fréquences en Hertz)

Identification n° mode	Référence	*Aster*	% différence
 2	237.25	237.25 237.25	–0.001 –0.001
3	282.85	non obtenu [§12.2]	
4	305.24	305.20 305.22 305.22	–0.011 –0.008 –0.005
5	324.17	non obtenu [§12.2]	
6	346.76	346.32 346.43 346.46 346.58	–0.126 –0.095 –0.086 –0.051
7	376.68	non obtenu [§12.2]	
8	416.00	413.91 414.33 414.36 414.99 415.14	–0.502 –0.402 –0.394 –0.241 –0.206
9	465.75	non obtenu [§12.2]	
10	526.20	520. 521.02 521.43 522.32 523.03 523.77	–1.176 –0.985 –0.907 –0.738 –0.602 –0.461

7.4 Remarques

Les modes 3, 5, 7, 9 ne sont pas obtenus à cause des conditions aux limites choisies pour ce modèle, avec les trois plans de symétrie.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Synthèse des résultats

- La modélisation coque DKT, restreinte ici aux modes présentant les 3 symétries par rapport aux plans $x=0$, $y=0$, $z=0$, fournit les fréquences propres avec une erreur inférieure à 0.4% sur les 20 premiers modes.
- La modélisation milieu continu $2D$ axisymétrique fournit les fréquences propres avec une erreur inférieure à 2%.
- La modélisation COQUE_AXIS (éléments isoparamétriques quadratiques) fournit les fréquences propres avec une erreur inférieure à 0.2% sur les 5 premiers modes (discrétisation spatiale identique à la trace du maillage $2D$ axisymétrique).
- La modélisation COQUE_3D dégénérée (éléments de coque épaisse MEC3QU9H, MEC3TR7H) fournir les fréquences propres avec une erreur inférieure à 1.2% sur les 10 premiers modes.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)