SDLD321 - Réponse dynamique transitoire d'un oscillateur harmonique avec amortissement variable

Résumé :

Le système considéré est un oscillateur harmonique à 1 degré de liberté sous excitation harmonique à la résonance. Différents amortissements seront considérés :

- amortissement critique,
- amortissement moyen,
- amortissement très faible.

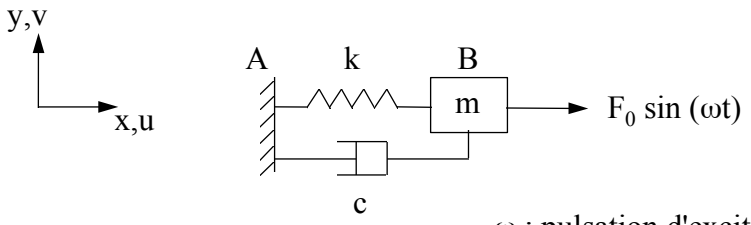
Par l'intermédiaire de ce problème, on teste les différents algorithmes de la commande DYNA_TRAN_MODAL [U4.54.03] et leurs capacités à traiter des problèmes à amortissement extrême. Les résultats sont comparés aux solutions analytiques exactes.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

Le système est composé d'une masse, d'un ressort et d'un amortisseur. Il admet un unique degré de liberté en translation.



ω : pulsation d'excitation correspondant à la résonance du système non amorti

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

1.2 Propriétés de matériaux

Raideur de liaison : $k = 25.10^3\, N.m^{-1}$

Masse ponctuelle : $m = 10\, kg$

Amortissement visqueux :

$c = c_{critique}$; $c = 0{,}01\, c_{critique}$; $c = 10^{-5} c_{critique}$

avec $c_{critique} = 1\,000\, kg.s^{-1}$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Extrémité A encastrée.

Force harmonique suivant x à la fréquence de résonance au point B :

$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ pour $t \geq 0$ avec $F_0 = 5\, N$ et $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 50\, rad.s^{-1}$.

1.4 Conditions initiales

Le système est au repos à $t = 0$: $u(0) = 0$ et $\frac{du}{dt}(0) = 0$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

L'oscillateur simple vérifie l'équation suivante :

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=F_0\sin(\omega t)$$

avec $u(0)=0$ et $\dot{u}(0)=0$

ω : pulsation propre de l'oscillateur $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

L'amortissement critique est $c_{critique}=2\mathrm{m}\omega$.

La solution pour $c=c_{critique}$ est :

$$u(t)=\frac{F_0}{2\mathrm{k}}\left[e^{-\omega t}(1+\omega t)-\cos(\omega t)\right]$$

La solution pour un amortissement sous-critique tel que $\frac{c}{c_{critique}}=\xi$ est :

$$u(t)=e^{-\xi\omega t}\left(\frac{F_0}{2\xi k}\cos(\omega_D t)+\frac{F_0\omega}{2k\omega_D}\sin(\omega_D t)\right)-\frac{F_0}{2\xi k}\cos(\omega t)$$

avec $\omega_D=\omega\sqrt{1-\xi^2}$

2.2 Résultats de référence

Déplacement et vitesse du point B .

2.3 Incertitude sur la solution

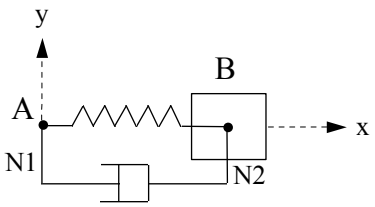
Solution analytique exacte.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Éléments discrets de rigidité, amortissement et masse.



Caractéristiques des éléments :

DISCRET :	masse nodale	M_T_D_N
	rigidité linéaire	K_T_D_L
	amortissement linéaire	A_T_D_L ($c = c_{critique}$)

Conditions aux limites : au nœud $N1$ DDL_IMPO DX = DY = DZ = 0.

Noms des nœuds : $P_1 = N1$, $P_2 = N2$.

Méthodes de calcul :

- Intégration sur la base modale avec Newmark ($\alpha = 0,25$, $\delta = 0,5$)
  Pas de temps $\Delta t = 10^{-3} s$
- Intégration sur la base modale avec Euler
  Pas de temps $\Delta t = 10^{-3} s$

Durée d'observation : $0,5\, s$.

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2
Nombre de mailles et type : 1 maille SEG2

3.3 Grandeurs testées et résultats

- Déplacement du point B

Temps (s)	Déplacement Référence (m)	Déplacement NEWMARK *Aster* (m)	Tolérance (%)	Déplacement EULER *Aster* (m)	Tolérance (%)
0,06	1,18914 E–4	1,18886 E–4	0.5 %	1,18886 E–4	0.5 %
0,12	–9,42819 E–5	–9,42574 E–5	0.5 %	–9,47822 E–5	0.6 %
0,19	9,97958 E–5	9,97765 E–5	0.5 %	9,96206 E–5	0.5 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

0,25	–9,97748 E–5	–9,97526 E–5	0.5 %	–9,99152 E–5	0.5 %
0,31	9,78457 E–5	9,78210 E–5	0.5 %	9,83436 E–5	0.6 %
0,38	–9,88705 E–5	–9,88530 E–5	0.5 %	–9,84730 E–5	0.5 %
0,44	9,99961 E–5	9,99754 E–5	0.5 %	9,99525 E–5	0.5 %

- Vitesse du point B

Temps (s)	Vitesse Référence ($m.s^{-1}$)	Vitesse NEWMARK *Aster* ($m.s^{-1}$)	Tolérance (%)	Vitesse EULER *Aster* ($m.s^{-1}$)	Tolérance (%)
0,03	3,31400 E–3	3,31363 E–3	0.5 %	3,32568 E–3	0.5 %
0,09	–5,13760 E–3	–5,13729 E–3	0.5 %	–5,13627 E–3	0.65%
0,16	4,93337 E–3	4,93354 E–3	0.5 %	4,93088 E–3	0.5 %
0,22	–5,00087 E–3	–5,00087 E–3	0.5 %	–5,00133 E–3	0.5 %
0,28	4,95298 E–3	4,95284 E–3	0.5 %	4,95297 E–3	0.5%
0,35	–4,87813 E–3	–4,87836 E–3	0.5 %	–4,87801 E–3	0.5 %
0,41	4,98415 E–3	4,98423 E–3	0.5 %	4,98409 E–3	0.5 %
0,47	–4,99041 E–3	–4,99035 E–3	0.5 %	–4,99043 E–3	0.5 %

3.4 Remarques

Les résultats sont testés au niveau des pics pour le grain d'observation retenu (10^{-2}s) où les valeurs sont les plus significatives.

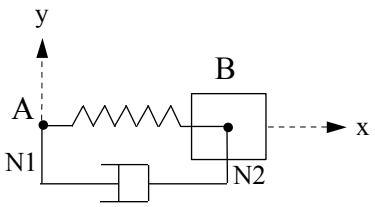
Le régime devient quasi-permanent après la première période, c'est ce que l'on doit observer en menant une analyse transitoire.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Éléments discrets de rigidité, amortissement et masse.



Caractéristiques des éléments :

DISCRET :	masse nodale	M_T_D_N
	rigidité linéaire	K_T_D_L
	amortissement linéaire	A_T_D_L ($c = 0{,}01\, c_{critique}$)

Conditions aux limites : au nœud $N1$ DDL_IMPO DX = DY = DZ = 0.

Noms des nœuds : $P_1 = N1$, $P_2 = N2$.

Méthodes de calcul :

- Intégration sur la base modale avec Fu-Devogelaere
  Pas de temps $\Delta t = 10^{-3} s$
- Intégration sur la base modale avec Δt adaptatif d'ordre 2
  Pas de temps initial $\Delta t = 10^{-5} s$
  Pas maximale $\Delta t = 10^{-3} s$

Durée d'observation : $5 s$.

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2
Nombre de mailles et type : 1 maille SEG2

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Grandeurs testées et résultats

- Déplacement du point B

Temps (s)	Déplacement Référence (m)	Déplacement DEVOG *Aster* (m)	Tolérance (%)	Déplacement ADAPT_ORDRE2 *Aster* (m)	Tolérance (%)
0,06	3,06503 E–4	3,06503 E–4	0.5 %	3,06521 E–4	0.5 %
0,13	–5,93807 E–4	–5,93807 E–4	0.5 %	–5,93729 E–4	0.5 %
0,25	–1,17872 E–3	–1,17872 E–3	0.5 %	–1,17890 E–3	0.5 %
0,69	2,91788 E–3	2,91788 E–3	0.5 %	2,91744 E–3	0.5 %
1,01	–3,83901 E–3	–3,83901 E–3	0.5 %	–3,83567 E–3	0.5 %
2,32	6,68206 E–3	6,68206 E–3	0.5 %	6,68656 E–3	0.5 %
3,64	–8,19821 E–3	–8,19821 E–3	0.5 %	–8,204 E–3	0.5 %
4,96	9,00847 E–3	9,00847 E–3	0.5 %	9,0143 E–3	0.5 %

Temps (s)	Déplacement Référence (m)	Déplacement RUNGE_KUTTA_54 *Aster* (m)	Tolérance (%)	Déplacement RUNGE_KUTTA_32 *Aster* (m)	Tolérance (%)
0,06	3,06503 E–4	3.06420E-04	0.5 %	3.06443E-04	0.5 %
0,13	–5,93807 E–4	-5.93619E-04	0.5 %	-5.93713E-04	0.5 %
0,25	–1,17872 E–3	-1.178373E–3	0.5 %	-1.17845E–3	0.5 %
0,69	2,91788 E–3	2.91701E–3	0.5 %	2.91706E–3	0.5 %
1,01	–3,83901 E–3	-3.83786E–3	0.5 %	-3.83772E–3	0.5 %
2,32	6,68206 E–3	6.68009E–3	0.5 %	6.67939E–3	0.5 %
3,64	–8,19821 E–3	-8.19578E–3	0.5 %	-8.19318E–3	0.5 %
4,96	9,00847 E–3	9.00579E–3	0.5 %	9.00479E–3	0.5 %

- Vitesse du point B

Temps (s)	Vitesse Référence ($m.s^{-1}$)	Vitesse DEVOG *Aster* ($m.s^{-1}$)	Tolérance (%)	Vitesse *ADAPT_ORDRE2* *Aster* ($m.s^{-1}$)	Tolérance (%)
0,04	8,95997 E–3	8,95997 E–3	0.5 %	8,9722 E–3	0.5 %
0,10	–2,33271 E–2	–2,33271 E–2	0.5 %	–2,33499 E–2	0.5 %
0,22	–5,20590 E–2	–5,20590 E–2	0.5 %	–5,2113 E–2	0.5 %
0,66	1,40500 E–1	1,40500 E–1	0.5 %	1,40591 E–1	0.5 %
1,04	1,99889 E–1	1,99889 E–1	0.5 %	1,99933 E–1	0.5 %
2,36	–3,39933 E–1	–3,39933 E–1	0.5 %	–3,39725 E–1	0.5 %
3,68	4,10585 E–1	4,10585 E–1	0.5 %	4,10008 E–1	0.5 %
5,00	–4,4531 E–1	–4,45308 E–1	0.5 %	–4,44429 E–1	0.5 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Temps (s)	Vitesse Référence ($m.s^{-1}$)	Vitesse RUNGE_KUTTA_54 Aster ($m.s^{-1}$)	Tolérance (%)	Vitesse RUNGE_KUTTA_32 Aster ($m.s^{-1}$)	Tolérance (%)
0,04	8,95997 E–3	8.89561E–3	0.5 %	8,95719E–3	0.5 %
0,10	–2,33271 E–2	-2,33194E–2	0.5 %	-2,33211E–2	0.5 %
0,22	–5,20590 E–2	-5,20435E–2	0.5 %	-5,20573E–2	0.5 %
0,66	1,40500 E–1	1,40458E–1	0.5 %	1,40475E–1	0.5 %
1,04	1,99889 E–1	1,99829E–1	0.5 %	1,99809E–1	0.5 %
2,36	–3,39933 E–1	-3,39832E–1	0.5 %	-3,39767E–1	0.5 %
3,68	4,10585 E–1	4,10463E–1	0.5 %	4,10403E–1	0.5 %
5,00	–4,4531 E–1	-4,45308E–1	0.5 %	-4,45145E–1	0.5 %

4.4 Remarques

Les résultats sont testés au niveau des pics où les valeurs sont les plus significatives.

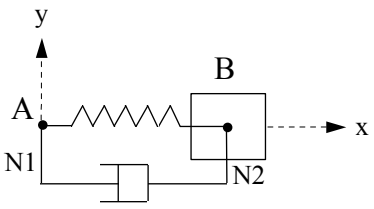
La durée d'observation choisie permet de voir l'effet de l'amortissement. Cependant, dans cet intervalle, la réponse du point B reste toujours transitoire mais on est proche du régime permanent dont l'amplitude en déplacement est $10^{-2}m$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Éléments discrets de rigidité, amortissement et masse.



Caractéristiques des éléments :

DISCRET :	masse nodale	M_T_D_N
	rigidité linéaire	K_T_D_L
	amortissement linéaire	A_T_D_L ($c=10^{-5}c_{critique}$)

Conditions aux limites : au nœud $N1$ DDL_IMPO DX = DY = DZ = 0.

Noms des nœuds : $P_1=N1$, $P_2=N2$.

Méthodes de calcul :

- Intégration sur la base modale avec Newmark ($\alpha=0,25$, $\delta=0,5$)
  Pas de temps $\Delta t=10^{-3s}$
- Intégration sur la base modale avec Euler
  Pas de temps $\Delta t=10^{-3s}$

Durée d'observation : $5s$.

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2

Nombre de mailles et type : 1 maille SEG2

5.3 Grandeurs testées et résultats

- Déplacement du point B

Temps (s)	Déplacement Référence (m)	Déplacement NEWMARK *Aster* (m)	Tolérance (%)	Déplacement EULER *Aster* (m)	Tolérance (%)
0,06	3,11105 E–4	3,10936 E–4	0.5 %	3,11181 E–4	0.5 %
0,13	–6,13250 E–4	–6,13016 E–4	0.5 %	–6,13380 E–4	0.5 %
0,25	–1,25380 E–3	–1,25304 E–3	0.5 %	–1,25418 E–3	0.5 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

0,69	3,44945 E–3	3,44691 E–3	0.5 %	3,45069 E–3	0.5 %
1,01	–4,88729 E–3	–4,89081 E–3	0.5 %	–4,88547 E–3	0.5 %
2,32	1,12876 E–2	1,12475 E–2	0.5 %	1,13069 E–2	0.5 %
3,64	–1,77960 E–2	–1,77100 E–2	0.5 %	–1,78360 E–2	0.5 %
4,96	2,43613 E–2	2,42198 E–2	0.5 %	2,44242 E–2	0.5 %

- Vitesse du point B

Temps (s)	**Vitesse Référence** ($m.s^{-1}$)	**Vitesse NEWMARK** ***Aster*** ($m.s^{-1}$)	**Tolérance** (%)	**Vitesse EULER** ***Aster*** ($m.s^{-1}$)	**Tolérance** (%)
0,04	9,09284 E–3	9,08897 E–3	0.5 %	9,08230 E–3	0.5 %
0,10	–2,39724 E–2	–2,39637 E–2	0.5 %	–2,40269 E–2	0.5 %
0,22	–5,49964 E–2	–5,49680 E–2	0.5 %	–5,48752 E–2	0.5 %
0,66	1,64958 E–1	1,64879 E–1	0.5 %	1,64882 E–1	0.5 %
1,04	2,56456 E–1	2,56547 E–1	0.5 %	2,57280 E–1	0.5 %
2,36	–5,79010 E–1	–5,80019 E–1	0.5 %	–5,81033 E–1	0.5 %
3,68	8,97631 E–1	9,00729 E–1	0.5 %	9,00668 E–1	0.5 %
5,00	–1,21164	–1,21829	0.5 %	–1,21531	0.5 %

5.4 Remarques

Les résultats sont testés au niveau des pics où les valeurs sont les plus significatives.

Dans l'intervalle d'observation, on reste très en dessous du régime permanent en résonance dont l'amplitude de déplacement est $10m$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Synthèse des résultats

Pour la modélisation A, les résultats obtenus aussi bien en déplacement qu'en vitesse ont une erreur absolue largement inférieure à $1\,\%$ par rapport à la solution analytique.

Le schéma d'intégration de Newmark se montre plus précis que le schéma d'Euler.

A $1\,\%$ de l'amortissement critique (modélisation B), le schéma d'intégration Fu-Devogelaere est d'une redoutable précision (pas d'erreur par rapport à la solution de référence).

Le schéma à pas de temps adaptatif d'ordre 2 donne également des résultats à très faible pourcentage d'erreur.

Pour les très faibles amortissements (modélisation C), on notera une meilleure précision pour le schéma d'intégration de type Euler que pour un schéma de type Newmark. Pour ce dernier, l'erreur augmente en fonction du temps mais reste tout de même inférieure à $1\,\%$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)