SDLL101 - Vibration d'une poutre avec pré-contrainte

Résumé :

Ce problème plan consiste à chercher les fréquences de vibration d'une structure mécanique composée d'une poutre élancée, de section circulaire, sous tension encastrée-glissière. Ce test de Mécanique des Structures correspond à une analyse dynamique d'un modèle linéique ayant un comportement linéaire. Ce test comporte deux modélisations.

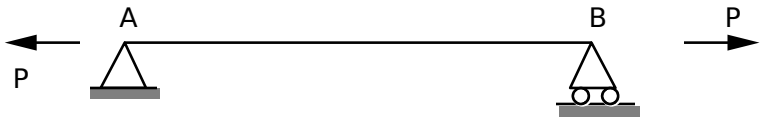
Dans la première modélisation, on teste l'élément de poutre de Timoshenko soumis à une précontrainte, le calcul de la rigidité géométrique et le calcul des fréquences propres par la méthode de Lanczos. Dans la deuxième modélisation, on teste l'élément de poutre d'Euler-Bernouilli soumis à une précontrainte, le calcul de la rigidité géométrique et le calcul des fréquences propres par la méthode de Bathe et Wilson.

Les résultats obtenus sont en bon accord avec les résultats du guide VPCS. On remarque un décalage vers le haut des fréquences de vibration quand la précontrainte dans la poutre augmente.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Section circulaire pleine
diamètre $d = 0.01\,m$

Longueur de la poutre
$L = 2\,m$

1.2 Propriétés de matériaux

$E = 2\,10^{11}\,N/m^2$
$\nu = 0.3$
$\rho = 7\,800.\,kg/m^3$

1.3 Conditions aux limites et chargements

- Poutre posée-posée,
- 4 chargements sont étudiés $P = 0.$, $P = 10.$, $P = 100.$, $P = 1\,000.\,N$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

L'équation de vibration d'une poutre précontrainte est :

$$EI_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

précontrainte de traction si $P > 0$, de compression si $P < 0$, et conduit aux fréquences propres de flexion (hypothèse d'Euler-Bernoulli)

$$f_i = \frac{i^2 \pi}{2 L^2} \left(1 + \frac{PL^2}{EI_z i^2 \pi^2} \right)^{1/2} \left(\frac{EI_z}{\rho S} \right)^{1/2} , \; i = 1,2,3, \ldots$$

2.2 Résultats de référence

5 premières fréquences propres.

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique (hypothèse des poutres d'Euler-Bernouilli).

2.4 Références bibliographiques

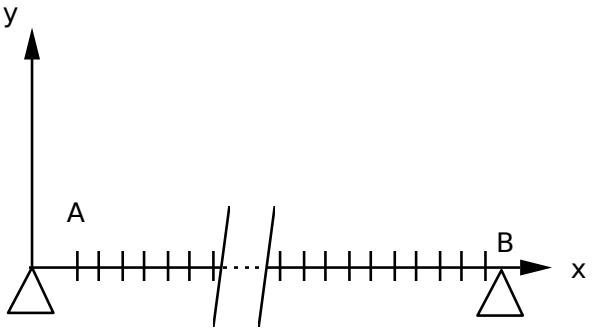
1) Robert D. BLEVINS Formulas for natural frequency and mode shape - 1979 p.144 (formule 8.20 rectifiée).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Éléments de poutre POU_D_T (Poutre droite de Timoshenko)



Découpage : 10 éléments de poutre

nœud A : translations en x et y bloqués
nœud B : translation en y bloqué.

Remarque :

La force P appliquée en B engendre une réaction $-P$ en A.

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds :	21
Nombre de mailles et types :	20 SEG2

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 Grandeurs testées et résultats

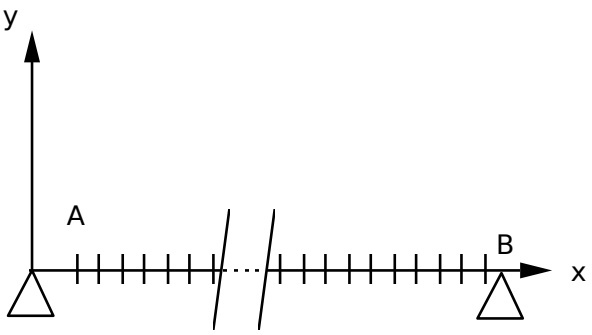
Pré contrainte	ordre du mode propre	Référence
$P=0$	1	4.97137
	2	19.8851
	3	44.7414
	4	79.5403
	5	124.2818
$P=10$	1	5.0728
	2	19.9874
	3	44.8439
	4	79.6429
	5	124.3844
$P=100$	1	5.9090
	2	20.8860
	3	45.7561
	4	80.5600
	5	125.3037
$P=1\,000$	1	11.2577
	2	28.3462
	3	54.0370
	4	89.2134
	5	134.1511

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Éléments de poutre POU_D_E (Poutre d'Euler-Bernouilli)



Découpage : 19 éléments de poutre
nœud A : translations en x et y bloqués
nœud B : translation en y bloqué.

Remarque :

La force P appliquée en B engendre une réaction $-P$ en A.

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds :	21
Nombre de mailles et types :	20 SEG2

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Grandeurs testées et résultats

Pré contrainte / ordre du mode propre		Référence
$P=0$	1	4.97137
	2	19.8851
	3	44.7414
	4	79.5403
	5	124.2818
$P=10$	1	5.0728
	2	19.9874
	3	44.8439
	4	79.6429
	5	124.3844
$P=100$	1	5.9090
	2	20.8860
	3	45.7561
	4	80.5600
	5	125.3037
$P=1\,000$	1	11.2577
	2	28.3462
	3	54.0370
	4	89.2134
	5	134.1511

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus sont en bon accord avec les résultats de référence. On remarque bien que les fréquences de vibration augmentent quand la précontrainte augmente.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)