SDLD27 - Système masse-ressort à 8 degrés de liberté avec amortisseur visqueux non proportionnel (analyse modale)

Résumé :

Ce problème bidimensionnel consiste à rechercher les fréquences, les modes de vibration et les amortissements d'une structure mécanique composée de masses, de ressorts et d'amortisseurs visqueux. Ce cas-test de Mécanique des Structures correspond à une analyse dynamique d'un modèle discret ayant un comportement linéaire.

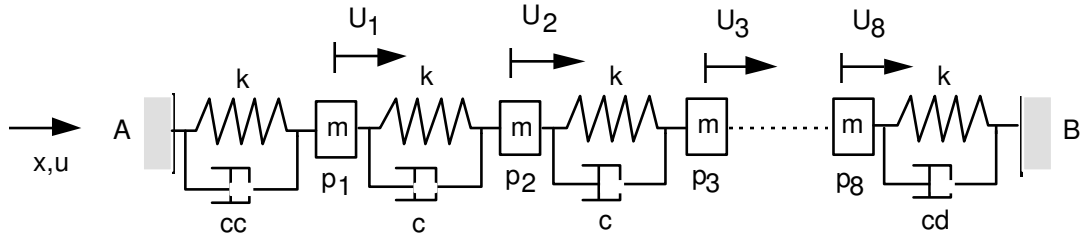
Ce test permet une validation complète des options de modélisation discrète de rigidité, d'amortissement visqueux et de masse (sans éléments finis) offertes par la commande AFFE_CARA_ELEM. Cinq modélisations différentes sont proposées : la modélisation des éléments discrets est soit en translation, soit en translation/rotation et est écrite soit en repère global, soit en repère local. Par ailleurs, différentes fonctionnalités des commandes CALC_MODES (recherche de valeurs propres) et NORME_MODE (définition de la norme d'un vecteur propre) sont testées pour ce problème quadratique.

Ce test fait référence à un test VPCS, mais il a été modifié. En effet, le test oriente le système mécanique sur un axe $3y=4x$, ce qui permet de valider l'entrée des données en repère local. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les résultats de référence.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Masses ponctuelles : $m_{P_1}=m_{P_2}=m_{P_3}=\ldots\ \ldots=m_{P_8}=m$

Raideurs de liaison : $k_{AP1}=k_{P1P2}=k_{P2P3}=\ldots\ \ldots=k_{P8B}=k$

Amortissement visqueux : $c_{P1P2}=c_{P2P3}=\ldots\ \ldots=c_{P7P8}=c$
$c_{AP1}=cc$
$c_{P8B}=cd$

1.2 Propriétés de matériaux

Ressort de translation élastique linéaire	$k=10^5\,N/m$
Masse ponctuelle	$m=10\,kg$
Amortisseurs visqueux unidirectionnels	$c=50\,N/(m/s)$
	$cc=250\,N/(m/s)$
	$cd=25\,N/(m/s)$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Points A et B encastrés : $u=0$.

1.4 Conditions initiales

Sans objet pour l'analyse modale.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est celle donnée dans la fiche SDLD27 du guide VPCS.

Le problème conduit à rechercher les valeurs propres et vecteurs propres du système dissipatif suivant :

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{u}+\boldsymbol{C}\,\dot{u}+\boldsymbol{K}\,u=0$$

avec $\boldsymbol{M}$ matrice de masse, $\boldsymbol{C}$ matrice d'amortissement, $\boldsymbol{K}$ matrice de rigidité.

On associe à ce problème dissipatif, le problème conservatif : $\boldsymbol{K}\,u+\boldsymbol{M}\,\ddot{u}=0$. Sous forme harmonique, il s'écrit $\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}=0$.

Soient $\Lambda=[\omega_v^2]$ la matrice diagonale spectrale des valeurs propres de ce système conservatif et $\phi=[\varphi_v]$ la matrice correspondante des vecteurs propres.

Les φ_v sont normalisés tels que : $\phi^T M\,\phi=Id \quad \phi^T K\,\phi=\Lambda$.

Les solutions du système dissipatif sont de la forme :

$$u=u_0 e^{st} \text{ d'où } (M\,s^2+C\,s+K)u_0=0\,.$$

On décompose u_0 dans la base des φ_v. On a alors $u_0=\phi\,q$, d'où :

$$(I\,s^2+\gamma\,s+\Lambda)q=0 \text{ avec } \gamma=\phi^T C\,\phi \text{ (matrice pleine)}$$

Ce problème aux valeurs propres est résolu par une méthode de puissance inverse en prenant pour estimation initiale $s_v=j\,\omega_v$.

2.2 Résultats de référence

Les 8 amortissements et fréquences propres du système, ainsi que le 1er et le 8ième mode (complexes).

2.3 Incertitude sur la solution

Solution semi-analytique.

2.4 Références bibliographiques

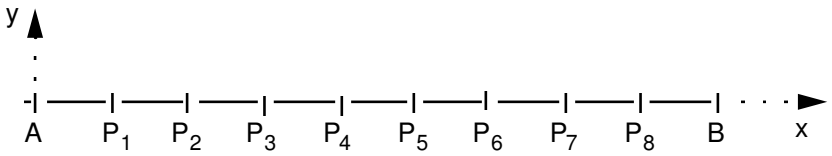
- J. PIRANDA - Notice d'utilisation du logiciel d'analyse modale MODAN - Version 0.2 (1990) Laboratoire de Mécanique Appliquée - Université de Franche-Comté - Besançon (France)
- Guide VPCS. Complément Groupe Dynamique. Septembre 94

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Élément discret de rigidité en translation DIS_T



Caractéristiques des éléments

DISCRET :

avec masses nodales			
en tous les nœuds	M_T_D_N	en repère absolu	$(m=10.)$
matrices de rigidité			
en toutes les mailles	M_T_D_L	en repère absolu	$(K_x=1.10^5)$
matrices d'amortissement			
mailles internes	A_T_D_L	en repère absolu	$(C_x=50.)$
maille initiale	A_T_D_L	en repère absolu	$(C_x=250.)$
maille finale	A_T_D_L	en repère absolu	$(C_x=25.)$

Conditions limites :

DDL_IMPO:	(TOUT:'OUI'	DY: 0. , DZ: 0.)
aux nœuds extrémités	(NŒUD: (A B)	DX: 0.)

Noms des nœuds : $A\ ,P_{1,}P_{2,}....,P_{8,}B$

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds :	10
Nombre de mailles et types :	9 SEG2 et 8 POI1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 Grandeurs testées et résultats

Fréquence	Référence
Ordre du mode propre 1	5.53
Ordre du mode propre 2	10.90
Ordre du mode propre 3	15.93
Ordre du mode propre 4	20.45
Ordre du mode propre 5	24.34
Ordre du mode propre 6	27.49
Ordre du mode propre 7	29.84
Ordre du mode propre 8	31.29

Amortissement	Référence
Ordre du mode propre 1	1.521e-2
Ordre du mode propre 2	2.877e-2
Ordre du mode propre 3	3.960e-2
Ordre du mode propre 4	4.709e-2
Ordre du mode propre 5	5.098e-2
Ordre du mode propre 6	5.183e-2
Ordre du mode propre 7	5.115e-2
Ordre du mode propre 8	5.036e-2

Nature du mode propre	Point	Mode propre Référence en 10^{-3} Partie réelle Partie imaginaire
Translation 1 (Dy) Φ_1	P1	4.07, –4.56
	P2	7.97, –8.28
	P3	10.9, –11.0
	P4	12.5, –12.5
	P5	12.5, –12.4
	P6	11.1, –10.9
	P7	8.24, –8.04
	P8	4.41, –4.25
Translation 8 (Dy) Φ_8	P1	2.23, –1.14
	P2	–3.71, 2.98
	P3	4.75, –4.41
	P4	–5.25, 5.27
	P5	5.14, –5.43
	P6	–4.44, 4.88
	P7	3.23, –3.69
	P8	–1.66, 2.01

Mode propre normé à la masse modale unitaire : $\phi_i^t \boldsymbol{C}\, \phi_i + 2\lambda_i \phi_i^t \boldsymbol{M}\, \phi_i = 1$

λ : est la valeur propre associée à l'amortissement et à la fréquence propre.

3.4 Contenu du fichier résultats

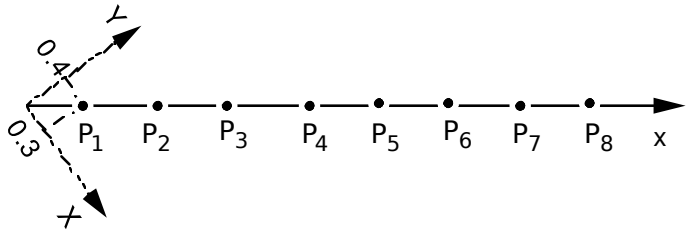
Les 8 amortissements et fréquences propres, ainsi que les vecteurs propres associés.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Élément discret de rigidité en translation DIS_T



Caractéristiques des éléments

ORIENTATION :	en tous les nœuds	avec un angle $\alpha = 53.130102°$	
DISCRET :			
avec masses nodales			
en tous les nœuds	M_T_D_N	en repère absolu	$(m = 10.)$
matrices de rigidité			
en toutes les mailles	K_T_D_L	en repère local	$(K_x = 1.10^5)$
aux nœuds extrémités	K_T_D_N	en repère local	$(K_x = 1.10^5)$
matrices d'amortissement			
mailles internes	A_T_D_L	en repère local	$(C_x = 50.)$
maille initiale	A_T_D_N	en repère local	$(C_x = 250.)$
maille finale	A_T_D_N	en repère local	$(C_x = 25.)$

Conditions limites :

DDL_IMPO:	(TOUT:'OUI' DZ: 0.)
LIAISON_DDL :	(telle que $3Dy = 4Dx$ en tous les nœuds)

Noms des nœuds : $P_1, P_2, ..., P_8$

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8
Nombre de mailles et types : 7 SEG2

Les points P_1 et P_8 sont reliés à un point fictif fixe par des ressorts nodaux (K_T_D_N, A_T_D_N) ce qui permet de ne pas modéliser les nœuds A et B.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Grandeurs testées et résultats

Fréquence	Référence
Ordre du mode propre 1	5.53
Ordre du mode propre 2	10.90
Ordre du mode propre 3	15.93
Ordre du mode propre 4	20.45
Ordre du mode propre 5	24.34
Ordre du mode propre 6	27.49
Ordre du mode propre 7	29.84
Ordre du mode propre 8	31.29

Amortissement	Référence
Ordre du mode propre 1	1.521e–2
Ordre du mode propre 2	2.877e–2
Ordre du mode propre 3	3.960e–2
Ordre du mode propre 4	4.709e–2
Ordre du mode propre 5	5.098e–2
Ordre du mode propre 6	5.183e–2
Ordre du mode propre 7	5.115e–2
Ordre du mode propre 8	5.036e–2

Nature du mode propre	Point	Mode propre Référence en 10^{-3} Partie réelle Partie imaginaire
Translation 1 (Dy) Φ_1	P1	–2.442, 2.736
	P2	–4.782, 4.968
	P3	–6.54 , 6.6
	P4	–7.5 , 7.5
	P5	–7.5 , 7.44
	P6	–6.66 , 6.54
	P7	–4.944, 4.824
	P8	–2.646, 2.55
Translation 8 (Dy) Φ_8	P1	–1.338, 0.684
	P2	–2.226, 1.788
	P3	–2.85 , 2.646
	P4	–3.15 , 3.162
	P5	–3.084, 3.258
	P6	–2.664, 2.928
	P7	–1.938, 2.214
	P8	–0.996, 1.206

Mode propre normé à la masse modale unitaire : $\phi_i^t \boldsymbol{C}\, \phi_i + 2\lambda_i \phi_i^t \boldsymbol{M}\, \phi_i = 1$

λ : est la valeur propre associée à l'amortissement et à la fréquence propre.

4.4 Contenu du fichier résultats

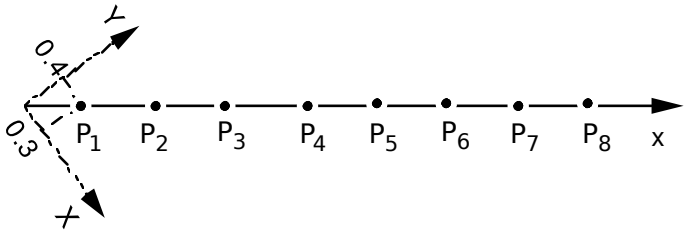
Les 8 amortissements et fréquences propres, ainsi que les vecteurs propres associés.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Élément discret de rigidité en translation DIS_T



Caractéristiques des éléments

ORIENTATION : en tous les nœuds avec un angle $\alpha = 53.130102°$

DISCRET :

avec masses nodales			
en tous les nœuds	M_T_N	en repère absolu	$(m = 10.)$
matrices de rigidité			
en toutes les mailles	K_T_L	en repère local	$(K_x = 1.10^5)$
aux nœuds extrémités	K_T_N	en repère local	$(K_x = 1.10^5)$
matrices d'amortissement			
en toutes les mailles	A_T_L	en repère local	$(C_x = 50.)$
au nœud initial	A_T_N	en repère local	$(C_x = 250.)$
au nœud final	A_T_N	en repère local	$(C_x = 25.)$

Conditions limites :

DDL_IMPO: (TOUT:'OUI' DZ: 0.)

LIAISON_DDL : (telle que $3Dy = 4Dx$ en tous les nœuds)

Noms des nœuds : $P_1, P_2, \ldots, P_8$

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8
Nombre de mailles et types : 7 SEG2

Les points P_1 et P_8 sont reliés à un nœud fictif fixe par des ressorts nodaux (K_T_N, A_T_N).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.3 Grandeurs testées et résultats

Fréquence	Référence
Ordre du mode propre 1	5.53
Ordre du mode propre 2	10.90
Ordre du mode propre 3	15.93
Ordre du mode propre 4	20.45
Ordre du mode propre 5	24.34
Ordre du mode propre 6	27.49
Ordre du mode propre 7	29.84
Ordre du mode propre 8	31.29

Amortissement	Référence
Ordre du mode propre 1	1.521e–2
Ordre du mode propre 2	2.877e–2
Ordre du mode propre 3	3.960e–2
Ordre du mode propre 4	4.709e–2
Ordre du mode propre 5	5.098e–2
Ordre du mode propre 6	5.183e–2
Ordre du mode propre 7	5.115e–2
Ordre du mode propre 8	5.036e–2

Nature du mode propre	Point	Mode propre Référence en 10^{-3} Partie réelle Partie imaginaire
Translation 1 (Dy) Φ_1	P1	–2.442 , 2.736
	P2	–4.782 , 4.968
	P3	–6.54 , 6.6
	P4	–7.5 , 7.5
	P5	–7.5 , 7.44
	P6	–6.66 , 6.54
	P7	–4.944 , 4.824
	P8	–2.646 , 2.55
Translation 8 (Dy) Φ_8	P1	–1.338 , 0.684
	P2	–2.226 , 1.788
	P3	–2.85 , 2.646
	P4	–3.15 , 3.162
	P5	–3.084 , 3.258
	P6	–2.664 , 2.928
	P7	–1.938 , 2.214
	P8	–0.996 , 1.206

Mode propre normé à la masse modale unitaire : $\phi_i^t \boldsymbol{C}\, \phi_i + 2\lambda_i \phi_i^t \boldsymbol{M}\, \phi_i = 1$

λ est la valeur propre associée à l'amortissement et à la fréquence propre.

5.4 Contenu du fichier résultats

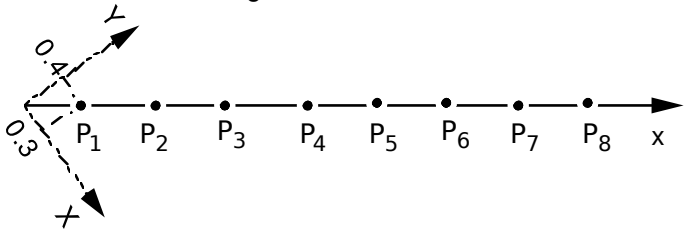
Les 8 amortissements et fréquences propres, ainsi que les vecteurs propres associés.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Transposition du test de référence au cas des degrés de liberté de rotation (ressort de torsion + inertie) en utilisant l'élément discret de rigidité en translation/rotation.



Caractéristiques des éléments

ORIENTATION : en tous les nœuds avec un angle $\alpha = 53.130102°$

DISCRET :

avec masses nodales			
en tous les nœuds	M_TR_D_N	en repère local	$(m = 10.)$
matrices de rigidité			
en toutes les mailles	K_TR_D_L	en repère local	$(KR_x = 1.10^5)$
aux nœuds extrémités	K_TR_D_N	en repère local	$(KR_x = 1.10^5)$
matrices d'amortissement			
en toutes les mailles	A_TR_D_L	en repère local	$(CR_x = 50.)$
au nœud initial	A_TR_D_N	en repère local	$(CR_x = 250.)$
au nœud final	A_TR_D_N	en repère local	$(CR_x = 25.)$

Conditions limites :

DDL_IMPO: (TOUT:'OUI' DX: 0., DY: 0., DZ: 0., DRZ: 0.)

LIAISON_DDL : (telle que $3DRy = 4DRx$ en tous les nœuds)

Noms des nœuds : $P_1, P_2, ..., P_8$

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8
Nombre de mailles et types : 7 SEG2

Les nœuds P_1 et P_8 sont reliés à un nœud fictif fixe par des ressorts nodaux (K_TR_N, A_TR_N).

6.3 Contenu du fichier résultats

Résultats obtenus avec :

```
CALC_FREQ: (LIST_FREQ: (6., 10., 15., 19., 24., 29., 29., 31.))
CALC_MODE: (NMAX_MODE: 75)
```


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6.4 Grandeurs testées et résultats

Fréquence	Référence
Ordre du mode propre 1	5.53
Ordre du mode propre 2	10.90
Ordre du mode propre 3	15.93
Ordre du mode propre 4	20.45
Ordre du mode propre 5	24.34
Ordre du mode propre 6	27.49
Ordre du mode propre 7	29.84
Ordre du mode propre 8	31.29

Amortissement	Référence
Ordre du mode propre 1	1.521e–2
Ordre du mode propre 2	2.877e–2
Ordre du mode propre 3	3.960e–2
Ordre du mode propre 4	4.709e–2
Ordre du mode propre 5	5.098e–2
Ordre du mode propre 6	5.183e–2
Ordre du mode propre 7	5.115e–2
Ordre du mode propre 8	5.036e–2

Nature du mode propre	Point	Mode propre Référence en 10^{-3} Partie réelle Partie imaginaire
Rotation 1 (DRx) Φ_1	P1	–2.442 , 2.736
	P2	–4.782 , 4.968
	P3	–6.54 , 6.6
	P4	–7.5 , 7.5
	P5	–7.5 , 7.44
	P6	–6.66 , 6.54
	P7	–4.944 , 4.824
	P8	–2.646 , 2.55
Rotation 8 (DRx) Φ_8	P1	–1.338 , 0.684
	P2	–2.226 , 1.788
	P3	–2.85 , 2.646
	P4	–3.15 , 3.162
	P5	–3.084 , 3.258
	P6	–2.664 , 2.928
	P7	–1.938 , 2.214
	P8	–0.996 , 1.206

Mode propre normé à la masse modale unitaire : $\phi_i^t \boldsymbol{C}\, \phi_i + 2\lambda_i \phi_i^t \boldsymbol{M}\, \phi_i = 1$

λ est la valeur propre associée à l'amortissement et à la fréquence propre.

6.5 Contenu du fichier résultats

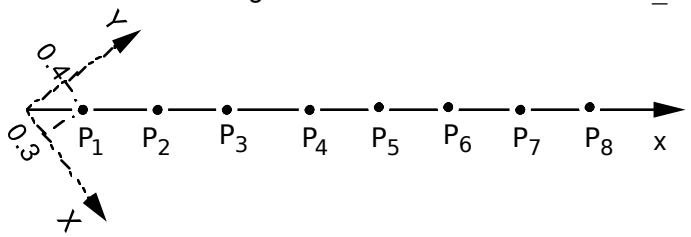
Les 8 amortissements et fréquences propres, ainsi que les vecteurs propres associés.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Transposition du test de référence au cas des degrés de liberté de rotation (ressort de torsion + inertie) en utilisant l'élément discret de rigidité en translation/rotation : DIS_TR



Caractéristiques des éléments

ORIENTATION : en tous les nœuds avec un angle $\alpha = 53.130102°$

DISCRET :

avec masses nodales			
en tous les nœuds	M_TR_N	en repère local	$(I_{xx} = 10.)$
matrices de rigidité			
en toutes les mailles	K_TR_L	en repère local	$(KR_x = 1.10^5)$
aux nœuds extrémités	K_TR_N	en repère local	$(KR_x = 1.10^5)$
matrices d'amortissement			
en toutes les mailles	A_TR_L	en repère local	$(CR_x = 50.)$
au nœud initial	A_TR_N	en repère local	$(CR_x = 250.)$
au nœud final	A_TR_N	en repère local	$(CR_x = 25.)$

Conditions limites :

DDL_IMPO: (TOUT:'OUI' DX: 0., DY: 0., DZ: 0., DRZ: 0.)

LIAISON_DDL : (telle que $3DRy = 4DRx$ en tous les nœuds)

Noms des nœuds : $P_1, P_2, \ldots, P_8$

7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8
Nombre de mailles et types : 7 SEG2

Les nœuds P_1 et P_8 sont reliés à un nœud fictif fixe par des ressorts nodaux (K_TR_N, A_TR_N).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7.3 Grandeurs testées et résultats

Fréquence	Référence
Ordre du mode propre 1	5.53
Ordre du mode propre 2	10.90
Ordre du mode propre 3	15.93
Ordre du mode propre 4	20.45
Ordre du mode propre 5	24.34
Ordre du mode propre 6	27.49
Ordre du mode propre 7	29.84
Ordre du mode propre 8	31.29

Amortissement	Référence
Ordre du mode propre 1	1.521e–2
Ordre du mode propre 2	2.877e–2
Ordre du mode propre 3	3.960e–2
Ordre du mode propre 4	4.709e–2
Ordre du mode propre 5	5.098e–2
Ordre du mode propre 6	5.183e–2
Ordre du mode propre 7	5.115e–2
Ordre du mode propre 8	5.036e–2

Nature du mode propre	Point	Mode propre Référence en 10^{-3} Partie réelle Partie imaginaire
Rotation 1 (DRx) Φ_1	P1	–2.442 , 2.736
	P2	–4.782 , 4.968
	P3	–6.54 , 6.6
	P4	–7.5 , 7.5
	P5	–7.5 , 7.44
	P6	–6.66 , 6.54
	P7	–4.944 , 4.824
	P8	–2.646 , 2.55
Rotation 8 (DRx) Φ_8	P1	–1.338 , 0.684
	P2	–2.226 , 1.788
	P3	–2.85 , 2.646
	P4	–3.15 , 3.162
	P5	–3.084 , 3.258
	P6	–2.664 , 2.928
	P7	–1.938 , 2.214
	P8	–0.996 , 1.206

Mode propre normé à la masse modale unitaire : $\phi_i^t \boldsymbol{C}\, \phi_i + 2\lambda_i \phi_i^t \boldsymbol{M}\, \phi_i = 1$

λ : est la valeur propre associée à l'amortissement et à la fréquence propre.

7.4 Contenu du fichier résultats

Les 8 amortissements et fréquences propres, ainsi que les vecteurs propres associés.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Synthèse des résultats

Pour toutes les options de modélisation des éléments discrets de rigidité, de masse et d'amortissement offertes par AFFE_CARA_ELEM les solutions obtenues sont celles de la solution de référence (fréquences et modes propres).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)