SDLL135 - Réponse dynamique d'une poutre-tuyau encastrée-libre

Résumé
Le domaine d'application est la dynamique linéaire, et plus particulièrement l'analyse modale puis l'analyse transitoire linéaire.

Les différentes modélisations :

1) éléments finis de poutre d'Euler POU_D_E,
2) éléments finis de poutre de Timoshenko POU_D_T,
3) éléments finis de tuyaux (TUYAU_3M et TUYAU_6M).
4) éléments finis de barres
5) éléments finis de coque (DKT)

Ce cas test est l'étude d'une poutre-tuyau élastique linéaire isotrope homogène, encastrée à sa base, soumise à un échelon de force et de couple en tête.

L'objectif est de tester les fréquences propres, les déplacements et les réactions d'appuis dans le régime transitoire (propagation d'une onde d'accélération), en petites transformations avec un schéma d'intégration temporelle implicite. Cette poutre-tuyau est courte et l'effet de l'énergie de cisaillement transverse est notable. Pour valider la prise en compte du terme dû aux forces d'inertie, on teste la réaction nodale au point chargé, celle-ci devant être nulle.

La comparaison est réalisée par rapport à une solution analytique dont les grandes lignes sont présentées ; inter-comparaison entre modélisations. La comparaison est également réalisée pour des solutions obtenues avec d'autres logiciels de calcul : *Circus* (par fonctions de transfert) et *EuroPlexus* (en dynamique rapide explicite). Pour les barres la comparaison est réalisée sur les résultats obtenus par les commandes DYNA_VIBRA et DYNA_NON_LINE afin de tester l'option M_GAMMA.

Les modélisations A, B et C participent également à la validation de l'option MOMENT_EQUIVALENT de POST_RCCM/B3600 .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Hypothèses et géométrie

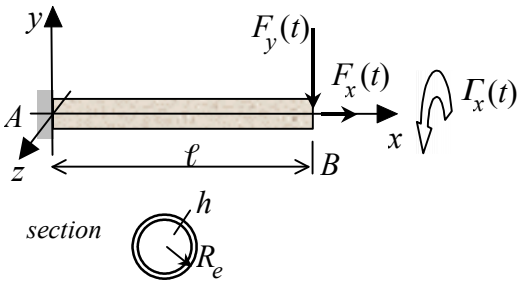


Figure 1.1-a

On considère une poutre–tuyau élastique homogène isotrope, chargée à son extrémité et encastrée à l'autre. Ce problème possède une solution analytique en théorie des poutres, confer par exemple [bib1], [bib2].

Les dimensions sont les suivantes (exemple tiré de [bib3]) :

1) longueur $l=1{,}00\,m$,
2) rayon extérieur du tuyau : $R_e=0.16\,m$,
3) épaisseur : $h=0.01\,m$

1.2 Propriétés des matériaux

On choisit les données de l'exemple tiré de [bib3] :

Module de Young :
$E=200000\ MPa$

Coefficient de Poisson : $\nu=0{,}29$

Masse volumique : $\rho=7830\ kg/m^3$

On n'introduit pas d'amortissement visqueux dans le problème.

1.3 Conditions aux limites et chargement

Conditions aux limites

L'extrémité A a ses déplacements de poutre bloqués en x, y et z ainsi que les rotations ; par contre, la section peut se déformer librement : les modes d'ovalisation–gonflement du tuyau sont libres.

Conditions initiales

La poutre–tuyau est initialement au repos dans un état vierge.

Chargement

On exerce un échelon de force axiale $F_x=1{,}0\ N$, de force transversale $F_y=1{,}0\ N$, de couple axial $\Gamma_x=1{,}0\ Nm$ sur l'extrémité B à l'instant $t=0\,s$.

La durée d'analyse est suffisante pour accéder à la première réflexion d'onde sur l'encastrement.

On néglige la pesanteur.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

On note $C_l=\sqrt{E/\rho}$ la célérité des ondes de traction-compression.

La section de la poutre-tuyau est : $S=\pi h\left(2R_e-h\right)$.

L'inertie de flexion de la poutre-tuyau est : $I=\pi h\left(R_e\left(R_e^2+h^2\right)-3hR_e^2/2-h^3/4\right)$.

L'inertie de torsion de la poutre-tuyau est : $J_x=2\pi h\left(R_e\left(R_e^2+h^2\right)-3hR_e^2/2-h^3/4\right)$.

L'élancement est donné par : $\eta=l\sqrt{S/I}$, l étant la longueur de la poutre.

Pour les dimensions données au § 1, on a :

$$S=0.0097389\,m^2\ ;\ I=0.0001171\,m^4\ ;\ \eta=9.1192\ .$$

Le comportement vibratoire de la structure est constitué de modes de « poutre », et de modes de « coques » (ovalisation…). Cette poutre-tuyau est courte : on peut s'attendre à un effet de l'énergie de cisaillement transverse. On construit la solution dynamique transitoire sous excitation forcée par recomposition modale.

2.1.1 Solution élasto-dynamique de la poutre en traction-compression

◊ L'équilibre élastique dynamique des vibrations libres en traction-compression s'écrit :

$ESu_{,xx}-\rho\,Su_{,tt}=0$, car l'effort normal est $N=ESu_{,x}$

Les fréquences des j èmes modes propres de poutre sont données par [bib2] dans la situation encastrée-libre en extension axiale :

$$f_j^{axial}=\frac{C_l}{4l}(2j-1),\quad \text{pour } j=1,2\ldots,\quad \text{les modes étant : } u_j(x)=\sin\frac{\pi(2j-1)x}{2\ell}$$

Avec les caractéristiques mécaniques de ce problème, on trouve les fréquences :

$$f_1=1263{,}497\,Hz\ ,\ f_2=3790{,}490\,Hz\ ,\ f_3=6317{,}484\,Hz\ ,\ f_4=8844{,}477\,Hz\ldots$$

Ceci donne l'ordre de grandeur des périodes de pulsation harmonique de la réponse au chargement.

◊ Traitons maintenant la solution transitoire en chargement imposé à l'extrémité.

Le déplacement axial transitoire de la poutre, sous l'action d'une force F_x, est donné par [bib1] :

$$u(x,t)=\frac{4C_l}{\pi ES}\sum_{j=1,2,3\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{2j-1}\sin\left(\frac{(2j-1)\pi x}{2l}\right)\int_0^t F_x(\tau)\sin\left(\frac{(2j-1)\pi C_l(t-\tau)}{2l}\right)d\tau$$

Pour une force échelon F_x appliquée à $t=0$ en B, l'onde se propage à la célérité C_l et vient se réfléchir en A à l'instant l/C_l ; avec les caractéristiques mécaniques de ce problème, on trouve que cet instant est : $0{,}000197864\,s$.

On a :

$$u(x,t)=\frac{8lF_x}{\pi^2 ES}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^2}\sin\frac{(2j-1)\pi x}{2l}\left(1-\cos\frac{(2j-1)\pi C_l t}{2l}\right)$$

Cette série converge rapidement à cause du terme $(2j-1)^2$. En $x=\ell$, on obtient :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$u(l,t)=\frac{F_x l}{ES}-\frac{8F_x l}{\pi^2 ES}\sum_{j=1,2,3\ldots}^{\infty}\frac{1}{(2j-1)^2}\cos\left(\frac{(2j-1)\pi C_l t}{2l}\right)$$

Car : $\sum_{j=1,2,3\ldots}^{\infty}\frac{1}{(2j-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$, d'où $u(l,t)\in\left[0,\frac{2F_x l}{ES}\right]$

Avant la première réflexion d'onde sur l'encastrement, on obtient simplement : $u(l,t)=\frac{F_x t}{S\sqrt{E\rho}}$.

Calcul des efforts

L'effort normal est simplement : $N(x,t)=ESu_{,x}(x,t)$. D'où :

$$N(x,t)=\frac{4F_x}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{2j-1}\cos\frac{(2j-1)\pi x}{2l}\left(1-\cos\frac{(2j-1)\pi C_l t}{2l}\right)$$

D'où la réaction en A :

$$R_x^A(t)=-N(0,t)=\frac{4F_x}{\pi}\sum_{j=1,2,3\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)}\cos\left(\frac{(2j-1)\pi C_l t}{2l}\right)-F_x$$

La réaction en A est nulle sur l'intervalle de temps $[0\,s;\ 0{,}000197864\,s]$ avant l'arrivée de l'onde, puis vaut $-2F_x$.

2.1.2 Solution élasto-dynamique de la poutre en flexion

On se limite aux mouvements dans le plan moyen xOy.

◊ Prenons d'abord la modélisation des poutres de Navier-Bernoulli-Euler. L'inertie de rotation n'est pas traitée, cf. [bib4].

L'équation locale d'équilibre élastique dynamique s'écrit [bib1,2,3] : $v_{,xxxx}+\frac{\rho S}{EI_z}v_{,tt}=0$.

L'équation de « dispersion » relie la pulsation ω et le nombre d'onde k : $\omega=k^2\sqrt{\frac{EI_z}{\rho S}}$.

Pour les conditions aux limites « encastré-libre », on a l'expression des modes :

$$v(x,t)=e^{i\omega t}\left(c_1(\cos kx-\cosh kx)+c_2(\sin kx-\sinh kx)\right)$$

avec $\cos k l\ \cosh k l=-1$ et $c_2/c_1=(\sin k\ell - \sinh k\ell)/(\cos k\ell+\cosh k\ell)$

Les fréquences des modes sont obtenues par :

$$f_n=\frac{(kl)_n^2}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{EI_z}{\rho S}}=\frac{(kl)_n^2 C_l}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{I_z}{S}}$$

avec pour les premiers modes :

n° de mode	1	2	3	4	5	$n\geq 6$
$(kl)_n$	1,875104069	4,694091133	7,854757438	10,99554073	14,13716839	$(2n-1)\pi/2$
c_2/c_1	-0.734095514	-1.018467319	-0.999224497	-1.000033553	-0.999998550	≈ -1

Avec les caractéristiques mécaniques de ce problème, on trouve les fréquences :

$f_1=310.133\,Hz$, $f_2=1943.568Hz$, $f_3=5442.048Hz$, $f_4=10664.242Hz$, $f_5=17628.755Hz$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

◊ Prenons ensuite la modélisation des poutres de Timoshenko avec cisaillement transverse et inertie de rotation, cette dernière étant alors traitée, cf. [bib4], de *Code_Aster*.

L'équation locale d'équilibre élastique dynamique couple la flèche et la rotation et s'écrit [bib3] :

$$\begin{cases} GS_r\left(v_{xx}-\theta_{z,x}\right)-\rho S v_{,tt}=0 \\ E I_z \theta_{z,xx}+GS_r\left(v_{,x}-\theta_z\right)-\rho I_z \theta_{z,tt}=0 \end{cases}$$

L'équation de « dispersion » relie la pulsation ω et le nombre d'onde k :

$$k^4+\left(\frac{\rho}{E}+\frac{\rho S}{GS_r}\right)\omega^2 k^2 - \frac{\rho S\omega^2}{EI_z}+\frac{\rho^2 S}{GES_r}\omega^4 =0$$

Deux racines sont toujours imaginaires, les deux autres sont complexes : réelles en dessous d'une fréquence de coupure : $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{GS_r}{\rho I_z}}$, et imaginaires pures au-delà de cette fréquence de coupure : les modes sont alors uniquement sinusoïdaux (pas de termes hyperboliques).

Avec les caractéristiques mécaniques de ce problème, on trouve [bib3] les fréquences (modes en sinusoïdes et exponentielles) :
$f_1=269{,}932\,Hz$, $f_2=1077{,}199\,Hz$, $f_3=2270{,}705\,Hz$, $f_4=3249{,}207\,Hz$, $f_5=4649{,}212\,Hz$
et la première fréquence du mode en sinusoïdes seules : $f_5^{bis}=4002{,}830\,Hz$.

Il faut noter que dans [bib3] la valeur du coefficient de section réduite à l'effort tranchant est choisie égale à $0{,}530659727$, tandis que dans *Code_Aster*, la formule choisie [bib4] donne : $0{,}510805163$. On peut en attendre une légère conséquence sur les fréquences propres calculées.

◊ Traitons maintenant la solution transitoire en chargement imposé à l'extrémité $x=\ell$. La solution s'écrit sous la forme d'une somme sur les modes propres obtenus ci-dessus (avec l'encastrement en A) :

$$v(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j(t).w_j(x) \;\; ; \qquad \theta_z(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j(t).\beta_j(x) \text{ (cas Timoshenko)}$$

On décompose le chargement à l'extrémité $x=\ell$ sur les modes. Ainsi :

$$F_j(t)=w_j(l)\;.F(t)$$

La solution vérifie :

$$\ddot{\eta}_j(t)+\omega_j^2\eta_j(t)=F_j(t)$$

D'où :

$$\eta_j(t)=\frac{1}{\omega_j}\int_0^t F_j(\tau)\,.\sin\omega_j(t-\tau)\;d\tau+\eta_j(0)\cos\omega_j t+\frac{1}{\omega_j}\dot{\eta}_j(0)\sin\omega_j t$$

$\eta_j(0)$ et $\dot{\eta}_j(0)$ sont obtenus par les conditions initiales (ici dans le cas Euler-Bernoulli) :

$$\eta_j(0)=\int_0^l {}^t w_j(x)\,.\rho S v(x,0)\;dx \qquad \text{et} \qquad \dot{\eta}_j(0)=\int_0^l {}^t w_j(x)\,.\rho S\,\dot{v}(x,0)\;dx$$

2.1.3 Solution élasto-dynamique de la poutre-tuyau en torsion

◊ L'équilibre élastique dynamique des vibrations libres en torsion (modèle torsion libre) s'écrit :
$M_{x,x}-\rho J\theta_{x,tt}=0$, car le moment de torsion est $M_x=GJ\,\theta_{x,x}$

Les fréquences des j èmes modes propres de poutre sont données par [bib2] dans la situation encastrée-libre en torsion :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$f_j^{tors} = \frac{C_l}{4l} \frac{2j-1}{\sqrt{2(1+\nu)}}$, pour $j = 1,2\ldots$, les modes étant : $\theta_{x\,j}(x) = \sin \frac{\pi(2j-1)x}{2\ell}$

Avec les caractéristiques mécaniques de ce problème, on trouve les fréquences :

$f_1 = 786{,}619 Hz$, $f_2 = 2359{,}856 Hz$, $f_3 = 3933{,}094 Hz$, $f_4 = 5506{,}331 Hz \ldots$

◊ La solution dynamique transitoire, sous chargement imposé à l'extrémité, présente une similarité complète avec la traction ; la rotation axiale transitoire de la poutre est donnée par, cf. [bib1] :

$$\theta_x(x,t) = \frac{4C_l}{\pi GJ} \sum_{j=1,2,3\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} \sin\left(\frac{(2j-1)\pi x}{2l}\right) \int_0^t \Gamma_x(\tau) \sin\left(\frac{(2k-1)\pi C_l (t-\tau)}{2l}\right) d\tau$$

Pour un couple échelon Γ_x, appliqué à $t = 0$ en B, l'onde se propage à la célérité C_l et vient se réfléchir en A à l'instant $l\sqrt{2(1+\nu)}/C_l$; avec les caractéristiques mécaniques de ce problème, on trouve que cet instant est : $0{,}000317816\, s$.
On a :

$$\theta_x(x,t) = \frac{8\Gamma_x l}{\pi^2 GJ} \sum_{j=1,2,3\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^2} \sin\left(\frac{(2j-1)\pi x}{2l}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{(2j-1)\pi C_l t}{2l}\right)\right)$$

Cette série converge rapidement à cause du terme $(2j-1)^2$. En $x = \ell$, on obtient :

$$\theta_x(l,t) = \frac{\Gamma_x l}{GJ} - \frac{8\Gamma_x l}{\pi^2 GJ} \sum_{j=1,2,3\ldots}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} \cos\left(\frac{(2j-1)\pi C_l t}{2l}\right)$$

Car $\sum_{j=1,2,3\ldots}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, d'où $\theta_x(l,t) \in \left[0, \frac{2\Gamma_x l}{GJ}\right]$.

Avant la première réflexion d'onde sur l'encastrement, on obtient simplement : $\theta_x(l,t) = \frac{\Gamma_x t}{J\sqrt{G\rho}}$.

Calcul des efforts

Le moment de torsion est simplement : $M_x(x,t) = GJ\,\theta_{x,x}(x,t)$. D'où :

$$M_x(x,t) = \frac{4\Gamma_x}{\pi} \sum_{j=1,2,3\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)} \cos\left(\frac{(2j-1)\pi x}{2l}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{(2j-1)\pi C_l t}{2l}\right)\right)$$

D'où le couple d'encastrement en A :

$$\Gamma_x^A(t) = -M_x(0,t) = \frac{4\Gamma_x}{\pi} \sum_{j=1,2,3\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)} \cos\left(\frac{(2j-1)\pi C_l t}{2l}\right) - \Gamma_x$$

Le moment d'encastrement en A est nul sur l'intervalle de temps $[0\,s\,;\ 0{,}000317816\,s]$ avant l'arrivée de l'onde, puis vaut $-2\Gamma_x$.

2.1.4 Solution élasto-dynamique du tuyau en modèle coque cylindrique

Les conditions aux limites du problème étudié ne fixent que les modes rigides de la structure, sur les ddls de poutre. La cinématique de la coque cylindrique autour de celle de poutre est libre. Les paramètres de configuration du modèle de tuyau [bib5] sont donc libres.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour une coque cylindrique de longueur finie (longueur l, rayon extérieur R_e, épaisseur h rayon moyen $R_m = R_e - h/2$), en admettant que les déformations membranaires suivantes sont nulles : $\epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{x\theta} \approx 0$ (la flexion étant prédominante ; mais on n'impose rien sur $\in_{xx}$), les modes propres sont de la forme suivante [bib2] avec $j = 2,3,4...$, $n = 1,2,3...$:

$$\begin{cases} u_x(x,\theta,t) = -\dfrac{R_m}{j^2} U_{n,x} \cos(j\theta).\sin(\omega t + \phi) \\ u_\theta(x,\theta,t) = -\dfrac{1}{j} U_n \sin(j\theta).\sin(\omega t + \phi) \\ u_r(x,\theta,t) = U_n \cos(j\theta).\sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

où n désigne le numéro du mode axial et j le numéro du mode circonférentiel.
Et les fréquences sont [bib2] :

$$f_{jn} = \frac{C_l}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{\lambda_{jn}}{2\pi R_m}$$

où λ_{jn} est obtenu par :

$$\lambda_{jn}^2 = \frac{j^4\left(a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{23}a_{13} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{31}^2 - a_{33}a_{12}^2\right)}{\left(j^4 + j^2 + \lambda_n^2 \alpha_{n2} R_m^2/l^2\right).\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)}$$

où $\lambda_n = (kl)_n$ est associé au mode de poutre d'Euler, pour les conditions aux limites choisies (cf. [§ 2.1.2]), où $\alpha_{n2} = \frac{1}{l}\int_0^l U_{n,x}^2\, dx$ est calculé à partir du mode axial de type poutre, en fonction des conditions aux limites du cylindre, et où les constantes $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13}$ sont données par (en notant $\chi = h^2/(12R_m^2)$) :

$$a_{11} = \lambda_n^2 R_m^2/\ell^2 + \tfrac{1}{2} j^2 \alpha_{n2}(1-\nu)(1+\chi)$$

$$a_{22} = j^2 + \tfrac{1}{2}\alpha_{n2}\lambda_n^2 R_m^2 (1-\nu)(1+3\chi)/\ell^2$$

$$a_{33} = 1 + \chi\left[\lambda_n^4 R_m^4/\ell^4 + (j^2-1)^2 + 2\nu j^2 \lambda_n^2 R_m^2 \alpha_{n1}/\ell^2 + 2j^2\lambda_n^2 R_m^2 \alpha_{n2}(1-\nu)/\ell^2\right]$$

$$a_{12} = -j\lambda_n R_m\left(\nu\alpha_{n1} + \tfrac{1}{2}\alpha_{n2}(1-\nu)\right)/\ell$$

$$a_{23} = j\left(1 + \chi\lambda_n^2 R_m^2\left(\nu\alpha_{n1} + \tfrac{3}{2}\alpha_{n2}(1-\nu)\right)/\ell^2\right)$$

$$a_{31} = \lambda_n R_m\left(-\nu\alpha_{n1} + \chi\left(\tfrac{1}{2}j^2\alpha_{n2}(1-\nu) - \lambda_n^2 R_m^2/\ell^2\right)\right)/\ell$$

où $\alpha_{n1} = -\frac{1}{l}\int_0^l U_{n,xx}.U_n\, dx$.

Les valeurs sont données par le tableau ci-dessous pour le cas encastré-libre (où les déplacements et les rotations sont totalement bloquées en $x = 0$) :

n° de mode poutre	1	2	3	4	5
$(kl)_n$	1,875104069	4,694091133	7,854757438	10,99554073	14,13716839
α_{n1}	-0.2241	0.6033	0.7440	0.8182	0.8585
α_{n2}	1.3219	1.4712	1.2529	1.1820	1.1415

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans la modélisation proposée ici, l'encastrement est assuré uniquement sur les ddls de poutre, à la manière de la liaison COQ_POU, voir [bib6], ce qui assure que seuls les moyennes et les moments d'ordre 1 des déplacements à l'extrémité $x=0$ sont nuls. La cinématique des éléments tuyaux découple les termes engendrant la déformée de « poutre » de ceux les complétant pour engendrer une cinématique de coques, à l'aide des premiers modes de Fourier circonférentiels, voir [bib5], au sens du produit scalaire des déplacements sur la structure, c'est-à-dire aussi au sens des forces d'inertie (matrice de masse).

C'est pourquoi, on donne ci-dessous les deux familles de modes propres totalement inextensionnels $\epsilon_{\theta\theta}=\epsilon_{x\theta}=\epsilon_{xx}=0$, pour un cylindre « libre-libre », de longueur l , avec $j=2,3,4...$:

modes de Rayleigh

$$\begin{cases} u_x(x,\theta,t)=0 \\ u_\theta(x,\theta,t)=-\frac{1}{j}\sin(j\theta).\sin(\omega t+\phi) \\ u_r(x,\theta,t)=\cos(j\theta).\sin(\omega t+\phi) \end{cases}$$

et

modes de Love

$$\begin{cases} u_x(x,\theta,t)=\frac{R_m}{j^2}\cos(j\theta).\sin(\omega t+\phi) \\ u_\theta(x,\theta,t)=-\frac{(x-l/2)}{j}\sin(j\theta).\sin(\omega t+\phi) \\ u_r(x,\theta,t)=(x-l/2)\cos(j\theta).\sin(\omega t+\phi) \end{cases}$$

Ces modes vérifient bien la condition en $x=0$ d'encastrement en moyenne de « poutre ».
Les fréquences des j èmes modes propres sont respectivement pour les premiers, puis pour les seconds :

$$f_j^{Rayleigh}=\frac{C_l\sqrt{\chi}}{2\pi R_m\sqrt{1-\nu^2}}\frac{j(j^2-1)}{\sqrt{j^2+1}} \quad \text{et}$$

$$f_j^{Love}=\frac{C_\ell\sqrt{\chi}}{2\pi R_m\sqrt{1-\nu^2}}j(j^2-1)\sqrt{\frac{j^2\ell^2+24(1-\nu)R_m^2}{j^2\ell^2+12R_m^2}}$$

avec $j=2,3,4....$ Avec les caractéristiques mécaniques de ce problème, on trouve les fréquences :
Rayleigh : $f_2=78,22613\,Hz$, $f_3=221,2569\,Hz$, $f_4=424,2407\,Hz$, $f_5=686,0885\,Hz$ ...
Love : $f_2=179,7433\,Hz$, $f_3=708,6504\,Hz$, $f_4=1762,019\,Hz$, $f_5=3514,927\,Hz$ ...

2.2 Résultats de référence

- Fréquences propres, référence analytique ;
- Déplacements, rotations en B : composantes DX et DRX référence analytique par séries ;
- Réactions en A : composantes DX et DRX référence analytique par séries.

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

Comparaison de quelques fréquences en modèle poutre obtenues avec le logiciel Circus [bib7].
Comparaison de quelques déplacements et rotations transitoires en modèle poutre d'Euler obtenues par S.Potapov avec le logiciel *EuroPlexus* (en dynamique rapide explicite), pour lequel on a choisi un maillage plus grossier (100 éléments finis de poutre, schéma explicite de différences centrées et pas de temps optimal de l'ordre de $\Delta t=10^{-10}\,s$). On ne compare pas les efforts obtenus par *EuroPlexus*, car ils sont entachés d'oscillations provenant du schéma d'intégration explicite à différences centrées.

2.4 Références bibliographiques

[1] L.MEIROVITCH : *Analytical methods in vibrations* . McMillan Ed., 1967.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

[2] R.D.BLEVINS : *Formulas for natural frequency and mode shape* . R.E.Krieger Publ. Co., 1984.

[3] S.M.HAN, H.BENAROYA et T.WEI : *Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories* . Journal of Sound and Vibration (1999), vol. 225, n°5, pp. 935-988.

[4] J.M.PROIX et al. *Éléments « exacts » de poutres (droites et courbes)*. [R3.08.01-A], 12/1996.

[5] P.MASSIN et al. *Éléments finis de tuyau droit et courbe avec ovalisation, gonflement et gauchissement en élasto-plasticité*. [R3.08.06-B], 12/12/03.

[6] J.M.PROIX. *Liaison coque-poutre*, [R3.03.06], 06/12/00.

[7] S.CAILLAUD, P.VAUGRANTE. *Note théorique et validation numérique de l'élément droit couplé fluide-structure du code CIRCUS*, note EDF/AMV HT-64/00/002/A, 8/09/00.

[8] J.L.BATOZ. *Modélisation des structures par éléments finis*. Éditions Hermès, 1995.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

On adopte une modélisation par éléments de poutre d'Euler POU_D_E.

Le maillage du modèle calculé avec *Code_Aster* est constitué de 1001 nœuds et de 1000 mailles SEG2. Il faut un maillage très fin, car les forces d'inertie donnent des solutions qui ne sont pas dans la base des fonctions de forme des éléments de poutre, voir [bib4].

On choisit une discrétisation temporelle serrée à partir de $t=0\,s$, afin de capter au mieux le choc initial. On choisit de résoudre sur l'intervalle $[0\,s\,;0{,}00032\,s]$.
Le schéma d'intégration temporelle choisi est :
schéma de Newmark, en accélération moyenne (valeurs par défaut) et $\Delta t=10^{-7}\,s$.

3.2 Grandeurs testées et résultats

3.2.1 Modes vibratoires

On met pour information quelques valeurs de fréquences propres obtenues avec le logiciel Circus [bib7].

Fréquences propres de poutre d'Euler (en Hz)

Type de mode	référence	nature	*Code_Aster*	*Circus*
Flexion 1	310,133	analytique	310.132	310.13
Flexion 2	1943,568	analytique	1943.566	1943.56
Flexion 3	5442,048	analytique	5442.046	
Flexion 4	10664,242	analytique	10664.242	
Flexion 5	17628,755	analytique	17628.756	
Traction 1	1263,497	analytique	1263.497	1263.48
Traction 2	3790,490	analytique	3790.494	
Traction 3	6317,484	analytique	6317.500	
Traction 4	8844,477	analytique	8844.522	
Torsion 1	786,619	analytique	786.619	786.62
Torsion 2	2359,856	analytique	2359.858	
Torsion 3	3933,094	analytique	3933.104	
Torsion 4	5506,331	analytique	5506.359	

3.2.2 Réponse transitoire

Déplacements de l'extrémité - point B (en m), rotations de l'extrémité - point B

Instant (s)	Composante	référence	nature	*Code_Aster*	*EuroPlexus*
0.00010	DX	$2.5947\ 10^{-10}$	analytique	$2.5934\ 10^{-10}$	$2.568\ 10^{-10}$
0.00015	DX	$3.8921\ 10^{-10}$	analytique	$3.8908\ 10^{-10}$	$3.865\ 10^{-10}$
0.00020	DX	$5.1895\ 10^{-10}$	analytique	$5.1882\ 10^{-10}$	$5.163\ 10^{-10}$
0.00010	DRX	$1.7329\ 10^{-8}$	analytique	$1.7321\ 10^{-8}$	$1.715\ 10^{-8}$
0.00020	DRX	$3.4659\ 10^{-8}$	analytique	$3.4651\ 10^{-8}$	$3.448\ 10^{-8}$

Réactions à l'encastrement - point A (en N), moments à l'encastrement - point A (en $N.m$)

Instant (s)	Composante	référence	nature
0.00010	DX	0,00	analytique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

0.00015	DX	0,00	analytique
0.00020	DX	-2,00	analytique
0.00010	DRX	0,00	analytique
0.00020	DRX	0,00	analytique
0.00032	DRX	-2,00	analytique

3.2.3 Moment équivalent

On teste la valeur du moment équivalent calculé par POST_RCCM pour un couple maille/nœud à l'aide d'une référence AUTRE_ASTER obtenue en utilisant les fonctionnalités de la commande CALC_TABLE.

Maille	Noeud	Composante	Type de référence	*Valeur de référence*	*Tolérance*
M937	N939	MEQ	« AUTRE_ASTER »	1.005623252173637	0,1 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

On adopte une modélisation par éléments de poutre de Timoshenko POU_D_T.

Le maillage du modèle calculé avec *Code_Aster* est constitué de 1001 nœuds et de 1000 mailles SEG3. Il faut un maillage très fin, car les forces d'inertie donnent des solutions qui ne sont pas dans la base des fonctions de forme des éléments de poutre, voir [bib4]. C'est le même maillage que dans la modélisation A.

On choisit une discrétisation temporelle serrée à partir de $t=0\,s$, afin de capter au mieux le choc initial. On choisit de résoudre sur l'intervalle $[0\,s\,;0{,}00032\,s]$.
Le schéma d'intégration temporelle choisi est :
schéma de Newmark, en accélération moyenne (valeurs par défaut) et $\Delta t=10^{-7}\,s$.

4.2 Grandeurs testées et résultats

4.2.1 Modes vibratoires

On met pour information quelques valeurs de fréquences propres obtenues avec le logiciel Circus [bib7], pour lequel le coefficient de section réduite est obtenue selon[bib8] : 0.5011, c'est-à-dire une valeur plus faible que celle choisie dans la référence (bib3) d'où des fréquences plus basses. Pour se confronter avec la référence [bib3], on met aussi les valeurs des prédictions de Circus avec le coefficient de section réduite égal à $0{,}530659727$ de [bib3]. On constate que les résultats sont alors identiques à 10^{-4} près ; la valeur du coefficient de section réduite au cisaillement joue un rôle important sur cet exemple.

Fréquences propres de poutre de Timoshenko (en Hz)

Type de mode	référence	nature	*Code_Aster*	*Circus* coef Batoz	*Circus* coef [bib3]
Flexion 1	269,932	analytique	269.261	268.3	
Flexion 2	1077,199	analytique	1059.305		
Flexion 3	2270,705	analytique	2226.699		
Flexion 4	3249,207	analytique	3173.253		
Flexion 5	4649,212	analytique	4554.463	4557.2	4649.6
Flexion 5 bis	4002,830	analytique		3903.0	4003.2
Traction 1	1263,497	analytique	1263.497	1263.48	
Traction 2	3790,490	analytique	3790.494		
Traction 3	6317,484	analytique	6317.500		
Traction 4	8844,477	analytique	8844.522		
Torsion 1	786,619	analytique	786.619	786.62	
Torsion 2	2359,856	analytique	2359.858		
Torsion 3	3933,094	analytique	3933.104		
Torsion 4	5506,331	analytique	5506.359		

4.2.2 Réponse transitoire

Déplacements de l'extrémité - point B (en *m*), rotations de l'extrémité - point B

Instant (s)	Composante	référence	nature
0.00010	DX	$2.5947\ 10^{-10}$	analytique
0.00015	DX	$3.8921\ 10^{-10}$	analytique
0.00020	DX	$5.1895\ 10^{-10}$	analytique
0.00010	DRX	$1.7329\ 10^{-8}$	analytique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

0.00020	DRX	3.4659 10 $^{-8}$	analytique

Réactions à l'encastrement - point A (en N), moments à l'encastrement - point A (en $N.m$)

Instant (s)	Composante	référence	nature
0.00010	DX	0,00	analytique
0.00015	DX	0,00	analytique
0.00020	DX	-2,00	analytique
0.00010	DRX	0,00	analytique
0.00020	DRX	0,00	analytique
0.00032	DRX	-2,00	analytique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.2.3 Moment équivalent

On teste la valeur du moment équivalent calculé par POST_RCCM pour un couple maille/nœud à l'aide d'une référence AUTRE_ASTER obtenue en utilisant les fonctionnalités de la commande CALC_TABLE.

Maille	Noeud	Composante	Type de référence	*Valeur de référence*	*Tolérance*
M937	N939	MEQ	« AUTRE_ASTER »	1.005623252173637	0,1 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

On adopte une modélisation par éléments de poutre–tuyau TUYAU_3M.

Le maillage du modèle calculé avec *Code_Aster* est constitué de 1001 nœuds et de 500 mailles SEG3. Il faut un maillage assez fin, car les forces d'inertie donnent des solutions qui ne sont pas dans la base des fonctions de forme des éléments de poutre, voir [bib4]. C'est le même maillage que dans la modélisation A.

On crée deux modèles : un où le tuyau est bloqué en B sur les seuls 6 degrés de liberté de poutre ; un second où le tuyau est lié (par une LIAISON_DDL) à un élément discret DIS_TR (sur une maille point POI1) à 6 degrés de liberté, qui lui est totalement fixé.

On choisit une discrétisation temporelle serrée à partir de $t=0\,s$, afin de capter au mieux le choc initial. On choisit de résoudre sur l'intervalle $\left[0\,s\,;0{,}00032\,s\right]$.
Le schéma d'intégration temporelle choisi est :
schéma de Newmark, en accélération moyenne (valeurs par défaut) et $\Delta t=10^{-7}\,s$.

5.2 Grandeurs testées et résultats

5.2.1 Modes vibratoires

Fréquences propres de « poutre » et de « coque » (en Hz), cas TUYAU_3M

Type de mode	référence	nature
Flexion 1	269,932	analytique
Flexion 2	1077,199	analytique
Flexion 3	2270,705	analytique
Flexion 4	3249,207	analytique
Flexion 5	4649,212	analytique
Traction 1	1263,497	analytique
Traction 2	3790,490	analytique
Traction 3	6317,484	analytique
Traction 4	8844,477	analytique
Torsion 1	786,619	analytique
Torsion 2	2359,856	analytique
Torsion 3	3933,094	analytique
Torsion 4	5506,331	analytique
Coque Rayleigh 2	78,22613	analytique
Coque Rayleigh 3	221,2569	analytique
Coque Rayleigh 4	424,2407	analytique
Coque Rayleigh 5	686,0885	analytique
Coque Love 2	179,7433	analytique
Coque Love 3	708,6504	analytique
Coque Love 4	1762,019	analytique
Coque Love 5	3514,927	analytique

5.2.2 Réponse transitoire

Déplacements de l'extrémité - point B (en m), rotations de l'extrémité - point B , cas TUYAU_3M

Instant (s)	Composante	référence	nature
0.00010	DX	$2.5947\ 10^{-10}$	analytique
0.00015	DX	$3.8921\ 10^{-10}$	analytique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

0.00020	DX	$5.1895\ 10^{-10}$	analytique
0.00005	DRX	$8.6648\ 10^{-9}$	analytique
0.00010	DRX	$1.7330\ 10^{-8}$	analytique
0.00020	DRX	$3.4659\ 10^{-8}$	analytique

Réactions à l'encastrement - point A (en N), moments à l'encastrement - point A (en Nm), cas TUYAU_3M

Instant (s)	Composante	référence	nature
0.00010	DX	0.00	analytique
0.00015	DX	0.00	analytique
0.00020	DX	-2.00	analytique
0.00032	DRX	-2.00	analytique

Enfin, à l'extrémité libre point B, les valeurs des REAC_NODA sont de l'ordre de 10^{-12}, voire même nettement inférieures, aux mêmes instants, ce qui est bien proche de la valeur nulle attendue.

5.2.3 Moment équivalent

On teste la valeur du moment équivalent calculé par POST_RCCM pour un couple maille/nœud à l'aide d'une référence AUTRE_ASTER obtenue en utilisant les fonctionnalités de la commande CALC_TABLE.

Maille	Noeud	Composante	Type de référence	*Valeur de référence*	*Tolérance*
M479	N959	MEQ	« AUTRE_ASTER »	1.0074000416351803	0,1 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

On adopte une modélisation par éléments de poutre–tuyau TUYAU_6M à 3 nœuds.

Le maillage du modèle calculé avec *Code_Aster* est constitué de 1001 nœuds et de 500 mailles SEG3. Il faut un maillage assez fin, car les forces d'inertie donnent des solutions qui ne sont pas dans la base des fonctions de forme des éléments de poutre, voir [bib4]. C'est le même maillage que dans la modélisation A.

On crée deux modèles : un où le tuyau est bloqué en A sur les seuls 6 degrés de liberté de poutre ; un second où le tuyau est lié (par une LIAISON_DDL) à un élément discret DIS_TR (sur une maille point POI1) à 6 degrés de liberté, qui lui est totalement fixé.

On choisit une discrétisation temporelle serrée à partir de $t=0\,s$, afin de capter au mieux le choc initial. On choisit de résoudre sur l'intervalle $\left[0\,s\,;0{,}00032\,s\right]$.
Le schéma d'intégration temporelle choisi est :
schéma de Newmark, en accélération moyenne (valeurs par défaut) et $\Delta t=10^{-7}\,s$.

6.2 Grandeurs testées et résultats

6.2.1 Modes vibratoires

Fréquences propres de « poutre » et de « coque » (en Hz), cas TUYAU_6M

Type de mode	référence	nature
Flexion 1	269,932	analytique
Flexion 2	1077,199	analytique
Flexion 3	2270,705	analytique
Flexion 4	3249,207	analytique
Flexion 5	4649,212	analytique
Traction 1	1263,497	analytique
Traction 2	3790,490	analytique
Traction 3	6317,484	analytique
Traction 4	8844,477	analytique
Torsion 1	786,619	analytique
Torsion 2	2359,856	analytique
Torsion 3	3933,094	analytique
Torsion 4	5506,331	analytique
Coque Rayleigh 2	78,22613	analytique
Coque Rayleigh 3	221,2569	analytique
Coque Rayleigh 4	424,2407	analytique
Coque Rayleigh 5	686,0885	analytique
Coque Love 2	179,7433	analytique
Coque Love 3	708,6504	analytique
Coque Love 4	1762,019	analytique
Coque Love 5	3514,927	analytique

6.2.2 Réponse transitoire

Déplacements de l'extrémité - point B (en m), rotations de l'extrémité - point B , cas TUYAU_6M

Instant (s)	Composante	référence	nature
0.00010	DX	$2.5947\ 10^{-10}$	analytique
0.00015	DX	$3.8921\ 10^{-10}$	analytique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

0.00020	DX	$5.1895\ 10^{-10}$	analytique
0.00005	DRX	$8.6648\ 10^{-9}$	analytique
0.00010	DRX	$1.7330\ 10^{-8}$	analytique
0.00020	DRX	$3.4659\ 10^{-8}$	analytique

Réactions à l'encastrement - point A (en N), moments à l'encastrement - point A (en Nm), cas TUYAU_6M

Instant (s)	Composante	référence	nature
0.00010	DX	0.00	analytique
0.00015	DX	0.00	analytique
0.00020	DX	-2.00	analytique
0.00032	DRX	-2.00	analytique

Enfin, à l'extrémité - point B, les valeurs des REAC_NODA sont de l'ordre de 10^{-12},voire même nettement inférieures, aux mêmes instants, ce qui est bien proche de la valeur nulle attendue.

6.2.3 Moment équivalent

On teste la valeur du moment équivalent calculé par POST_RCCM pour un couple maille/nœud à l'aide d'une référence AUTRE_ASTER obtenue en utilisant les fonctionnalités de la commande CALC_TABLE.

Maille	Noeud	Composante	Type de référence	*Valeur de référence*	*Tolérance*
M479	N959	MEQ	« AUTRE_ASTER »	1.0074000416351803	0,1 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation est faite par des éléments de barre (BARRE).
Le maillage du modèle *Code_Aster* est constitué de 1001 nœuds et de 1000 mailles SEG2. Il faut un maillage très fin, car les forces d'inertie donnent des solutions qui ne sont pas dans la base des fonctions de forme des éléments de poutre, voir [bib4]. On a changé l'orientation du maillage par rapport à la modélisation A.

On choisit une discrétisation temporelle serrée à partir de $t=0\,s$, afin de capter au mieux le choc initial. On choisit de résoudre sur l'intervalle $[0\,s\,;0{,}00032\,s]$.
Le schéma d'intégration temporelle choisi est celui de Newmark, en accélération moyenne (valeurs par défaut) et $\Delta t=10^{-7}s$.

7.2 Grandeurs testées et résultats

Calcul des modes vibratoires :
Fréquences propres de poutre d'Euler (en Hz)

Type de mode	référence	Nature	Tolérance
Traction 1	1263.5	analytique	1.0E-03
Traction 2	3790.49	analytique	1.0E-03
Traction 3	6317.48	analytique	1.0E-03
Traction 4	8844.48	analytique	1.0E-03

Calcul avec DYNA_VIBRA :
Déplacements de l'extrémité - point B (en m), rotations de l'extrémité - point B

Instant (s)	Composante	référence	Nature	Tolérance
0.00010	DX	1.8347E–10	analytique	1.0E-03
0.00010	DY	1.8347E–10	analytique	1.0E-03
0.00015	DX	2.7521E–10	analytique	1.0E-03
0.00015	DY	2.7521E –10	analytique	1.0E-03
0.00020	DX	3.6695E–10	analytique	1.0E-03
0.00020	DY	3.6695E –10	analytique	1.0E-03

Réactions à l'encastrement - point A (en N), moments à l'encastrement - point A (en $N.m$)

Instant (s)	Composante	référence	Nature	Tolérance
0.00010	DX	0.00	analytique	1.0E-03
0.00010	DY	0.00	analytique	1.0E-03
0.00015	DX	0.00	analytique	1.0E-03
0.00015	DY	0.00	analytique	1.0E-03
0.00020	DX	-1.414213	analytique	5.0%
0.00020	DY	-1.414213	analytique	5.0%

Calcul avec DYNA_NON_LINE :
Déplacements de l'extrémité - point B (en m), rotations de l'extrémité - point B

Instant (s)	Composante	Référence	Nature	Tolérance
0.00010	DX	1.8347E–10	analytique	1.0E-03
0.00010	DY	1.8347E–10	analytique	1.0E-03
0.00015	DX	2.7521E–10	analytique	1.0E-03
0.00015	DY	2.7521E –10	analytique	1.0E-03
0.00020	DX	3.6695E–10	analytique	1.0E-03
0.00020	DY	3.6695E –10	analytique	1.0E-03

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

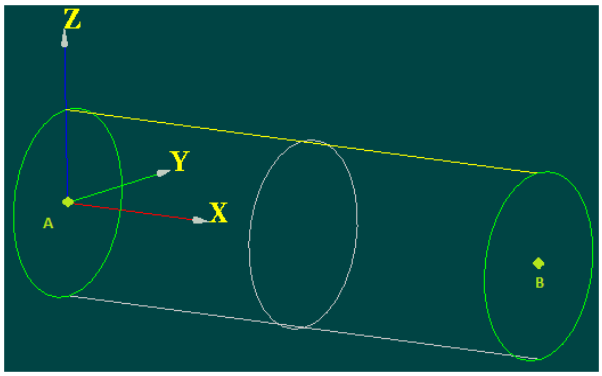
Réactions à l'encastrement - point A (en N), moments à l'encastrement - point A (en $N.m$)

Instant (s)	Composante	référence	nature	Tolérance
0.00010	DX	0.00	analytique	1.0E-03
0.00010	DY	0.00	analytique	1.0E-03
0.00015	DX	0.00	analytique	1.0E-03
0.00015	DY	0.00	analytique	1.0E-03
0.00020	DX	-1.414213	analytique	5.0%
0.00020	DY	-1.414213	analytique	5.0%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Modélisation F

La modélisation est effectuée avec des éléments de coque DKT.



Le tuyau est discretisé de la manière suivante :

- 25 mailles dans le sens circonférentiel,
- 500 mailles dans le sens de la longueur.

Ce qui donne un maillage constitué de :

- 12550 nœuds,
- 12500 mailles QUAD4.

Dans ce modèle les nœuds situés dans la section A sont liés (LIAISON_ELEM) à un élément discret DIS_TR (maille de type point POI1 située en A) à 6 degrés de liberté, qui lui est totalement fixé.

8.1 Grandeurs testées et résultats

On teste dans cette modélisation COEF_RIGI_DRZ négatif. Dans ce cas, le ddl DRZ a un sens physique de « drilling rotation » ou rotation autour de la normale.

Modes vibratoires :

Type de mode	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance %
Traction 1	1263.497	analytique	0.3
Traction 2	3790.490	analytique	0.65
Traction 3	6317.484	analytique	0.1
Traction 4	8844.477	analytique	0.3
Flexion 1	310.133	analytique	9.5
Flexion 2	1943.568	analytique	0.55
Flexion 3	5442.048	analytique	0.3
Flexion 4	10664.242	analytique	0.25
Flexion 4	17628.755	analytique	0.2
Torsion 1	786.619	analytique	0.25
Torsion 2	2359.856	analytique	0.25
Torsion 3	3933.094	analytique	0.25
Torsion 4	5506.331	analytique	0.25

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Synthèse des résultats

Un maillage relativement fin est nécessaire pour obtenir des résultats précis (propagation d'onde).

On constate que le modèle de poutre de Timoshenko est plus précis en flexion, mais que la valeur du coefficient de section réduite au cisaillement joue un rôle important sur cet exemple. Le logiciel de dynamique fréquentielle des tuyauteries *Circus* donne des valeurs très proches des fréquences déterminées par *Code_Aster* pour les modèles de poutres d'Euler et Timoshenko.

Le logiciel de dynamique rapide *EuroPlexus* donne des valeurs très proches par rapport à celles de *Code_Aster* pour les éléments de poutres d'Euler.

Le modèle par éléments finis de coque permet de définir le domaine de validité des modélisations en éléments de poutre et en éléments tuyaux.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)