Algorithme de calcul des densités de ferraillage

Résumé :

On présente l'algorithme de calcul des densités de ferraillage des éléments en béton armé, tel que implanté au sein de la commande CALC_FERRAILLAGE [U4.81.42]. On présentera pour ce fait, en un premier temps, l'algorithme de calcul des éléments linéiques '1D', pour ensuite examiner celui des éléments surfaciques '2D' de types coques.

La détermination des ferraillages d'une section est effectuée, selon l'option choisie (CODIFICATION = 'EC2' ou 'BAEL') à l'Eurocode 2 partie 1-1 [bib2] ou au BAEL91-99.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1Calcul du ferraillage des poutres et poteaux....4
1.1Notations et principes d'équilibre....4
1.2Dimensionnement à l'ELU....5
1.2.1Calcul du ferraillage longitudinal en flexion simple ou composée....5
1.2.1.1Définition des hypothèses de calcul....5
1.2.1.2Principe d'équilibre et calcul des sections d'acier....8
1.2.1.3Différence entre BAEL91 et EC2....15
1.2.2Calcul du ferraillage longitudinal en flexion déviée....15
1.2.3Calcul du ferraillage transversal....17
1.2.4Impact des efforts de cisaillement sur le ferraillage longitudinal....21
1.3Dimensionnement à l'ELS Caractéristique....21
1.3.1Calcul du ferraillage longitudinal en flexion simple ou composée....21
1.3.2Calcul du ferraillage longitudinal en flexion déviée....26
1.3.3Calcul du ferraillage transversal....26
1.3.4Impact des efforts de cisaillement sur le ferraillage longitudinal....29
1.4Dimensionnement à l'ELS Quasi Permanent....29
1.4.1Calcul du ferraillage longitudinal en flexion simple ou composée....29
1.4.2Calcul du ferraillage longitudinal en flexion déviée....32
1.4.3Calcul du ferraillage transversal....32
1.4.4Impact des efforts de cisaillement sur le ferraillage longitudinal....35
1.5Prise en compte du ferraillage minimum....35
1.5.1Ferraillage longitudinal....35
1.5.2Ferraillage transversal....35
1.6 Propriétés relatives au champ de ferraillage de sortie....36
1.6.1Calcul de la densité volumique d'armature....36
1.6.2Calcul de l'indicateur de complexité de constructibilité....36
2Calcul du ferraillage des plaques....37
2.1Méthode de Capra et Maury....37
2.1.1Calcul du ferraillage longitudinal....37
2.1.2Considération du Cisaillement Hors-Plan....39
2.2Méthode Sandwich....41
2.2.1Principe de la méthode....41
2.2.2Détermination de l'équilibre membranaire....42
2.2.2.11ère configuration : CAS_SAND = 1....44
2.2.2.22 è me configuration : CAS_SAND = 2....45
2.2.2.33 è me configuration : CAS_SAND = 3....47
2.2.2.44 è me configuration : CAS_SAND = 4....47
2.2.2.5Considération du ferraillage 'négatif' de compression....48

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2.2.5.1 CAS_SAND = 2 bis....48
2.2.2.5.2 CAS_SAND = 3 bis....49
2.2.2.5.3 CAS_SAND = 4 bis....49
2.2.3Considération du ferraillage transversal....50
2.3Prise en compte du ferraillage minimum....52
2.4Propriétés relatives au champ de ferraillage de sortie....52
2.4.1Calcul de la densité volumique d'armature....52
2.4.2Calcul de l'indicateur de complexité de constructibilité....52
3Références bibliographiques....54

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Calcul du ferraillage des poutres et poteaux

1.1 Notations et principes d'équilibre

Les efforts internes des éléments de structure 1D (poutres/poteau) sont exprimés dans le repère local de l'élément, qui sera défini ici de manière cohérente avec la documentation [U4.81.82] concernant le mode d'emploi de la commande CALC_FERRAILLAGE.
Ainsi, l'axe X coïncide avec l'axe porteur de l'élément, tandis que les axes Y et Z sont dans le plan de la section droite et parallèles à ses côtés conformément à la figure ci-dessous.

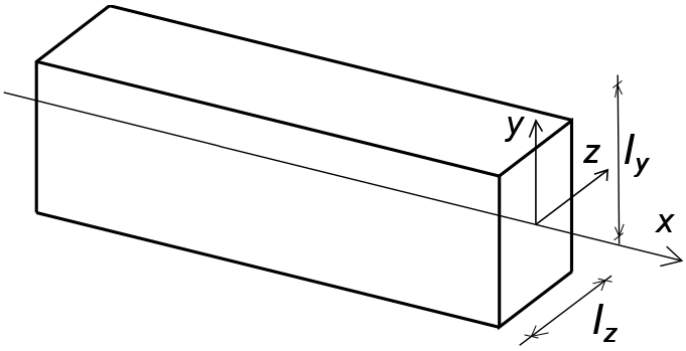


Figure 1 . Définition des axes d'un élément linéique de type poutre/poteau

En utilisant une poutre de section rectangulaire, on définit dans le fichier de commande de code_aster les deux côtés du rectangle l_y et l_z, permettant alors de définir les deux axes principaux d'inertie de la section, à savoir les axes y et z.

Les efforts exprimés dans le repère local de l'élément sont donc :

- N : effort normal
- V_y, V_z : efforts de cisaillement
- M_y, M_z : moments de flexion
- M_x : moment de torsion

Il est à noter que les moments sont exprimés par rapport au centre de gravité de la section non armée (centre de la section géométrique). Par ailleurs, on dira que la section est soumise à une :

- **flexion simple** si seul un moment de flexion (M_y ou M_z) sollicite la section.
- **flexion composée** si sur la section agissent un moment de flexion (M_y ou M_z) et un effort normal N.
- **flexion composée déviée** si la section est soumise simultanément aux deux moments de flexion (M_y, M_z) ainsi qu'à un effort normal N.
- **compression** ou **traction pure** si seulement N agit sur la section.

Le champ de ferraillage typique d'une poutre/poteau est défini comme suit, au niveau de la section transversale de l'élément :

- 4 lits de ferraillages longitudinaux : $A_{\text{sy,sup}}$, $A_{\text{sy,inf}}$, $A_{\text{sz,sup}}$ et $A_{\text{sz,inf}}$ exprimés usuellement en cm^2
  Ces sections sont portées par les deux axes Y et Z d'inertie principaux de la section

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- une densité/ratio de ferraillage transversal : A_{sv}/s exprimé usuellement en cm^2/m

Pour ce fait, le calcul du ferraillage s'effectue en deux temps :

- calcul du ferraillage longitudinal : équilibre en flexion composée et/ou déviée, vis-à-vis des efforts de compression axiale N, et des deux moments de flexion suivant les deux axes d'inertie de la poutres, à savoir M_y et M_z.
- calcul du ferraillage transversal : équilibre aux efforts tranchants de cisaillement V_y et V_z, et au moment de torsion M_x. Il est à noter alors, conformément aux explications qui suivront, que ces efforts pourra dans certains cas induire des efforts de traction supplémentaires suivant l'axe porteur X de l'élément, conduisant alors à un surplus de ferraillage longitudinal.

Ces calculs d'équilibre reposent pour ce fait sur des critères en lien avec l'état limite de dimensionnement retenu, à savoir :

- ELU : le critère est le non dépassement des déformations ultimes du béton comprimé et de l'acier de renforcement.
- ELS Caractéristique : le critère est le non dépassement de la contrainte de compression limite du béton en compression et de la contrainte limite de l'acier de flexion.
- ELS Quasi Permanent : le critère est le non dépassement de l'ouverture maximale des fissures.

1.2 Dimensionnement à l'ELU

1.2.1 Calcul du ferraillage longitudinal en flexion simple ou composée

1.2.1.1 Définition des hypothèses de calcul

Aux ELU, les principes de vérification de la section et du calcul du ferraillage en flexion composée vis-à-vis des sollicitations $N, M_{y|z}$, reposent sur les trois hypothèses suivantes :

- Les sections transversales droites restent planes après déformation (Euler-Bernoulli). Par conséquent, cela induit que le diagramme de déformations régissant la section à l'équilibre en flexion composée est linéaire suivant
- On impose un seuil limite pour les déformations :
  - déformation de l'acier limitée à ε_{ud} (Pivot A)
  - déformation du béton comprimé limitée à ε_{cu2} (Pivot B), dans le cas d'une section partiellement tendue/comprimée
  - déformation du béton comprimé limitée à ε_{c2} (Pivot C), dans le cas d'une section entièrement comprimée
- Les diagrammes contrainte-déformation de l'acier et du béton sont ceux donnés ci-dessous :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour le béton comprimé :

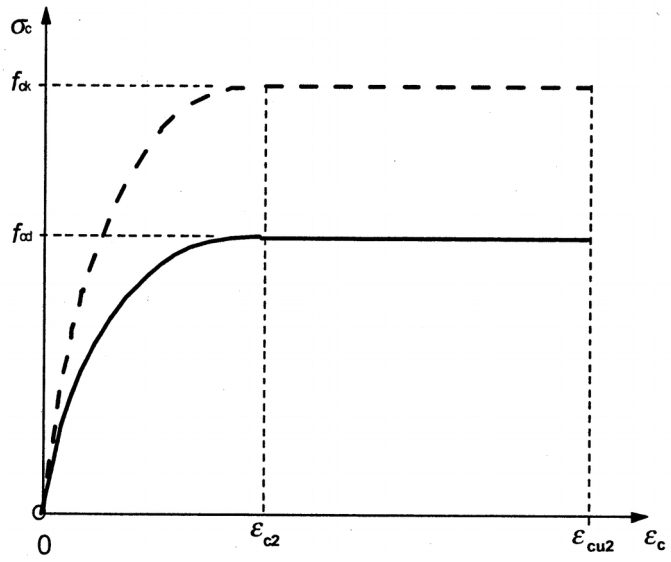


Figure 2 . Loi de comportement du béton en compression à l'ELU

On définit pour ce fait les paramètres ci-dessous :

- f_{ck} : valeur caractéristique de résistance à la compression du béton, qui en pratique est définit suivant la classe du béton au niveau de l'Eurocode 2.
- f_{cd} : valeur de la résistance à la compression du béton retenue pour le calcul aux ELU, à savoir $f_{cd}=\frac{\alpha_{cc} f_{ck}}{\gamma_c}$, avec $\alpha_{cc}=1$ pour l'EC2 et γ_c (coefficient de sécurité) qui dépend du type d'ELU considéré (1.5 en situation permanente et 1.2 en accidentelle).
- ε_{c2} : déformation atteinte pour la contrainte maximale. Elle vaut (formule en MPa) :
  - $\varepsilon_{c2}=2‰$ si $f_{ck}\leq 50\,MPa$
  - $\varepsilon_{c2}(‰)=2+0.085(f_{ck}-50)^{0.53}$ si $f_{ck}>50\,MPa$
- ε_{cu2} : déformation ultime du béton à la rupture. Elle vaut (formule en MPa) :
  - $\varepsilon_{cu2}=3.5‰$ si $f_{ck}\leq 50\,MPa$
  - $\varepsilon_{cu2}(‰)=2.6+35[(90-f_{ck})/100]^4$ si $f_{ck}>50\,MPa$
- n : paramètre pour la définition de la branche parabolique de la loi de comportement, et qui vaut (formule en MPa) :
  - $n=2$ si $f_{ck}\leq 50\,MPa$
  - $n=1.4+23.4[(90-f_{ck})/100]^4$ si $f_{ck}>50\,MPa$

Ainsi, pour des valeurs de déformations du béton $\varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2}$, la contrainte dans le béton se calcule alors par la formule suivante :

$$\sigma_c = f_{cd}\left(1-\left(1-\varepsilon_c/\varepsilon_{c2}\right)^n\right)$$

Il est aussi possible de réaliser le calcul avec l'hypothèse d'un « diagramme rectangulaire simplifié » : la contrainte du béton est considérée alors constante et égale à ηf_{cd} sur une hauteur égale à λx (fraction « λ » de la zone comprimée). Cette simplification est suggérée et admise par l'Eurocode 2 (tant que l'axe neutre demeure à l'intérieur de la section), vu que l'erreur ainsi engendrée sur la résultante F_c des efforts de compression dans le béton reste minime.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

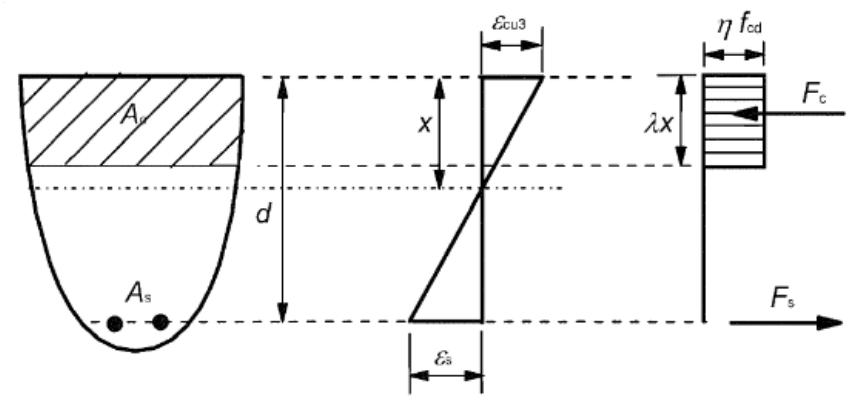


Figure 3 . Diagramme contrainte-déformation rectangulaire simplifié pour le béton.

Les valeurs de $\lambda=0.8$ e $\eta=1$ sont à retenir pour bétons courants ($f_{ck}\leqslant 50\,MPa$). Pour valeurs $50\,MPa<f_{ck}\leq 90\,MPa$ on a :

$$\lambda=0.8-(f_{ck}-50)/400$$

$$\eta=1-(f_{ck}-50)/200$$

Pour l' acier de ferraillage :

L e comportement de l'acier préconisé par l'Eurocode 2 en termes de contrainte-déformation est de type bilinéaire. Il est aussi possible d'adopter un comportement plastique parfait (diagramme à palier horizontal dans la figure qui suit) ; la version actuelle de l'opérateur `CALC_FERRAILLAGE` de code_aster permet de choisir entre ces deux types de diagrammes par le biais du mot-clé `TYPE_DIAGRAMME` .

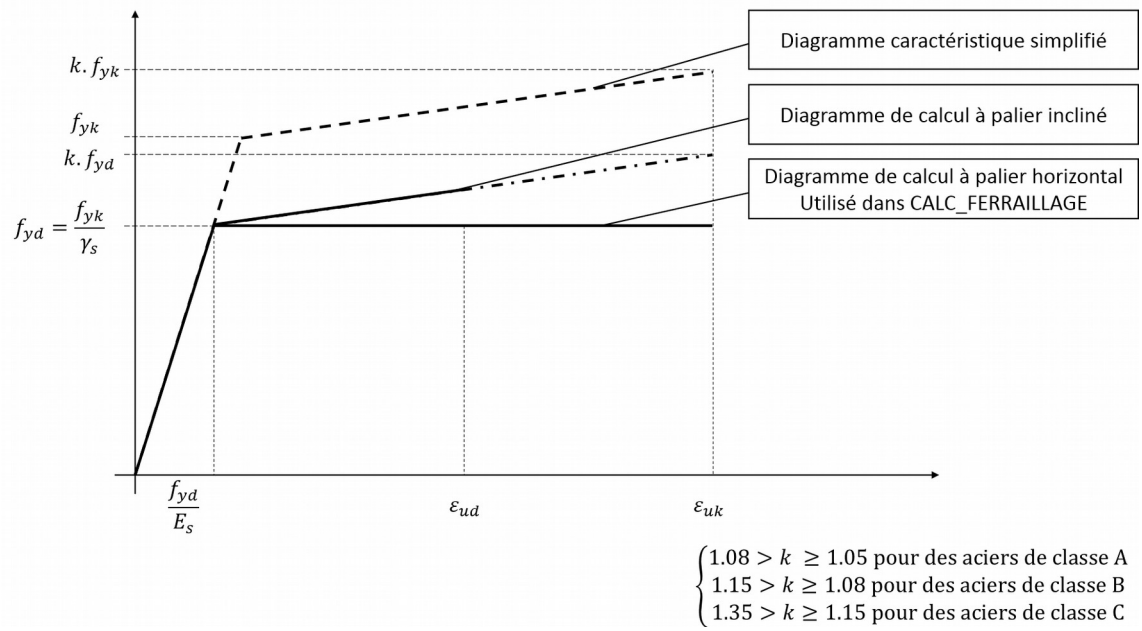


Figure 4 . Diagramme contrainte-déformation pour l'acier de flexion .

Dans le diagramme présenté ci-dessus, on identifie les paramètres suivants :

- La contrainte limite du comportement élastique f_{yk} qui dépend du type d'acier utilisé

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- La contrainte limite du comportement élastique retenue pour le calcul, à savoir $f_{yd}=\frac{f_{yk}}{\gamma_s}$, où γ_s est un coefficient de sécurité.
- La déformation ultime à la rupture ε_{uk} , qui dépend de la classe d'acier utilisée :

- Classe A : $\varepsilon_{uk}=2.5\%$
- Classe B : $\varepsilon_{uk}=5\%$
- Classe C : $\varepsilon_{uk}=7.5\%$

- La déformation ultime à la rupture retenue pour le calcul, à savoir $\varepsilon_{ud}=0.9\varepsilon_{uk}$.
- Le paramètre k dans la figure ci-dessus (nécessaire seulement dans le cas d'utilisation du palier incliné) est défini par $k=(f_t/f_y)_k$, avec f_t la contrainte ultime à la rupture. La valeur de ce paramètre varie également en fonction de la classe d'acier (A, B ou C) tel qu'indiqué dans la figure précédente.
- Le module de Young E_s de l'acier (valeur moyenne et non caractéristique). On définit alors entre autre la limite du comportement élastique en déformation, à savoir $\varepsilon_{yd}=f_{yd}/E_s$.

Mis à part pour le module de Young, c'est bien les valeurs de conception (indice « d ») qui sont utilisées dans les calculs de dimensionnement ou de vérification.

1.2.1.2 Principe d'équilibre et calcul des sections d'acier

Les hypothèses introduites au niveau du §1.2.1.1 sont utilisées pour tracer le schéma de la Figure qui suit et sont à l'origine de la « règle des trois pivots » utilisée pour dimensionner ou vérifier une section en béton armé.

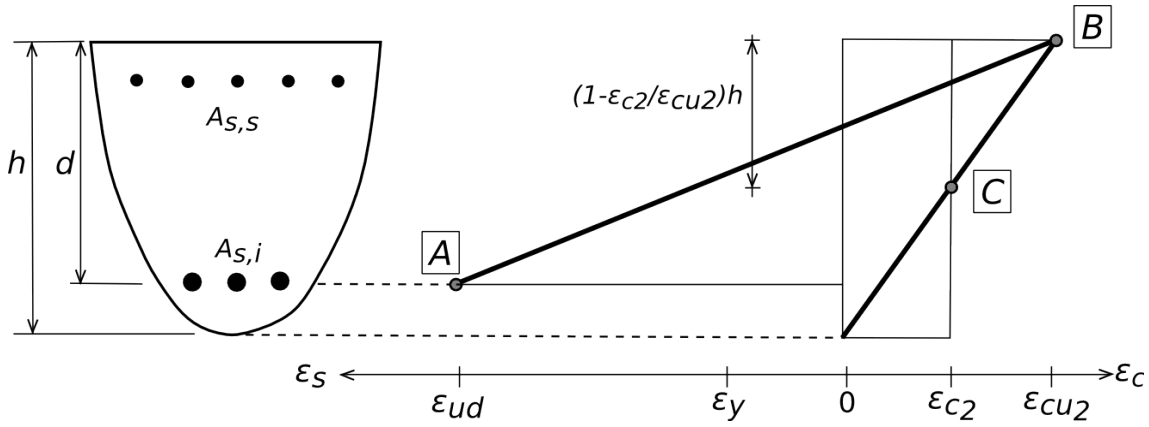


Figure 5 . Principe de dimensionnement en flexion composée aux ELU

Dans la Figure ci-dessus, on distingue:

- Une section typique en béton avec un ferraillage inférieur $A_{s,i}$ et supérieur $A_{s,s}$, de hauteur égale à h et une hauteur utile d , qui représente le bras de levier du centre de gravité des armatures inférieures par rapport à la fibre supérieure de la section *(dans le cadre d'un moment de flexion négatif, il s'agit alors du bras de levier du centre de gravité des armatures supérieures par rapport à la fibre inférieure de la section)*. En pratique, on peut estimer que $d=h-c_{inf}$, tel que c_{inf} représente l'enrobage (à un demi-diamètre près d'armature) des armatures inférieures, c'est-à-dire la distance du centre de gravité des armatures inférieures par rapport à la fibre inférieure de la section *(dans le cadre d'un moment de flexion négatif, on considère alors d = h-c_{sup})*.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Le tracé des diagrammes de déformation limites, sous formes de droites en vue de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, en passant par les 3 pivots A, B et C.

Le dimensionnement aux ELU consiste à se placer sous des conditions de rupture correspondant à l'atteinte d'une déformations limite relative soit à l'acier ou soit au béton, de sorte à ce que le diagramme de déformation passe par un des trois points A, B, C schématisés dans la figure précédente:

- Le pivot A correspond à la rupture de l'acier inférieur *(dans le cadre d'un moment de flexion négatif, il s'agit alors de l'acier supérieur)*, c'est-à-dire quand l'acier tendu atteint la déformation limite ε_{ud}
- Le pivot B correspond à la rupture du béton en fibre supérieure *(dans le cadre d'un moment de flexion négatif, il s'agit alors du béton en fibre inférieure)*, c'est-à-dire quand le béton le plus comprimé atteint la déformation limite ε_{cu2}
- Le pivot C correspond à l'atteinte de la résistance maximale f_{cd} du béton (conformément à la loi de comportement représentée dans la figure 3), soit pour une déformation égale à ε_{c2}. Ce pivot sert pour l'étude des cas entièrement comprimées ; sa position par rapport à la hauteur de la section s'obtient à partir de l'intersection du digramme relatif à la limite du cas partiellement comprimé (axe neutre positionné au niveau de la fibre inférieure *(dans le cadre d'un moment de flexion négatif, il s'agit alors de la fibre supérieure)* de la section ➔ droite (BC)) et du cas de la compression pure (ε_{c2} sur toute la hauteur de la section). Pour ce dernier cas (compression pure), l'Eurocode 2 préfère ainsi limiter les déformations du béton à ε_{c2} plutôt que ε_{cu2}.

Les points A, B, C sont appelés « pivots » vu qu'on peut balayer toutes les configurations de rupture possibles de la section en pivotant autour de l'un parmi eux.

En effet, à partir de la définition des trois pivots et de la position de l'axe neutre du diagramme des déformations, il est possible de définir des « domaines » de rupture, tels que représentés dans la figure qui suit :

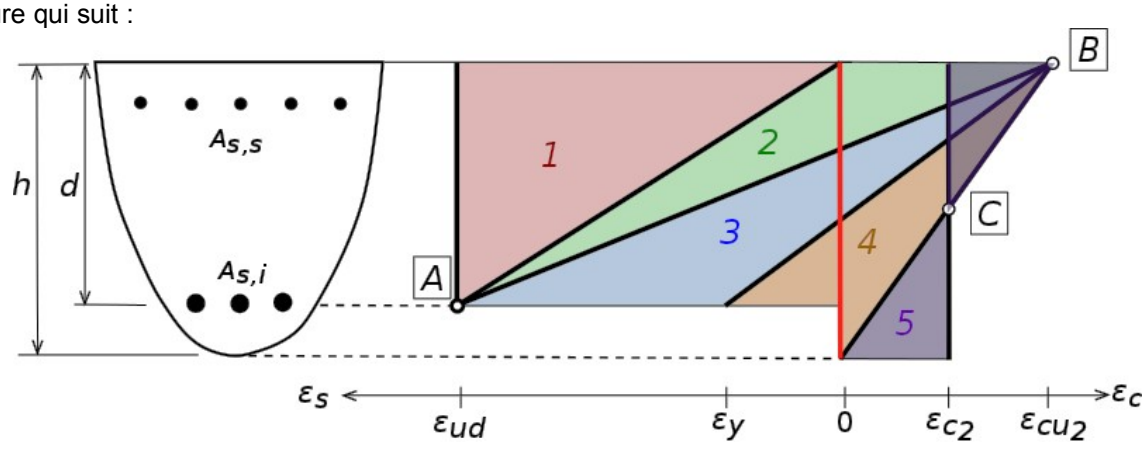


Figure 6 . Domaines de fonctionnement/équilibre en flexion composée aux ELU.

Domaine 1 : le diagramme de déformation passe par le PIVOT A, mais l'axe neutre se trouve à l'extérieur de la section et au-dessus de la fibre supérieure, telle que toute la section soit en traction.

Domaine 2 : le diagramme de déformation passe toujours par le PIVOT A, mais l'axe neutre se trouve désormais à l'intérieur de la section. La section est ainsi partiellement comprimée, telle que la rupture soit au droit de l'acier tendu.

Domaine 3 : le diagramme de déformation passe désormais par le PIVOT B, et l'axe neutre se trouve à l'intérieur de la section. La section est donc toujours partiellement comprimée, avec une rupture au droit de la fibre supérieure du béton.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Domaine 4 : c'est une continuité des hypothèses du domaine précédent, mais la déformation de l'acier inférieure devient inférieure à la limite du comportement élastique-plastique, à savoir $\varepsilon_{yd}=f_{yd}/E_s$. L'acier tendu tombe dans le domaine élastique et ne travaille donc plus de façon optimale en termes de résistance.

Domaine 5 : l'axe neutre se retrouve à nouveau à l'extérieur de la section, mais en-dessous de la fibre inférieure. La section est désormais entièrement comprimée, tel que le diagramme de déformation passe par le PIVOT C.

E n fonction du torseur d'efforts appliqués, l'algorithme déterminera alors le domaine de fonctionnement optimal pour l'équilibre ; les sections de ferraillage supérieur et inférieur sont alors calculés à partir des équations d'équilibre des forces et des moments, tel qu'on explicitera dans ce qui suit.

En cohérence avec les notations qui précèdent, quand $M>0$, le moment et le moment réduit sont calculés au centre de gravité des armatures inférieures, tels que (l'effort normal N étant positif en compression) :

$$M_{\text{inf}}=M+N.\left(\frac{h}{2}-c_{\text{inf}}\right)$$

$$\mu_{\text{inf}}=\frac{M_{\text{inf}}}{b.d^2.\eta.f_{cd}}$$

De la même façon quand $M<0$, le moment et le moment réduit sont calculés au centre de gravité des armatures supérieures, tels que :

$$M_{\text{sup}}=-M+N.\left(\frac{h}{2}-c_{\text{sup}}\right)$$

$$\mu_{\text{sup}}=\frac{M_{\text{sup}}}{b.d^2.\eta.f_{cd}}$$

On considère, pour la suite, le cas d'une flexion positive (les résultats du cas M<0 s'obtiennent alors symétriquement).

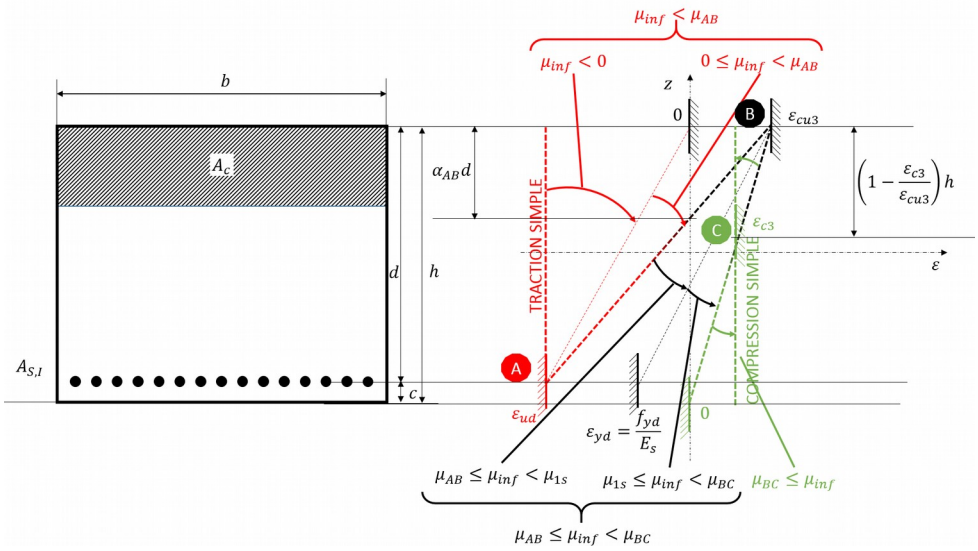


Figure 7 . Principe de la règle des trois pivots pour une section rectangulaire (hxb)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En considérant une section partiellement comprimée (c'est-à-dire que l'axe neutre $x=\alpha\times d$ du diagramme de déformations est à l'intérieur de la section ; concrètement, ceci correspond au domaine $0\leqslant\alpha\leqslant 1$), en l'absence d'acier de compression (c'est-à-dire que $A_{s,s}=0$) et avec les notations de la Figure 3, le moment résistant de la section exprimé au centre de gravité de l'acier tendu est fourni exclusivement par le béton comprimé, et s'exprime comme suit :

$$M_c=\alpha\lambda db\times\eta f_{cd}\times(d-\alpha\lambda d/2)=(bd^2\eta f_{cd})\times\lambda\alpha(1-0{,}5\lambda\alpha)$$

Ou encore, en moment réduit :

$$\mu_c=\frac{M_c}{bd^2\eta f_{cd}}=\lambda\alpha(1-0{,}5\lambda\alpha)$$

L'équilibre des moments conduit alors à avoir : $\mu_c=\lambda\alpha(1-0{,}5\lambda\alpha)=\mu_{\inf}$

La résolution de cette équation du 2nd degré permet alors de déterminer la valeur du coefficient de profondeur de l'axe neutre α. Suivant la valeur de ce coefficient, on se retrouve dans l'un des 5 domaines d'équilibre stipulés précédemment dans la documentation, à savoir:

- Domaine 1 : $\alpha\leqslant 0$ et $\mu\leqslant 0$
- Domaine 2 : $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_{AB}$ et $0\leqslant\mu\leqslant\mu_{AB}$,

  tels que $\alpha_{AB}=\frac{1}{1+\varepsilon_{ud}/\varepsilon_{cu3}}$ et $\mu_{AB}=\lambda\alpha_{AB}(1-0{,}5\lambda\alpha_{AB})$
- Domaine 3 : $\alpha_{AB}\leqslant\alpha\leqslant\alpha_R$ et $\mu_{AB}\leqslant\mu\leqslant\mu_R$,

  tels que $\alpha_R=\frac{1}{1+\varepsilon_{yd}/\varepsilon_{cu3}}$ et $\mu_R=\lambda\alpha_R(1-0{,}5\lambda\alpha_R)$
- Domaine 4 : $\alpha_R\leqslant\alpha\leqslant\alpha_{BC}$ et $\mu_R\leqslant\mu\leqslant\mu_{BC}$,

  tels que $\alpha_{BC}=1$ et $\mu_{BC}=\lambda\alpha_{BC}(1-0{,}5\lambda\alpha_{BC})$
- Domaine 5 : $\alpha\geqslant\alpha_{BC}$ et $\mu\geqslant\mu_{BC}$

Concrètement, l'équation du second degré précédente admet une solution acceptable si on se trouve dans l'un des Domaines 2, 3 ou 4 (dans le cas contraire, c'est-à-dire si l'équation n'est pas solvable, l'algorithme active le mot clé COND_ITER = VRAI). Connaissant alors conséquemment le Pivot (A ou B) associé au domaine, on détermine le diagramme de déformations associé à l'équilibre, et donc la déformation ressentie au centre de l'acier tendu $\varepsilon_{s,i}$. En fonction de la loi de comportement associée pour l'acier (telle que définie au niveau du §1.2.1.1), on détermine la contrainte associée $\sigma_{s,i}$ (négative en traction).

L'écriture de l'équilibre des efforts normaux permet alors d'écrire :

$$F_c+A_{si}\times\sigma_{s,inf}=N$$

Tel que :

$$F_c=\alpha\lambda bd\times\eta f_{cd}$$

On détermine alors la section de l'acier :

$$A_{s,i}=\frac{N-F_c}{\sigma_{s,i}}$$

Si l'équation aboutit à une valeur négative, alors l'algorithme active le mot-clé COND_ITER = VRAI.

Pour les cas ou COND_ITER = VRAI, il s'agit alors de balayer les 5 domaines d'équilibre, c'est-à-dire en faisant itérer α de -∞ à +∞ (et en parcourant de la sorte les 3 Pivots A, B et C). En se basant sur les deux équations d'équilibres (moments et forces), on détermine pour chaque valeur de alpha le

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

couple ($A_{s,s}$,$A_{s,i}$) associé. L'algorithme retiendra au final la configuration aboutissant à une minimisation de la somme $A_{s,s}+A_{s,i}$, tout en veillant à ce que les deux sections soient positives.

On donne dans ce qui suit les expressions des termes de résistance F_c et M_c du béton comprimé pour chacun des 5 domaines, en se basant sur les notations de la figure ci-dessous :

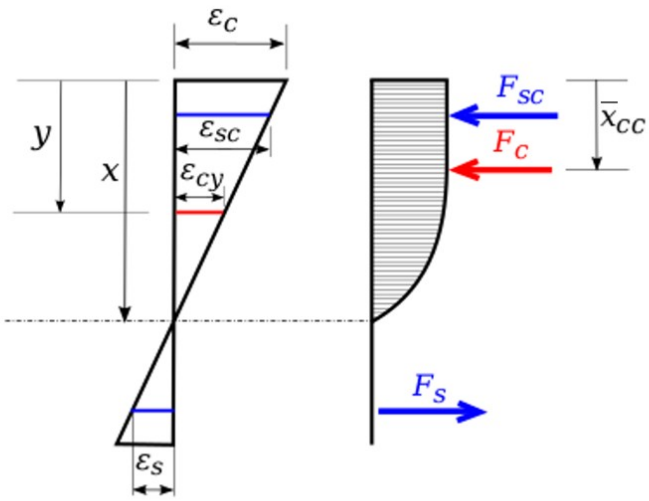


Figure 8 . Déformations et contraintes en flexion composée

- **Si domaine 1 :** $F_c=0$
- **Si domaine 2 :**

  La section étant partiellement comprimée, la déformation dans le béton est donnée par :

  $$\varepsilon_c(y)=\left(\frac{\varepsilon_c}{x}\right)(x-y)$$

  Étant en PIVOT A, on a :

  $$\varepsilon_c=\frac{x}{x-d}\cdot\varepsilon_{ud}$$

  Alors :

  $$F_c=b\int_0^x \sigma_c(y)\,dy=b\int_0^x f_{cd}\left(1-(1-\varepsilon_c(y)/\varepsilon_{c2})^n\right)dy\,,si\,\varepsilon_c\le\varepsilon_{c2}$$

  $$F_c=b\int_0^x \sigma_c(y)\,dy=b\left[\int_0^{\acute{x}} f_{cd}\left(1-\left(1-\varepsilon_c(y)/\varepsilon_{c2}\right)^n\right)dy+f_{cd}(x-\acute{x})\right],si\,\varepsilon_c\ge\varepsilon_{c2}$$

  Où $\acute{x}$ correspond à la limite entre le domaine élastique et plastique pour le béton, tel que $\varepsilon_c(\acute{x})=\varepsilon_{c2}$, soit $\acute{x}=\left(\frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_c}\right)x$.

  On estime enfin le centre de poussée de l'effort F_c comme suit :

  $$\acute{x}_{cc}=\frac{b\int_0^x \sigma_c(y).(\frac{h}{2}-y)\,dy}{F_c}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Et par conséquent :

$$M_c = F_c \times \acute{x}_{cc}$$

- **Si domaines 3 et 4 :**

  La section étant toujours partiellement comprimée, la déformation dans le béton est toujours donnée par :

  $$\varepsilon_c(y) = \left(\frac{\varepsilon_c}{x}\right) y$$

  Étant en PIVOT B, on a :

  $$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu2}$$

  Alors :

  $$F_c = b\int_0^x \sigma_c(y)dy = b\left[\int_0^{\acute{x}} f_{cd}\left(1-\left(1-\varepsilon_c(y)/\varepsilon_{c2}\right)^n\right)dy + f_{cd}(x-\acute{x})\right]$$

  Où $\acute{x}$ correspond à la limite entre le domaine élastique et plastique pour le béton, tel que $\varepsilon_c(\acute{x}) = \varepsilon_{c2}$, soit $\acute{x} = \left(\frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu2}}\right) x$.

  Enfin, on aura toujours :

  $$\acute{x}_{cc} = \frac{b\int_0^x \sigma_c(y).(\frac{h}{2}-y)dy}{F_c}$$

  Et par conséquent :

  $$M_c = F_c \times \acute{x}_{cc}$$

- **Si domaine 5 :**

  La section est dans ce cas, entièrement comprimée, de sorte à ce que le diagramme passe par le PIVOT C ; ce pivot étant défini comme étant l'intersection des deux diagrammes de déformations ci-dessous :

  1. Limite du cas partiellement comprimé (PIVOT B avec l'axe neutre situé à l'arase inférieure de la section)
  2. Cas d'une compression pure ($\varepsilon_c(y) = \varepsilon_{c2}$ sur toute la hauteur de la section)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

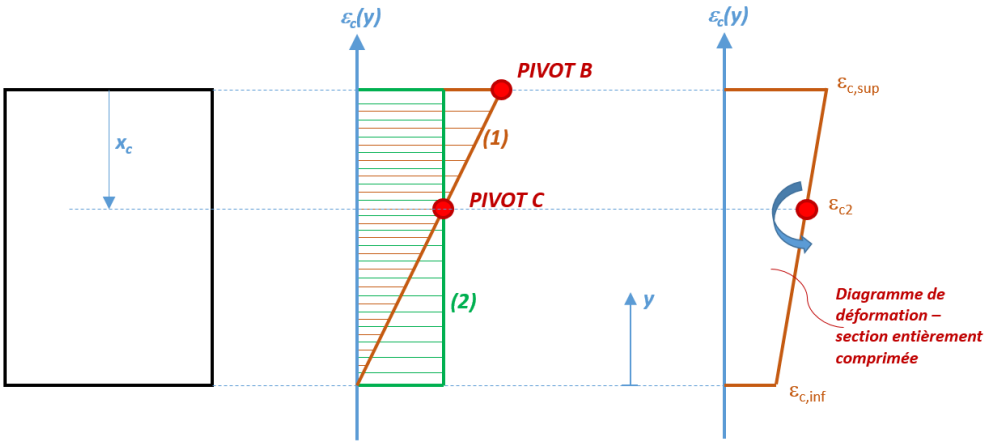


Figure 9 . Construction du PIVOT C à partir des deux diagrammes limites (1) et (2).

Ainsi, la profondeur du PIVOT C sera évaluée à :

$$x_c = \left(1 - \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu2}}\right) h$$

Où h désigne la hauteur de la section. En particulier, le PIVOT C sépare les deux zones de la loi de comportement du béton, de sorte que :

$$\varepsilon_c(C) = \varepsilon_{c2}$$

Par ailleurs, avec les notations données dans la Figure 9, le diagramme de déformation s'écrira :

$$\varepsilon_c(y) = \frac{\Delta\varepsilon}{h} y + \varepsilon_{c,inf}$$

Avec :

- $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{c,sup} - \varepsilon_{c,inf}$
- $\varepsilon_c(y_c) = \varepsilon_c(h - x_c) = \frac{\Delta\varepsilon}{h}(h - x_c) + \varepsilon_{c,inf} = \varepsilon_{c2}$

Ainsi, l'inconnue principale du problème en PIVOT C est $\Delta\varepsilon$ (comparé à x pour le problème en PIVOT A ou B), de sorte que :

- $\varepsilon_{c,inf} = \varepsilon_{c2} - \Delta\varepsilon\left(1 - \frac{x_c}{h}\right)$
- $\varepsilon_{c,sup} = \varepsilon_{c,inf} + \Delta\varepsilon$

L'effort repris par le béton s'estime alors comme suit :

$$F_c = b\int_0^h \sigma_c(y)\,dy = b\left[\int_0^{h-x_c} f_{cd}\left(1 - \left(1 - \varepsilon_c(y)/\varepsilon_{c2}\right)^n\right) dy + f_{cd}\, x_c\right]$$

On estime enfin le centre de poussée de l'effort F_c comme suit :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\acute{x}_{cc}=\frac{b\int_0^h \sigma_c(y).(y-\frac{h}{2})dy}{F_c}$$

Et par conséquent :

$$M_c=F_c\times\acute{x}_{cc}$$

1.2.1.3 Différence entre BAEL91 et EC2

L'algorithme de dimensionnement en flexion composée à l'ELU présenté eau paragraphe précédent est identique pour les deux codifications, seules quelques données d'entrée sont différentes. Le tableau ci-après synthétise les différences entre les deux codifications actuellement retenue

Codification :	BAEL91	EC2
paramètres du diagramme de béton rectangulaire simplifié	$\lambda=0,8$	$\lambda=min[0.8;0.8-\frac{f_{ck}-50}{400}]$
	$\eta=1$	$\eta=min[1;1-\frac{f_{ck}-50}{200}]$
déformation limite de conception des aciers	$\varepsilon_{ud}=1\,\%$	$\varepsilon_{ud}=0.9\,\varepsilon_{uk}$ où ε_{uk} dépend de la classe de ductilité des aciers
déformation de conception en compression du béton	$\varepsilon_{cu2}=0,35\,\%$	$\varepsilon_{cu2}(\%)=min[0.35;0.26+3.5(\frac{90-f_{ck}}{100})^4]$
déformation de conception en compression du béton dans le cadre du Pivot C	$\varepsilon_{c2}=0,2\,\%$	$\varepsilon_{c2}(‰)=min[2,0;2+0.085(f_{ck}-50)^{0.53}]$
contrainte de conception de compression du béton	$f_{cd}=\frac{\alpha_{cc}f_{cj}}{\gamma_c}$ où $\alpha_{cc}=0,85$	$f_{cd}=\frac{\alpha_{cc}f_{ck}}{\gamma_c}$ où $\alpha_{cc}=1$
contrainte de conception des aciers	$f_{yd}=\frac{f_e}{\gamma_s}$	$f_{yd}=\frac{f_{yk}}{\gamma_s}$

1.2.2 Calcul du ferraillage longitudinal en flexion déviée

D ans la présente partie, la section est soumise à la fois à un moment fléchissant suivant l'axe Y et à un autre suivant l'axe Z, ainsi qu'à un effort normal (positif en compression).

Le cas de la flexion déviée ou composée-déviée est plus complexe à résoudre. En effet, le diagramme d'interaction (surface limite de résistance) est dans ce cas tridimensionnel, conformément à la figure ci-dessous :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

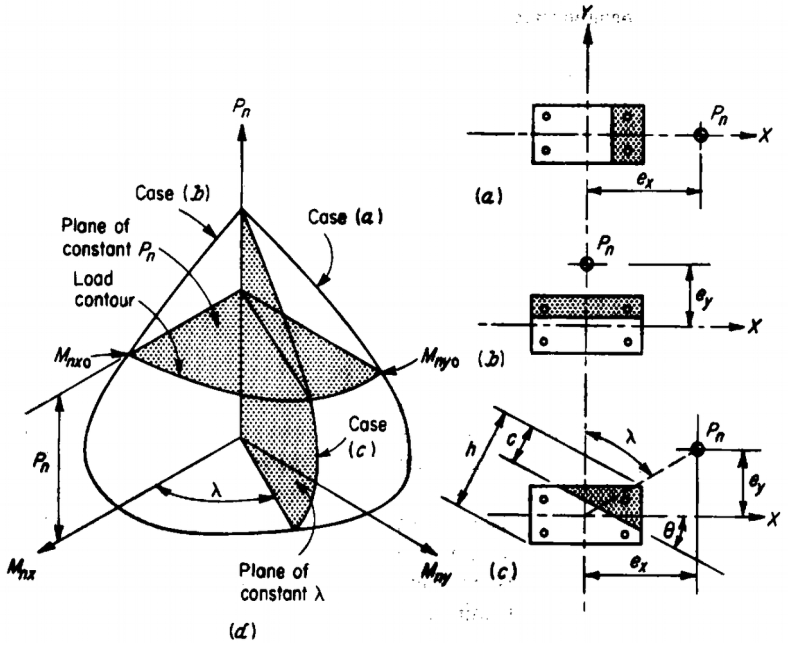


Figure 10 . Diagramme d'interaction 3D suivant les axes N, My, Mz dans le cas d'une section composée déviée

Un processus de dimensionnement exact et rigoureux (similaire aux calculs précédents dans la documentation) serait, par conséquence à cette réalité 3D des sollicitations, complexe à développer. On optera donc, dans la version actuelle de CALC_FERRAILLAGE de code_aster, pour une procédure simplifiée de vérification, pour le moment.

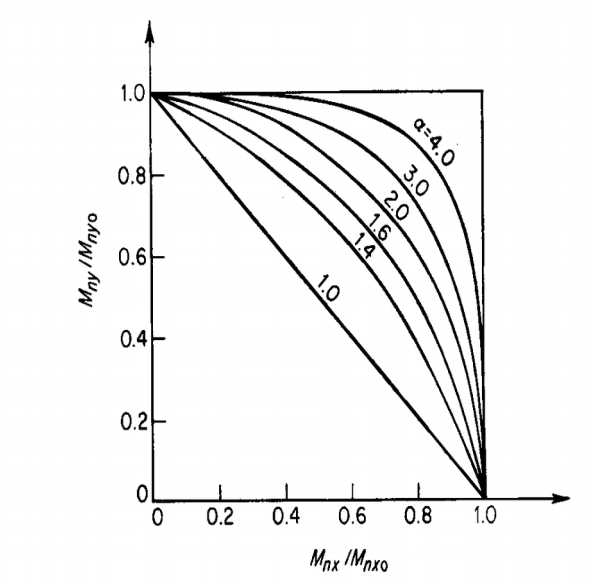
Il s'agira en effet, d'une méthode de dimensionnement 'itérative' (et donc non déterministe), basée sur le principe de vérification de l'inéquation de Bresler développée par Bresler, telle que présentée au niveau du §5.8.9 de l'Eurocode 2. Cette méthode permettra ainsi d'étudier séparément, et de façon parfaitement découplée, les deux flexions composées sollicitant la section, la première (N,M_y) suivant l'axe principal d'inertie Y et la seconde (N,M_z) suivant le second axe principal d'inertie, Z. Une fois les ferraillages obtenus à l'issu des calculs de dimensionnement vis-à-vis de ces deux flexions composées (à savoir le quadruplet $A_{sy,sup}/A_{sy,inf}/A_{sz,sup}/A_{sz,inf}$), la méthode de dimensionnement en flexion déviée consiste alors à vérifier l'inéquation suivante :

$$\left(\frac{M_y}{M_{Ry}}\right)^a + \left(\frac{M_z}{M_{Rz}}\right)^a \leq 1$$

Où les moments M_{Ry} et M_{Rz} sont les moments résistants en flexion composée, sous l'effort normal agissant N, de la section ferraillé respectivement suivant l'axe Y (c'est-à-dire avec le couple $A_{sy,sup}/A_{sy,inf}$) et suivant l'axe Z (c'est-à-dire avec le couple $A_{sz,sup}/A_{sz,inf}$). Ces moments résistants se déduisent des diagrammes d'interaction '2D' suivant Y et Z respectivement.

L'exposant a se calcule en fonction du rapport entre l'effort normal N sollicitant la section, et l'effort normal résistant maximal, à savoir $N_R = A_c \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd}$. En pratique, a sera calculée par interpolation entre les valeurs données au tableau de la Figure ci-dessous (tel qu'extrait du §5.8.9 de l'Eurocode 2) ; en particulier, pour $N/N_R < 0.1$, on prendra $a = 1$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



N / N_R	0.1	0.7	1
a	1	1.5	2

Figure 11 . Calcul du coefficient « a » pour la méthode de Bresler de l'EC2.

Ainsi, tant que l'inéquation de Bresler n'est pas vérifiée (c'est-à-dire si la somme du membre de gauche est supérieure à 1), l'algorithme actuellement proposé dans CALC_FERRAILLAGE reprendra le calcul des moments résistants en augmentant proportionnellement les quatre sections de ferraillage comme suit :

$$A_{\text{sy,sup}}[i+1]=A_{\text{sy,sup}}[i] + \rho_{\text{sy,sup}}[i]\times A_{\text{s,iter}}[i]$$

$$A_{\text{sy,inf}}[i+1]=A_{\text{sy,inf}}[i] + \rho_{\text{sy,inf}}[i]\times A_{\text{s,iter}}[i]$$

$$A_{\text{sz,sup}}[i+1]=A_{\text{sz,sup}}[i] + \rho_{\text{sz,sup}}[i]\times A_{\text{s,iter}}[i]$$

$$A_{\text{sz,inf}}[i+1]=A_{\text{sz,inf}}[i] + \rho_{\text{sz,inf}}[i]\times A_{\text{s,iter}}[i]$$

Tels que :

$$\rho_{\text{sy,sup}}[i]=A_{\text{sy,sup}}[i]/A_{\text{s,TOT}}[i]$$

$$\rho_{\text{sy,inf}}[i]=A_{\text{sy,inf}}[i]/A_{\text{s,TOT}}[i]$$

$$\rho_{\text{sz,sup}}[i]=A_{\text{sz,sup}}[i]/A_{\text{s,TOT}}[i]$$

$$\rho_{\text{sz,inf}}[i]=A_{\text{sz,inf}}[i]/A_{\text{s,TOT}}[i]$$

Avec : $A_{\text{s,TOT}}[i]=A_{\text{sy,sup}}[i]+A_{\text{sy,inf}}[i]+A_{\text{sz,sup}}[i]+A_{\text{sz,inf}}[i]$, et $A_{\text{s,iter}}[i]$ désigne une section d'itération (actuellement prise par défaut égale à 10 % de $A_{\text{s,TOT}}[i]$.

1.2.3 Calcul du ferraillage transversal

On commence par définir le taux d'armatures transversales conformément à l'expression suivante :

$$\rho_w=\frac{A_{sw}}{s\,b_w\sin(\alpha)}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Où:

- A_{sw} désigne l'aire de la section totale (par plan de ferraillage) des armatures transversales.
- s désigne l'espacement longitudinal entre les cadres d'armatures transversales.
- b_w désigne la plus petite largeur de la zone tendue de la section transversale de l'élément.
- α désigne l'angle d'inclinaison des cadres d'armatures transversales par rapport à l'axe longitudinal de l'élément.

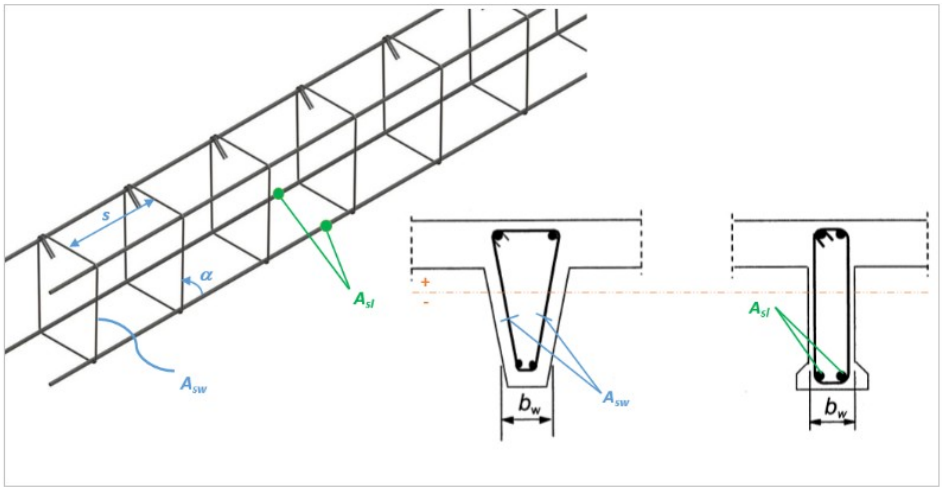


Figure 12 . Ferraillage transversal d'un élément 1D (poutre ou poteau)

Par ailleurs, on fera pour le moment les hypothèses ci-dessous :

- les cadres seront supposés droits, ce qui revient à poser $\alpha = 90°$, soit $\sin(\alpha) = 1$.
- les éléments considérés sont de section rectangulaire, et donc $b_w = b$.

La section transversale est ainsi soumise à un effort tranchant V_{Ed} , ainsi qu'à un moment de torsion T_{Ed} .

Par défaut, aucun ferraillage transversal n'est requis tant que le couple de sollicitations précédent ne dépasse pas les capacités de résistance du béton seul au cisaillement ; cela revient donc à vérifier l'inéquation suivante :

$$\frac{V_{Ed}}{V_{Rd,c}} + \frac{T_{Ed}}{T_{Rd,c}} \leqslant 1$$

Tels que :

- $V_{Rd,c} = [max(C_{Rd,c} k (100 \rho_l f_{ck})^{1/3}; v_{min}) + k_1 \sigma_{cp}] \times b_w d$
- $T_{Rd,c} = 2 f_{ctd} t_k A_k$

O ù :

- f_{ck} en MPa
- $C_{Rd,c} = 0{,}18 / \gamma_c$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- $k=1+\sqrt{\frac{200}{d}}\leqslant 2,0$, avec 'd' en mm

- $\rho_l=\frac{A_{sl}}{b_w d}\leqslant 0,02$, où A_{sl} représente la section des armatures tendues (résultant du calcul en flexion composée)

- $v_{min}=0,053/\gamma_c\times k^{1,5}\times f_{ck}^{0,5}$, dans le cas des poutres

- $k_1=0,15$

- $\sigma_{cp}=\frac{N_{Ed}}{b_w h}\geqslant 0$, où N_{Ed} représente l'effort normal (positif en compression)

- $f_{ctd}=f_{ctk}/\gamma_c$, où f_{ctk} représente la résistance du béton à la traction, tel que $f_{ctk}=\begin{matrix}0,7\times 0,3\times f_{ck}^{2/3}, & \text{si } f_{ck}\leqslant 50\,MPa\\ 0,7\times 2,12\times\log(1+0,1\times(f_{ck}+8)), & \text{si } f_{ck}\geqslant 50\,MPa\end{matrix}$

- $t_k=max[b_w h/(2\times(b_w+h));2c_{sup};2c_{inf}]$

- $A_k=(b_w-t_k)\times(h-t_k)$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire dans le cas où le membre gauche de l'inéquation précédente est supérieur à 1, le dimensionnement du ferraillage transversal au cisaillement est basé sur un modèle en treillis de Ritter-Mörsh formé par un couplage entre bielles de compressions – qui représentent la part du béton résistant au cisaillement – et les cadres du ferraillage transversal. Ce treillis est schématisé au niveau de la figure qui suit, dont on explicite les notations à la suite.

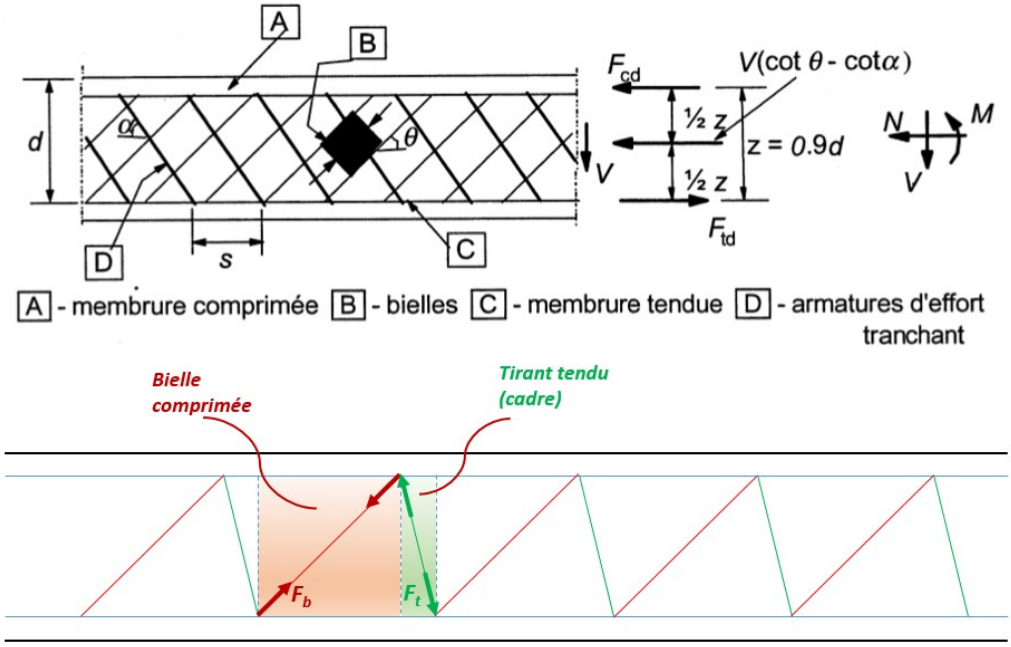


Figure 13 . Structure bielle-tirants pour poutres sollicitées en cisaillement

- α est l'angle entre les armatures d'effort tranchant et la fibre moyenne de l'élément. (Pour rappel, on considérera dans l'algorithme $\alpha=90°$).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- θ est l'angle entre la bielle de compression et la fibre moyenne de l'élément. Conformément aux réglementations de l'Eurocode 2, la valeur de θ devra respecter le domaine $1 \leq cot\theta \leq 2{,}5$.

- F_{td} est la valeur de calcul de l'effort de traction repris par les armatures longitudinales tendues inférieures.

- F_{cd} est la valeur de calcul de l'effort de compression repris par la hauteur de béton comprimé (en fonction de la profondeur de l'axe neutre, tel que déterminé à l'issu du calcul en flexion composée), ainsi que l'éventuel ferraillage de compression supérieur.

- b_w est la plus petite largeur de la section comprise entre la membrure tendue et la membrure comprimée. Dans l'algorithme de calcul, on prendra donc $b_w = b$.

- z est le bras de levier des forces internes, pour un élément de hauteur constante, correspondant au moment fléchissant dans l'élément considéré. Pour les calculs à l'effort tranchant d'une section de béton armé partiellement comprimée (axe neutre au sein de la section), l'algorithme de calcul considérera comme valeur :

$$z = \left(F_{s,s} z_1 + F_{cc} z_1\right) / \left(F_{s,s} + F_{cc}\right)$$

Tels que $z_1 = h - c_{\inf} - c_{\sup}$ représente le bras de levier des armatures comprimées supérieures par rapport au centre de gravité des armatures tendues inférieures, et $z_2 = (1 - 0{,}5\lambda\alpha) \times d$ représente le bras de levier du centre de gravité de la hauteur de béton comprimée par rapport au centre de gravité des armatures tendues inférieures. $F_{s,s} = A_{s,s}\sigma_{s,s}$ représente l'effort repris par les armatures comprimées et $F_{cc} = \eta\lambda \times \alpha \times bdf_{cd}$ représente l'effort repris par la hauteur de béton comprimé.

Pour les autres cas, on peut adopter la valeur approchée $z = 0{,}9\,d$

Le treillis ainsi modélisé résistera à l'effort tranchant sollicitant, diagonale par diagonale, comme suit :

- d'une part, la bielle de compression (diagonale comprimée), dont la résistance est donnée par :

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} b_w z \nu_1 f_{cd} \frac{(\cot\theta + \cot\alpha)}{1 + \cot^2\theta}$$, vis-à-vis de l'effort tranchant

$$T_{Rd,max} = 2\alpha_{cw} \nu_1 f_{cd} A_k t_k \sin\theta\cos\theta$$, vis-à-vis du moment de torsion

Il faudra donc vérifier, pour l'inclinaison de bielle considérée, l'inéquation ci-dessous :

$$\frac{V_{Ed}}{V_{Rd,max}} + \frac{T_{Ed}}{T_{Rd,max}} \leqslant 1$$

- d'autre part, le cadre (diagonale tendu / tirant), dont la résistance est donnée par :

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd} (\cot\theta + \cot\alpha) \sin\alpha$$

Où :

- f_{ywd} est la limite d'élasticité de calcul des armatures d'effort tranchant (prise égale à f_{yd})

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- $v_1 = v = 0{,}6\left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$, avec f_{ck} en MPa, est un coefficient de réduction de la résistance du béton fissuré à l'effort tranchant

- α_{cw} est un coefficient tenant compte de l'état de contrainte dans la membrure comprimée, et dont la valeur varie en fonction de la contrainte de compression moyenne σ_{cp} reprise par le béton comprimé, tel que :

  $\alpha_{cw} = 1$ pour les structures non précontraintes et non soumises à un effort de compression

  $\alpha_{cw} = 1 + \frac{\sigma_{cp}}{f_{cd}}$, pour $0 < \sigma_{cp} \leq 0.25 f_{cd}$

- $\alpha_{cw} = 1.25$, pour $0.25 f_{cd} < \sigma_{cp} \leq 0.5 f_{cd}$

- $\alpha_{cw} = 2.5\left(1 - \frac{\sigma_{cp}}{f_{cd}}\right)$, pour $0.5 f_{cd} < \sigma_{cp} \leq f_{cd}$

  Le principe de dimensionnement du ferraillage transversal consiste alors à égaliser le terme $V_{Rd,s}$ à l'effort de cisaillement sollicitant la section, donné comme suit :

$$V_{Rd,s} = V_{Ed} + (T_{Ed} / A_k) \times (h - t_k)$$

  Il s'agira alors de choisir la valeur de θ permettant de minimiser la densité A_{sw}/s, tout en vérifiant l'inéquation de non écrasement des bielles.

1.2.4 Impact des efforts de cisaillement sur le ferraillage longitudinal

Conformément aux spécifications de l'Eurocode 2, et dans le cas où un ferraillage transversal est requis à la suite du calcul effectué dans le paragraphe précédent, l'effort de traction supplémentaire ΔF_{td} induit dans les armatures longitudinales et dû à l'effort tranchant V_{Ed} et au moment de torsion T_{Ed}, s'écrit comme suit :

$$\Delta F_{td} = V_{Ed} \cot\theta + T_{Ed} \cot\theta \times (u_k / 2 A_k)$$

Ou θ désigne l'angle d'inclinaison des bielles du treillis, tel que retenu dans le dimensionnement précédent. La version actuelle de l'opérateur `CALC_FERRAILLAGE` de code_aster offre la possibilité de prendre en compte cet effort de traction supplémentaire ; pour ce fait, il suffit de prendre `EPURE_CISA = 'OUI'`.

1.3 Dimensionnement à l'ELS Caractéristique

1.3.1 Calcul du ferraillage longitudinal en flexion simple ou composée

Dans le cas du calcul aux ELS, on considère une section homogénéisée acier-béton, de sorte à ce que le diagramme des contraintes soit systématiquement linéaire.

On définit pour la suite les grandeurs ci-dessous :

- $\{\varepsilon_c, \sigma_c\}$ respectivement la déformation et la contrainte ressenties au niveau de la fibre de béton la plus comprimée. Conformément à ce qui précède (digramme de contraintes linéaires), on a que $\sigma_c = E_c \varepsilon_c$, telle que $\varepsilon_c > 0$ en compression.

- $\{\varepsilon_s, \sigma_s\}$ respectivement la déformation et la contrainte ressenties au droit de l'acier tendu, tel que $\sigma_s = E_s \varepsilon_s$ et $\varepsilon_s < 0$ en traction.

Conformément aux notations de la figure qui suit, la résultante des contraintes de compression dans le béton vaut, pour le cas partiellement comprimé :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$F_c=\frac{1}{2}\sigma_c bx=\frac{1}{2}E_c\varepsilon_c bx$$

Conformément à la linéarité du diagramme des contraintes, et toujours dans le cas d'une section partiellement comprimée, cet effort est appliqué à une distance $\frac{x}{3}$ de la fibre la plus comprimée du béton, soit à une distance $\left(d-\frac{x}{3}\right)$ de l'acier principal longitudinal (ou $\left(d'-\frac{x}{3}\right)$ si le moment sollicitant est négatif).

Par ailleurs, l'effort ressenti par l'acier de traction vaut :

$$F_s=A_s\sigma_s=A_sE_s\varepsilon_s$$

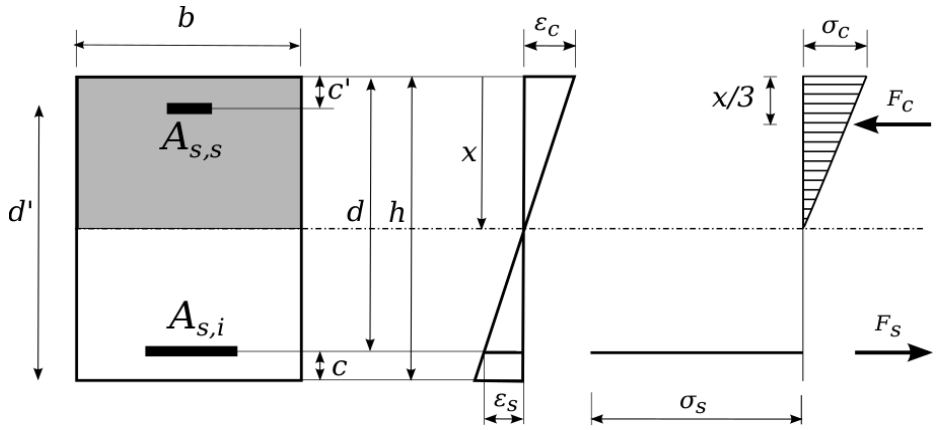


Figure 14 . Contraintes et forces résultantes sur une section en béton armé sollicitée en flexion composée aux ELS

Dans la description de l'algorithme qui suit, le moment fléchissant et l'effort normal aux ELS sollicitant la section, à savoir M_{cara}, N_{cara} , seront notés M, N afin de simplifier l'écriture.

De façon similaire au dimensionnement aux ELU, on cherche à exprimer le moment sollicitant au centre de gravité des armatures tendues, tel que :

$$M_{inf}=M+N\cdot\left(\frac{h}{2}-c\right), si\, M>0$$

$$M_{\sup}=-M+N\cdot\left(\frac{h}{2}-c'\right), si\, M<0$$

On poursuivra désormais avec le cas M>0 (l'autre cas s'obtient symétriquement).

A partir de la linéarité du diagramme des contraintes, et en posant $x=\xi\cdot d$, la relation entre la contrainte dans l'acier tendu et celle au droit du béton comprimé s'écrit :

$$\sigma_s=\frac{1-\xi}{\xi}\alpha_e\sigma_c$$

Où $\alpha_e=\frac{E_s}{E_c}$ désigne le rapport entre le module d'Young de l'acier et celui du béton (permettant d'obtenir une section homogénéisée).

L'équilibre des moments s'écrit alors :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$M_{inf}=F_c\cdot z_c=\left(\frac{1}{2}bx\,\sigma_c\right)\cdot\left(d-\frac{x}{3}\right)$$

On peut définir le moments réduit comme suit :

$$\mu_{inf}=\frac{M_{inf}}{b\,d^2\sigma_{c,\lim}}$$

Où $\sigma_{c,\lim}$ est la contrainte limite que peut reprendre le béton comprimé à l'ELS Caractéristique.

L'équilibre précédent se réécrit alors comme suit :

$$\mu_{inf}=\frac{1}{2}\xi\left(1-\frac{\xi}{3}\right)\frac{\sigma_c}{\sigma_{c,\lim}}$$

D'autre part, l'équilibre des efforts s'écrit (en considérant uniquement un acier inférieur) :

$$N=F_c+F_s=\frac{1}{2}bx\sigma_c+A_{s,i}\cdot\sigma_{s,i}$$

De façon similaire à la règle des pivots du diagramme de déformation aux ELU, l'état limite de service de la section peut être atteint suivant des pivots similaires mais sur le diagramme des contraintes, soit du côté de l'acier pour $\sigma_s=\sigma_{s,\lim}$, soit du côté du béton comprimé pour $\sigma_c=\sigma_{c,\lim}$. En augmentant progressivement la valeur de ξ – *coefficient de profondeur de l'axe neutre tel que* $\xi=\frac{x}{d}$ – le diagramme des contraintes commence par « pivoter » autour du pivot relatif à la limite de l'acier tendu ($\sigma_s=\sigma_{s,\lim}$), pour ensuite « pivoter » autour du pivot relatif à la limite du béton comprimé ($\sigma_c=\sigma_{c,\lim}$). En ce sens, la limite séparant les deux zones de « pivotement » s'obtient en saturant simultanément les deux critères de limitation des contraintes, à savoir en ayant à la fois $\sigma_c=\sigma_{c,\lim}$ et $\sigma_s=\sigma_{s,\lim}$; on obtient alors :

$$\xi_{1,2}=\frac{\alpha_e\sigma_{c,\lim}}{\alpha_e\sigma_{c,\lim}+\sigma_{s,\lim}}$$

En se reportant alors à l'équation du moment réduit donné dans ce qui précède, on calcule alors le moment réduit limite $\acute{\mu}_{\inf}$ (ou $\acute{\mu}_{\sup}$ si M < 0), obtenu pour $\xi=\xi_{1,2}$, permettant de reconnaître le pivot à retenir pour un couple (M,N) donné. Ainsi, dans le cas où M > 0 :

- Si $\mu_{\inf}<\acute{\mu}_{\inf}$, c'est le pivot relatif à l'acier tendu qui est retenu, à savoir $\sigma_s=\sigma_{s,\lim}$.

  Dans ce cas, les relations données permettent alors d'exprimer la contrainte au droit de la fibre de béton la plus comprimée σ_c, en fonction de $\sigma_{s,\lim}$, α_e et ξ. L'équilibre des moments se réécrit alors comme suit :

  $$\frac{1}{2}\frac{\sigma_{s,\lim}}{\alpha_e\sigma_{c,\lim}}\frac{\xi^2}{1-\xi}\left(1-\frac{\xi}{3}\right)=\mu_{inf}$$

  La résolution de cette équation polynomiale du 3e degré permet de déterminer le coefficient de profondeur de l'axe neutre ξ ; de là, l'équation d'équilibre des efforts normaux permet alors de calculer la section d'acier principal A_s.

- Si $\mu_{\inf}>\acute{\mu}_{\inf}$, c'est le pivot relatif au béton comprimé qui est retenu, à savoir $\sigma_c=\sigma_{c,\lim}$.

  L'équilibre des moments donné précédemment se réécrit alors comme suit :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mu_{inf}=\frac{1}{2}\xi\left(1-\frac{\xi}{3}\right)$$

La résolution de cette équation polynomiale du 2nd degré permet de déterminer le coefficient de profondeur de l'axe neutre ξ ; de là, on détermine la contrainte au droit de l'acier tendu σ_s, et ce en fonction de $\sigma_{c,\lim}$, α_e et ξ. L'équation d'équilibre des efforts normaux permet alors de calculer la section d'acier principal A_s.

Si l'équilibre précédent aboutit à une valeur négative de A_s, ou si on se retrouve dans un cas entièrement tendu ou entièrement comprimé, alors l'algorithme active le mot-clé COND_ITER = VRAI.

Pour les cas o ù COND_ITER = VRAI, il s'agit alors de balayer les différents domaines d'équilibre, c'est-à-dire en faisant itérer ξ de - ∞ à +∞. En se basant sur les deux équations d'équilibres (moments et forces), on détermine pour chaque valeur de ξ l e couple ($A_{s,s}$,$A_{s,i}$) associé. L'algorithme retiendra au final la configuration aboutissant à une minimisation de la somme $A_{s,s}+A_{s,i}$, tout en veillant à ce que les deux sections soient positives.

Ainsi, en ayant toujours $\xi=\frac{x}{d}$, $\delta=\frac{d}{h}$ et $\delta'=\frac{d'}{h}$, on distingue les cas ci-dessous :

- pour $\xi\leq 0$, la section est entièrement tendue tel que le diagramme de contraintes passe par le pivot relatif à l'acier principal de traction ($\sigma_s=-\sigma_{s,\lim}$), avec :
  - $\sigma_c=0$ (le béton n'a aucune résistance et en particulier $F_c=0$)
  - $\sigma_{sc}=\frac{1-\delta'-\xi\cdot\delta}{\delta-\xi\cdot\delta}\sigma_s$ (σ_{sc} devient négative, s'agissant d'un état de traction, conformément à ce qui précède).
- pour $0<\xi<\frac{\alpha_e\sigma_{c,\lim}}{\alpha_e\sigma_{c,\lim}+\sigma_{s,\lim}}$, la section est partiellement comprimée tel que le diagramme de contraintes passe toujours par le pivot relatif à l'acier principal de traction ($\sigma_s=-\sigma_{s,\lim}$), avec :
  - $\sigma_c=\frac{\xi}{1-\xi}\frac{\sigma_{s,\lim}}{\alpha_e}$
  - $\sigma_{sc}=\frac{1-\delta'-\xi\cdot\delta}{\delta-\xi\cdot\delta}\sigma_s$
- pour $\xi>\frac{\alpha_e\sigma_{c,\lim}}{\alpha_e\sigma_{c,\lim}+\sigma_{s,\lim}}$, la section est partiellement comprimée tel que le diagramme de contraintes passe désormais par le pivot relatif à la fibre de béton la plus comprimée ($\sigma_c=\sigma_{c,\lim}$), avec :
  - $\sigma_s=\frac{\xi-1}{\xi}\alpha_e\sigma_{c,\lim}$
  - $\sigma_{sc}=\frac{\xi\cdot\delta-1+\delta'}{\xi\cdot\delta}\alpha_e\sigma_{c,\lim}$

Pour $\xi=\frac{\alpha_e\sigma_{c,\lim}}{\alpha_e\sigma_{c,\lim}+\sigma_{s,\lim}}$, le critère est atteint simultanément côté acier et béton.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La résolution des deux équations d'équilibre (efforts et moments) permettront de déterminer les deux inconnues du problème, à savoir $A_{s,s}$ et $A_{s,i}$.

Dans le cas où la section est entièrement comprimée (axe neutre à l'extérieure la section) :

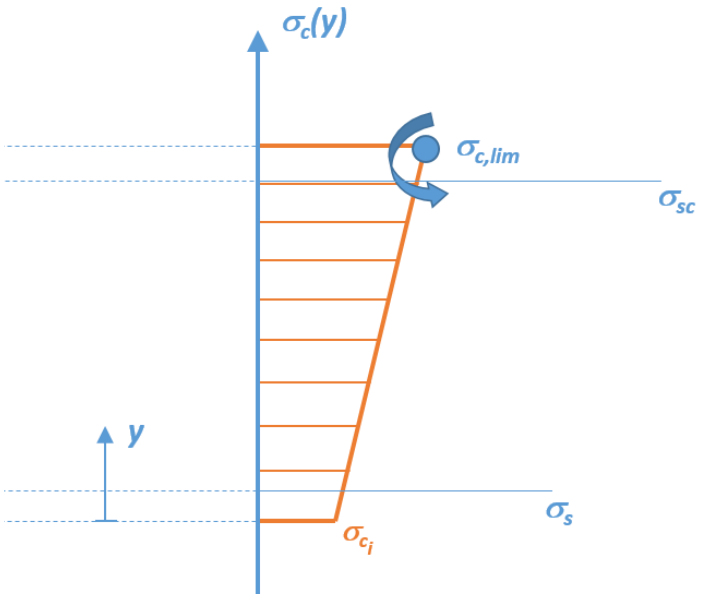


Figure 15 . Diagramme des contraintes en flexion composée aux ELS – cas entièrement comprimé.

Par continuité au cas précédent ($\xi > \frac{\alpha_e \sigma_{c,\lim}}{\alpha_e \sigma_{c,\lim} + \sigma_{s,\lim}}$), le diagramme des contraintes passe toujours par le pivot relatif à la fibre de béton la plus comprimée ($\sigma_c = \sigma_{c,\lim}$), avec, conformément aux notations de la Figure 13 :

- $\Delta\sigma = \sigma_{c,\lim} - \sigma_{c_i}$
- $\sigma_c(y) = \sigma_{c_i} + \left(\frac{\Delta\sigma}{h}\right) y$
- $\delta = \frac{d}{h}$ et $\delta' = \frac{d'}{h}$
- $\sigma_{sc} = \alpha_e(\sigma_{c_i} + \Delta\sigma \cdot \delta')$
- $\sigma_{sc} = \alpha_e(\sigma_{c_i} + \Delta\sigma \cdot (1-\delta))$

En posant $X = \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{c,\lim}}$, les efforts repris par le béton de la section s'écrivent comme suit :

- Effort résistant : $F_c = \frac{1}{2} bh(2-X)\sigma_{c,\lim}$
- Moment résistant par rapport au centre de la section : $M_c = \frac{1}{12} b h^2 X \sigma_{c,\lim}$

L'effort normal résistant s'écrit alors comme suit :

$$N_R = F_c + F_{sc} + F_s = F_c + A_{s,s}\sigma_{s,s} + A_{s,i}\sigma_{s,i}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Et le moment résistant (calculé au centre de la section) s'écrit comme suit :

$$M_R = M_c + F_{sc} \cdot \left(d' - \frac{h}{2}\right) - F_{sc} \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right)$$

La résolution des deux équations d'équilibre (efforts et moments) permettront de déterminer les deux inconnues du problème, à savoir $A_{s,s}$ et $A_{s,i}$.

1.3.2 Calcul du ferraillage longitudinal en flexion déviée

Dans la présente partie, la section est soumise à la fois à un moment fléchissant suivant l'axe Y et à un autre suivant l'axe Z, ainsi qu'à un effort normal (positif en compression).

Similairement au cas à l'ELU (§1.2.2), Il s'agira d'appliquer une méthode de dimensionnement 'itérative' (et donc non déterministe), basée sur le principe de vérification de l'inéquation de Bresler développée par Bresler, telle que présentée au niveau du §5.8.9 de l'Eurocode 2. Cette méthode permettra ainsi d'étudier séparément, et de façon parfaitement découplée, les deux flexions composées sollicitant la section, la première (N,M_y) suivant l'axe principal d'inertie Y et la seconde (N,M_z) suivant le second axe principal d'inertie, Z. Une fois les ferraillages obtenus à l'issu des calculs de dimensionnement vis-à-vis de ces deux flexions composées (à savoir le quadruplet $A_{sy,sup}/A_{sy,inf}/A_{sz,sup}/A_{sz,inf}$), la méthode de dimensionnement en flexion déviée consiste alors à vérifier l'inéquation suivante :

$$\left(\frac{M_y}{M_{Ry}}\right)^a + \left(\frac{M_z}{M_{Rz}}\right)^a \leq 1$$

Où les moments M_{Ry} et M_{Rz} sont les moments résistants en flexion composée, sous l'effort normal agissant N , de la section ferraillée respectivement suivant l'axe Y (c'est-à-dire avec le couple $A_{sy,sup}/A_{sy,inf}$) et suivant l'axe Z (c'est-à-dire avec le couple $A_{sz,sup}/A_{sz,inf}$). Ces moments résistants se déduisent des diagrammes d'interaction '2D' suivant Y et Z respectivement.

L'exposant a se calcule en fonction du rapport entre l'effort normal N sollicitant la section, et l'effort normal résistant maximal, à savoir $N_R = A_c \cdot f_c + A_s \cdot f_s$, tel que :

$$f_c = \frac{1}{4} \cdot \left(\sigma_{c,max}^{y,sup} + \sigma_{c,max}^{y,inf} + \sigma_{c,max}^{z,sup} + \sigma_{c,max}^{z,inf}\right)$$

$$f_s = \sigma_{s,max}$$

Le reste du processus de dimensionnement est similaire à celui étayé à l'ELU (voir §1.2.2)

1.3.3 Calcul du ferraillage transversal

On commence par définir le taux d'armatures transversales conformément à l'expression suivante :

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{s b_w \sin(\alpha)}$$

Où:

- A_{sw} désigne l'aire de la section totale (par plan de ferraillage) des armatures transversales.
- s désigne l'espacement longitudinal entre les cadres d'armatures transversales.
- b_w désigne la plus petite largeur de la zone tendue de la section transversale de l'élément.
- α désigne l'angle d'inclinaison des cadres d'armatures transversales par rapport à l'axe longitudinal de l'élément.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Par ailleurs, on fera pour le moment les hypothèses ci-dessous :

- les cadres seront supposés droits, ce qui revient à poser $\alpha = 90°$, soit $\sin(\alpha) = 1$.
- les éléments considérés sont de section rectangulaire, et donc $b_w = b$.

La section transversale est ainsi soumise à un effort tranchant V_{cara}, ainsi qu'à un moment de torsion T_{cara}.

Par défaut, aucun ferraillage transversal n'est requis tant que le couple de sollicitations précédent ne dépasse pas les capacités de résistance du béton seul au cisaillement ; cela revient donc à vérifier l'inéquation suivante :

$$\frac{V_{cara}}{V_{Rd,c}} + \frac{T_{cara}}{T_{Rd,c}} \leqslant 1$$

Tels que :

- $V_{Rd,c} = [max(C_{Rd,c} k (100 \rho_l f_{ck})^{1/3}; v_{min}) + k_1 \sigma_{cp}] \times b_w d$
- $T_{Rd,c} = 2 f_{ctd} t_k A_k$

O ù :

- f_{ck} en MPa
- $C_{Rd,c} = 0{,}18/\gamma_c$; $\gamma_c = f_{ck}/\sigma_{c,0}$, tel que $\sigma_{c,0} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{c,max}^{sup} + \sigma_{c,max}^{inf})$
- $k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leqslant 2{,}0$, avec 'd' en mm
- $\rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w d} \leqslant 0{,}02$, où A_{sl} représente la section des armatures tendues (résultant du calcul en flexion composée)
- $v_{min} = \frac{0{,}053}{\gamma_c} \times k^{1,5} \times f_{ck}^{0,5}$, dans le cas des poutres
- $k_1 = 0{,}15$
- $\sigma_{cp} = \frac{N_{cara}}{b_w h} \geqslant 0$, où N_{cara} représente l'effort normal (positif en compression)
- $f_{ctd} = f_{ctk}/\gamma_c$, où f_{ctk} représente la résistance du béton à la traction, tel que $f_{ctk} = \begin{cases} 0{,}7 \times 0{,}3 \times f_{ck}^{2/3}, & \text{si } f_{ck} \leqslant 50\,MPa \\ 0{,}7 \times 2{,}12 \times \log(1 + 0{,}1 \times (f_{ck} + 8)), & \text{si } f_{ck} \geqslant 50\,MPa \end{cases}$
- $t_k = max[b_w h/(2 \times (b_w + h)); 2 c_{sup}; 2 c_{inf}]$
- $A_k = (b_w - t_k) \times (h - t_k)$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire dans le cas où le membre gauche de l'inéquation précédente est supérieur à 1, le dimensionnement du ferraillage transversal au cisaillement est basé sur un modèle en treillis de Ritter-Mörsh formé par un couplage entre bielles de

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

compressions – qui représentent la part du béton résistant au cisaillement – et les cadres du ferraillage transversal.

- α est l'angle entre les armatures d'effort tranchant et la fibre moyenne de l'élément. (Pour rappel, on considérera dans l'algorithme $\alpha = 90°$).

- θ est l'angle entre la bielle de compression et la fibre moyenne de l'élément. Conformément aux réglementations de l'Eurocode 2, la valeur de θ devra respecter le domaine $1 \leq cot\theta \leq 2{,}5$.

- b_w est la plus petite largeur de la section comprise entre la membrure tendue et la membrure comprimée. Dans l'algorithme de calcul, on prendra donc $b_w = b$.

- z est le bras de levier des forces internes, pour un élément de hauteur constante, correspondant au moment fléchissant dans l'élément considéré. Pour les calculs à l'effort tranchant d'une section de béton armé partiellement comprimée (axe neutre au sein de la section), l'algorithme de calcul considérera comme valeur :

$$z = \left(F_{s,s} z_1 + F_{cc} z_1\right) / \left(F_{s,s} + F_{cc}\right)$$

Tels que $z_1 = h - c_{\inf} - c_{\sup}$ représente le bras de levier des armatures comprimées supérieures par rapport au centre de gravité des armatures tendues inférieures, et $z_2 = (1 - \xi/3) \times d$ représente le bras de levier du centre de gravité de la hauteur de béton comprimée par rapport au centre de gravité des armatures tendues inférieures. $F_{s,s} = A_{s,s} \sigma_{s,s}$ représente l'effort repris par les armatures comprimées et $F_{cc} = 0{,}5 \times \sigma_{c,\sup} \xi d b_w$ représente l'effort repris par la hauteur de béton comprimé.

Pour les autres cas, on peut adopter la valeur approchée $z = 0{,}9\, d$

Le treillis ainsi modélisé résistera à l'effort tranchant sollicitant, diagonale par diagonale, comme suit :

- d'une part, la bielle de compression (diagonale comprimée), dont la résistance est donnée par :

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} b_w z \nu_1 \sigma_{c,0} \frac{(\cot\theta + \cot\alpha)}{1 + \cot^2\theta}$$, vis-à-vis de l'effort tranchant

$$T_{Rd,max} = 2 \alpha_{cw} \nu_1 \sigma_{c,0} A_k t_k \sin\theta \cos\theta$$, vis-à-vis du moment de torsion

Il faudra donc vérifier, pour l'inclinaison de bielle considérée, l'inéquation ci-dessous :

$$\frac{V_{cara}}{V_{Rd,max}} + \frac{T_{cara}}{T_{Rd,max}} \leqslant 1$$

- d'autre part, le cadre (diagonale tendu / tirant), dont la résistance est donnée par :

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z \sigma_{s,\lim} (\cot\theta + \cot\alpha) \sin\alpha$$

Où :

- $\sigma_{s,\lim}$ est la contrainte limite autorisée dans l'acier pour le dimensionnement en flexion composée à l'ELS Caractéristique

- $\nu_1 = \nu = 0{,}6\left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$, avec f_{ck} en MPa, est un coefficient de réduction de la résistance du béton fissuré à l'effort tranchant

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- α_{cw} est un coefficient tenant compte de l'état de contrainte dans la membrure comprimée, et dont la valeur varie en fonction de la contrainte de compression moyenne σ_{cp} reprise par le béton comprimé, tel que :

  $\alpha_{cw}=1$ pour les structures non précontraintes et non soumises à un effort de compression

  $\alpha_{cw}=1+\frac{\sigma_{cp}}{\sigma_{c,0}}$, pour $0<\sigma_{cp}\leq 0.25\sigma_{c,0}$

- $\alpha_{cw}=1.25$, pour $0.25\sigma_{c,0}<\sigma_{cp}\leq 0.5\sigma_{c,0}$

- $\alpha_{cw}=2.5\left(1-\frac{\sigma_{cp}}{\sigma_{c,0}}\right)$, pour $0.5\sigma_{c,0}<\sigma_{cp}\leq \sigma_{c,0}$

Le principe de dimensionnement du ferraillage transversal consiste alors à égaliser le terme $V_{Rd,s}$ à l'effort de cisaillement sollicitant la section, donné comme suit :

$$V_{Rd,s}=V_{cara}+\left(T_{cara}/A_k\right)\times\left(h-t_k\right)$$

Il s'agira alors de choisir la valeur de θ permettant de minimiser la densité A_{sw}/s, tout en vérifiant l'inéquation de non écrasement des bielles.

1.3.4 Impact des efforts de cisaillement sur le ferraillage longitudinal

Conformément aux spécifications de l'Eurocode 2, et dans le cas où un ferraillage transversal est requis à la suite du calcul effectué dans le paragraphe précédent, l'effort de traction supplémentaire ΔF_{td} induit dans les armatures longitudinales et dû à l'effort tranchant V_{cara} et au moment de torsion T_{cara}, s'écrit comme suit :

$$\Delta F_{td}=V_{cara}\cot\theta+T_{cara}\cot\theta\times\left(u_k/2A_k\right)$$

Ou θ désigne l'angle d'inclinaison des bielles du treillis, tel que retenu dans le dimensionnement précédent. La version actuelle de l'opérateur `CALC_FERRAILLAGE` de code_aster offre la possibilité de prendre en compte cet effort de traction supplémentaire ; pour ce fait, il suffit de prendre `EPURE_CISA = 'OUI'`.

1.4 Dimensionnement à l'ELS Quasi Permanent

1.4.1 Calcul du ferraillage longitudinal en flexion simple ou composée

Le calcul du dimensionnement du ferraillage à l'ELS QP (Etat Limite de Service Quasi Permanent) se base sur une reprise de l'algorithme précédent du calcul du ferraillage à l'ELS (Caractéristique) , mais en faisant varier les deux pivots de contraintes limites de sorte à saturer l'un des deux critères ci-dessous :

- Limitation de la contrainte de compression dans le béton à $\sigma_{c,\lim,FL}$, afin d'éviter le fluage non-linéaire du béton
- Limitation de l'ouverture des fissures ($w_{k,sup}\leq w_{max,sup}$ et $w_{k,inf}\leq w_{max,inf}$)

Concrètement, il s'agit de procéder par itération en reprenant répétitivement le calcul explicité au niveau du §1.3.1 précédent, en considérant :

- $\sigma_{c,\lim}=\sigma_{c,\lim,FL}$
- $\sigma_{s,\lim}=k_{var}\times f_{yk}$
- $M=M_{qp}\,et\,N=N_{qp}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Où $\sigma_{c,\lim,FL}$ est définie par l'utilisateur (l'EC2 préconise de considérer $\sigma_{c,\lim,FL}=k_2\times f_{ck}$ avec un valeur usuelle de $k_2=0{,}45$).

Pour le pivot au droit de l'acier tendu, l'algorithme cherchera à itérer sur la valeur du coefficient k_{var} en commençant par considérer une valeur initiale $k_{var}=k_{var}^{A}=1.0$.

L'algorithme déterministe de dimensionnement à l'ELS Caractéristique (§ 1.3.1) donnera alors :

- Le diagramme de contraintes élastiques régissant la section à l'équilibre (incluant comme information la profondeur de l'axe neutre x_{AN})
- Les sections d'acier supérieure $A_{s,s}$ et inférieure $A_{s,i}$ dimensionnant la section

De là, le calcul de l'ouverture des fissures repose sur la méthode détaillée au niveau du §7.3.4 de l'EC2 ; en particulier, le calcul par rapport au BAEL reposera également sur la même théorie (l'opérateur CALC_FERRAILLAGE renverra un message d'alarme) :

- **En fibre supérieure :**

$$w_{k,sup}=s_{rmax}\times(\varepsilon_{sm}-\varepsilon_{cm})$$

Tels que :

$$\varepsilon_{sm}-\varepsilon_{cm}=\frac{\sigma_s-k_t\times\frac{f_{ctm}}{\rho_{peff}}\times(1+\alpha_e\times\rho_{peff})}{E_s}$$

$$s_{rmax}=min(k_3\times c'+k_1k_2k_4\times(\varphi_{sup}/\rho_{peff});1{,}3\times h)$$

Où :

- σ_s représente la contrainte ressentie au droit de l'acier supérieur
- k_t représente un coefficient tenant compte de la durée du chargement appliqué. Concrètement, l'EC2 préconise de considérer k_t = 0,4 pour un chargement de longue durée et k_t = 0,6 pour un chargement de courte à durée. Il s'agit donc d'une donnée d'entrée définie par l'utilisateur
- f_{ctm} représente la résistance moyenne du béton à la traction. Conformément aux indications de l'EC2, cette résistance se déduit de la résistance caractéristique du béton à la compression comme suit :

$$f_{ctm}=\begin{matrix}0{,}30\times f_{ck}^{(2/3)},\ si\ f_{ck}\leqslant 50\ MPa\\ 2{,}12\times\ln(1+(f_{ck}+8)/10),\ si\ f_{ck}>50\ MPa\end{matrix}$$

- ρ_{peff} représente le ratio de la section d'acier ($A_{s,s}$) par rapport à l'aire du béton tendu ($A_{c,eff}$) :

$$\rho_{peff}=\frac{A_{s,s}}{A_{ceff}}$$

$$A_{ceff}=b\times h_{ceff}=1^m\times min(2{,}5c';0{,}5h;(h-x_{AN})/3)$$

- ϕ_{sup} représente le diamètre estimatif des armatures constituant le ferraillage supérieur.

NOTA : *Spécification pour le calcul des dalles par la méthode de Capra Maury (présentée au niveau du §2 de la documentation)*
Concrètement, pour la facette θ_k considérée, on a :

$$\varphi_{sup}=\varphi_{x,sup}\times\cos^2(\theta_k)+\varphi_{y,sup}\times\sin^2(\theta_k)$$

Tels que $\phi_{x,sup}$ et $\phi_{y,sup}$ représentent respectivement le diamètre estimatif des armatures supérieures suivant l'axe 'x' et suivant l'axe 'y' de la plaque. Il s'agit donc de données d'entrées définies par l'utilisateur.

- k_1, k_2, k_3 et k_4 sont définies par l'EC2 comme suit :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$k_1 = \begin{matrix} 0,8 \text{ pour les barres à haute adhérence} \\ 1,6 \text{ pour les barres ayant une surface lisse} \end{matrix}$$

O n retiendra dans CALC_FERRAILLAGE k_1 = 0,8

$$k_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2\varepsilon_1$$

Tels que ε_1 et ε_2 représentent respectivement le plus grand et le plus petit allongements relatifs en fibres extrêmes.

$$k_3 = 3,4(25/c')^{2/3} ; c' \text{ exprimé en mm}$$

$$k_4 = 0,425$$

Ainsi, si $w_{k,sup} \leqslant w_{max,sup}$, alors $COND_{sup} = VRAI$. Sinon, $COND_{sup} = FAUX$; où $w_{max,sup}$ est l'ouverture maximale des fissures autorisée en fibre supérieure de la plaque. I s'agit donc d'une donnée d'entrée définie par l'utilisateur.

- **En fibre inférieure, idem :**

$$w_{k,inf} = s_{rmax} \times (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$$

Tels que :

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \times \frac{f_{ctm}}{\rho_{peff}} \times (1 + \alpha_e \times \rho_{peff})}{E_s}$$

$$s_{rmax} = min(k_3 \times c + k_1 k_2 k_4 \times (\varphi_{inf}/\rho_{peff}) ; 1,3 \times h)$$

Où :
- σ_s représente la contrainte ressentie au droit de l'acier inférieur
- k_t (IDEM)
- f_{ctm} (IDEM)
- ρ_{peff} représente le ratio de la section d'acier ($A_{s,i}$) par rapport à l'aire du béton tendu ($A_{c,eff}$) :

$$\rho_{peff} = \frac{A_{s,i}}{A_{ceff}}$$

$$A_{ceff} = b \times h_{ceff} = 1^m \times min(2,5c ; 0,5h ; (h - x_{AN})/3)$$

- ϕ_{inf} représente le diamètre estimatif des armatures constituant le ferraillage inférieur.

NOTA : *Spécification pour le calcul des dalles par la méthode de Capra Maury (présentée au niveau du §2 de la documentation)*
Concrètement, pour la facette θ_k considérée, on a :

$$\varphi_{inf} = \varphi_{x,inf} \times \cos^2(\theta_k) + \varphi_{y,inf} \times \sin^2(\theta_k)$$

Tels que $\phi_{x,inf}$ et $\phi_{y,inf}$ représentent respectivement le diamètre estimatif des armatures inférieures suivant l'axe 'x' et suivant l'axe 'y' de la plaque. Il s'agit donc de données d'entrées définies par l'utilisateur.

- k_1 , k_2 , k_3 et k_4 sont définies par l'EC2 comme suit :
k_1 , k_2 et k_4 (IDEM)

$$k_3 = 3,4(25/c)^{2/3} ; c \text{ exprimé en mm}$$

Ainsi, si $w_{k,inf} \leqslant w_{max,inf}$, alors $COND_{inf} = VRAI$. Sinon, $COND_{inf} = FAUX$; où $w_{max,inf}$ est l'ouverture maximale des fissures autorisée en fibre inférieure de la plaque. I s'agit donc d'une donnée d'entrée définie par l'utilisateur.

A insi, si $COND_{sup} = VRAI$ et $COND_{inf} = VRAI$,

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

alors $COND_{\text{fiss}}(k_{var}^{A})=VRAI$; sinon $COND_{\text{fiss}}(k_{var}^{A})=FAUX$.

Dans le cas où $COND_{\text{fiss}}(k_{var}^{A})=VRAI$, alors l'algorithme s'arrête ; sinon (c'est-à-dire qu'au moins une des ouvertures des fissures en fibres extrêmes dépasse le seuil maximal autorisé) on relance le calcul avec $k_{var}=k_{var}^{B}=0,5$. Tant que $COND_{\text{fiss}}(k_{var}^{B})=FAUX$, on relance le calcul avec $k_{var}^{B}=k_{var}^{B}/2$ jusqu'à ce que l'on obtienne $COND_{\text{fiss}}(k_{var}^{B})=VRAI$. De là, on recherche par dichotomie (en faisant varier k_{var} entre les bornes k_{var}^{A} et k_{var}^{B}) la valeur du coefficient k_{var}^{F} faisant saturer l'un des deux critères de limitation de fissuration ; il s'agira de la solution dimensionnante à l'ELS QP.

1.4.2 Calcul du ferraillage longitudinal en flexion déviée

Dans la présente partie, la section est soumise à la fois à un moment fléchissant suivant l'axe Y et à un autre suivant l'axe Z, ainsi qu'à un effort normal (positif en compression).

Similairement au cas à l'ELU (§1.2.2), Il s'agira d'appliquer une méthode de dimensionnement 'itérative' (et donc non déterministe), basée sur le principe de vérification de l'inéquation de Bresler développée par Bresler, telle que présentée au niveau du §5.8.9 de l'Eurocode 2. Cette méthode permettra ainsi d'étudier séparément, et de façon parfaitement découplée, les deux flexions composées sollicitant la section, la première (N,M_y) suivant l'axe principal d'inertie Y et la seconde (N,M_z) suivant le second axe principal d'inertie, Z. Une fois les ferraillages obtenus à l'issu des calculs de dimensionnement vis-à-vis de ces deux flexions composées (à savoir le quadruplet $A_{sy,sup}/A_{sy,inf}/A_{sz,sup}/A_{sz,inf}$), la méthode de dimensionnement en flexion déviée consiste alors à vérifier l'inéquation suivante :

$$\left(\frac{M_y}{M_{Ry}}\right)^{a}+\left(\frac{M_z}{M_{Rz}}\right)^{a}\leq 1$$

Où les moments M_{Ry} et M_{Rz} sont les moments résistants en flexion composée, sous l'effort normal agissant N , de la section ferraillée respectivement suivant l'axe Y (c'est-à-dire avec le couple $A_{sy,sup}/A_{sy,inf}$) et suivant l'axe Z (c'est-à-dire avec le couple $A_{sz,sup}/A_{sz,inf}$). Ces moments résistants se déduisent des diagrammes d'interaction '2D' suivant Y et Z respectivement.

L'exposant a se calcule en fonction du rapport entre l'effort normal N sollicitant la section, et l'effort normal résistant maximal, à savoir $N_R=A_c\cdot f_c+A_s\cdot f_s$, tel que :

$f_c=\sigma_{c,\lim,FL}$

$f_s=k_{var}^{F}\times f_{yk}$

Le reste du processus de dimensionnement est similaire à celui étayé à l'ELU (voir §1.2.2)

1.4.3 Calcul du ferraillage transversal

On commence par définir le taux d'armatures transversales conformément à l'expression suivante :

$$\rho_w=\frac{A_{sw}}{s\,b_w\sin(\alpha)}$$

Où:

- A_{sw} désigne l'aire de la section totale (par plan de ferraillage) des armatures transversales.
- s désigne l'espacement longitudinal entre les cadres d'armatures transversales.
- b_w désigne la plus petite largeur de la zone tendue de la section transversale de l'élément.
- α désigne l'angle d'inclinaison des cadres d'armatures transversales par rapport à l'axe longitudinal de l'élément.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Par ailleurs, on fera pour le moment les hypothèses ci-dessous :

- les cadres seront supposés droits, ce qui revient à poser $\alpha = 90°$, soit $\sin(\alpha) = 1$.
- les éléments considérés sont de section rectangulaire, et donc $b_w = b$.

La section transversale est ainsi soumise à un effort tranchant V_{qp}, ainsi qu'à un moment de torsion T_{qp}.

Par défaut, aucun ferraillage transversal n'est requis tant que le couple de sollicitations précédent ne dépasse pas les capacités de résistance du béton seul au cisaillement ; cela revient donc à vérifier l'inéquation suivante :

$$\frac{V_{qp}}{V_{Rd,c}} + \frac{T_{qp}}{T_{Rd,c}} \leqslant 1$$

Tels que :

- $V_{Rd,c} = [max(C_{Rd,c} k (100 \rho_l f_{ck})^{1/3}; v_{min}) + k_1 \sigma_{cp}] \times b_w d$
- $T_{Rd,c} = 2 f_{ctd} t_k A_k$

O ù :

- f_{ck} en MPa
- $C_{Rd,c} = 0{,}18/\gamma_c$; $\gamma_c = f_{ck}/\sigma_{c,0}$, tel que $\sigma_{c,0} = \sigma_{c,\lim,FL}$
- $k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leqslant 2{,}0$, avec 'd' en mm
- $\rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w d} \leqslant 0{,}02$, où A_{sl} représente la section des armatures tendues (résultant du calcul en flexion composée)
- $v_{min} = {}^{0{,}053}\!/_{\gamma_c} \times k^{1{,}5} \times f_{ck}^{0{,}5}$, dans le cas des poutres
- $k_1 = 0{,}15$
- $\sigma_{cp} = \frac{N_{qp}}{b_w h} \geqslant 0$, où N_{qp} représente l'effort normal (positif en compression)
- $f_{ctd} = f_{ctk}/\gamma_c$, où f_{ctk} représente la résistance du béton à la traction, tel que $f_{ctk} = \begin{matrix} 0{,}7 \times 0{,}3 \times f_{ck}^{2/3}, & \text{si } f_{ck} \leqslant 50\,MPa \\ 0{,}7 \times 2{,}12 \times \log(1 + 0{,}1 \times (f_{ck} + 8)), & \text{si } f_{ck} \geqslant 50\,MPa \end{matrix}$
- $t_k = max[b_w h/(2 \times (b_w + h)); 2 c_{\sup}; 2 c_{\inf}]$
- $A_k = (b_w - t_k) \times (h - t_k)$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire dans le cas où le membre gauche de l'inéquation précédente est supérieur à 1, le dimensionnement du ferraillage transversal au cisaillement est basé sur un modèle en treillis de Ritter-Mörsh formé par un couplage entre bielles de compressions – qui représentent la part du béton résistant au cisaillement – et les cadres du ferraillage transversal.

- α est l'angle entre les armatures d'effort tranchant et la fibre moyenne de l'élément. (Pour rappel, on considérera dans l'algorithme $\alpha = 90°$).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

• θ est l'angle entre la bielle de compression et la fibre moyenne de l'élément. Conformément aux réglementations de l'Eurocode 2, la valeur de θ devra respecter le domaine $1 \leq cot\theta \leq 2,5$.

• b_w est la plus petite largeur de la section comprise entre la membrure tendue et la membrure comprimée. Dans l'algorithme de calcul, on prendra donc $b_w = b$.

• z est le bras de levier des forces internes, pour un élément de hauteur constante, correspondant au moment fléchissant dans l'élément considéré. Pour les calculs à l'effort tranchant d'une section de béton armé partiellement comprimée (axe neutre au sein de la section), l'algorithme de calcul considérera comme valeur :

$$z = (F_{s,s} z_1 + F_{cc} z_1) / (F_{s,s} + F_{cc})$$

Tels que $z_1 = h - c_{\inf} - c_{\sup}$ représente le bras de levier des armatures comprimées supérieures par rapport au centre de gravité des armatures tendues inférieures, et $z_2 = (1 - \xi/3) \times d$ représente le bras de levier du centre de gravité de la hauteur de béton comprimée par rapport au centre de gravité des armatures tendues inférieures. $F_{s,s} = A_{s,s} \sigma_{s,s}$ représente l'effort repris par les armatures comprimées et $F_{cc} = 0,5 \times \sigma_{c,\sup} \xi d b_w$ représente l'effort repris par la hauteur de béton comprimé.

Pour les autres cas, on peut adopter la valeur approchée $z = 0,9 d$

Le treillis ainsi modélisé résistera à l'effort tranchant sollicitant, diagonale par diagonale, comme suit :

• d'une part, la bielle de compression (diagonale comprimée), dont la résistance est donnée par :

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} b_w z \nu_1 \sigma_{c,0} \frac{(\cot\theta + \cot\alpha)}{1 + \cot^2\theta}$$, vis-à-vis de l'effort tranchant

$$T_{Rd,max} = 2 \alpha_{cw} \nu_1 \sigma_{c,0} A_k t_k \sin\theta \cos\theta$$, vis-à-vis du moment de torsion

Il faudra donc vérifier, pour l'inclinaison de bielle considérée, l'inéquation ci-dessous :

$$\frac{V_{qp}}{V_{Rd,max}} + \frac{T_{qp}}{T_{Rd,max}} \leqslant 1$$

• d'autre part, le cadre (diagonale tendu / tirant), dont la résistance est donnée par :

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z \sigma_{s,0} (\cot\theta + \cot\alpha) \sin\alpha$$

Où :

• $\sigma_{s,\lim} = k_{var}^F \times f_{yk}$ est la contrainte limite autorisée dans l'acier pour le dimensionnement en flexion composée à l'ELS Caractéristique

• $\nu_1 = \nu = 0,6 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$, avec f_{ck} en MPa, est un coefficient de réduction de la résistance du béton fissuré à l'effort tranchant

• α_{cw} est un coefficient tenant compte de l'état de contrainte dans la membrure comprimée, et dont la valeur varie en fonction de la contrainte de compression moyenne σ_{cp} reprise par le béton comprimé, tel que :

$\alpha_{cw} = 1$ pour les structures non précontraintes et non soumises à un effort de compression

$\alpha_{cw} = 1 + \frac{\sigma_{cp}}{\sigma_{c,0}}$, pour $0 < \sigma_{cp} \leq 0.25 \sigma_{c,0}$

$\alpha_{cw} = 1.25$, pour $0.25 \sigma_{c,0} < \sigma_{cp} \leq 0.5 \sigma_{c,0}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\alpha_{cw}=2.5\left(1-\frac{\sigma_{cp}}{\sigma_{c,0}}\right)$, pour $0.5\sigma_{c,0}<\sigma_{cp}\leq\sigma_{c,0}$

Le principe de dimensionnement du ferraillage transversal consiste alors à égaliser le terme $V_{Rd,s}$ à l'effort de cisaillement sollicitant la section, donné comme suit :

$$V_{Rd,s}=V_{qp}+\left(T_{qp}/A_k\right)\times\left(h-t_k\right)$$

Il s'agira alors de choisir la valeur de θ permettant de minimiser la densité A_{sw}/s, tout en vérifiant l'inéquation de non écrasement des bielles.

1.4.4 Impact des efforts de cisaillement sur le ferraillage longitudinal

Conformément aux spécifications de l'Eurocode 2, et dans le cas où un ferraillage transversal est requis à la suite du calcul effectué dans le paragraphe précédent, l'effort de traction supplémentaire ΔF_{td} induit dans les armatures longitudinales et dû à l'effort tranchant V_{qp} et au moment de torsion T_{qp}, s'écrit comme suit :

$$\Delta F_{td}=V_{qp}\cot\theta+T_{qp}\cot\theta\times\left(u_k/2A_k\right)$$

Ou θ désigne l'angle d'inclinaison des bielles du treillis, tel que retenu dans le dimensionnement précédent. La version actuelle de l'opérateur `CALC_FERRAILLAGE` de code_aster offre la possibilité de prendre en compte cet effort de traction supplémentaire ; pour ce fait, il suffit de prendre `EPURE_CISA = 'OUI'` .

1.5 Prise en compte du ferraillage minimum

1.5.1 Ferraillage longitudinal

Il convient que la section d'armatures longitudinales tendues ne soit pas inférieure à $A_{s,min}$, conformément aux spécifications de l'EC2 au niveau du §9.2.1.1 :

$$A_{s,min}=0{,}26\frac{f_{ctm}}{f_{yk}}b_t d\geqslant 0{,}0013 b_t d$$

Où:

- b_t désigne la largeur moyenne de la zone tendue
- f_{ctm} désigne la résistance moyenne du béton de classe f_{ck} à la traction

1.5.2 Ferraillage transversal

Le taux d'armatures d'effort tranchant est rappelé par l'expression suivante :

$$\rho_w=A_{sw}/\left(s.b_w.\sin\alpha\right)$$

- ρ_w est le taux d'armatures d'effort tranchant
- A_{sw} est l'aire de la section des armatures d'effort tranchant régnant sur la longueur s
- s est l'espacement des armatures d'effort tranchant, mesuré le long de l'axe longitudinal de l'élément
- b_w est la largeur de l'âme de l'élément
- α est l'angle entre les armatures d'effort tranchant et l'axe longitudinal

Il convient ainsi de vérifier, dans le cas des poutres, le taux de ferraillage transversal minimal ci-dessous:

$$\rho_{w,min}=0{,}08\sqrt{f_{ck}}/f_{yk}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.6 Propriétés relatives au champ de ferraillage de sortie

La version actuelle de l'opérateur CALC_FERRAILLAGE propose également le calcul des grandeurs ci-dessous, à l'issu de la détermination du champ de ferraillage requis par l'élément :

1.6.1 Calcul de la densité volumique d'armature

A l'issue des calculs à $ELU/ELS/ELSQP$, les sections d'acier de flexion $A_{sy,s}$, $A_{sy,i}$, $A_{sz,s}$, $A_{sz,i}$ et l a section d'acier d'effort tranchant A_{SW} sont exploitées pour calculer la densité volumique d'armature δ_{BA} en kg/m^3 si elles sont exprimées en m^2/m pour les aciers de flexion en m^2/m^2 pour les aciers d'effort tranchant suivant la formule suivante où ρ_{acier} est la masse volumique des aciers en kg/m^3 .

$$\delta_{BA}=\frac{(A_{sy,s}+A_{sy,i}+A_{sz,s}+A_{sz,i})+A_{SW}*h}{h}*\rho_{acier}$$

1.6.2 Calcul de l'indicateur de complexité de constructibilité

Un indicateur de complexité visant à traduire la difficulté de mise en œuvre du ferraillage sur le terrain est calculé selon la formule suivante :

$$I_{c,i}=\frac{\alpha_{reinf}\cdot\frac{\rho_i}{\rho_{critic}}+\alpha_{shear}\cdot\frac{A_{sw,i}}{A_{sw,critic}}+\alpha_{stirrups}\cdot\frac{A_{sw,i}}{A_{sw,critic}}\cdot\frac{h_{eff,i}}{l_{crit}}}{\alpha_{reinf}+\alpha_{shear}+\alpha_{stirrups}}$$

Avec :

α_{reinf} est un coefficient de pondération du ration de densité d'acier par mètre cube de béton ;

ρ_i est la densité volumique totale d'acier pour l'élément i calculée précédemment δ_{BA} ;

ρ_{critic} est la densité volumique d'acier critique pour l'élément i ;

α_{shear} est un coefficient de pondération du ration de densité d'acier d'effort tranchant ;

$A_{sw,i}$ est la densité d'acier d'effort tranchant pour l'élément i ;

$A_{sw,critic}$ est la densité de ferraillage d'effort tranchant critique ;

$\alpha_{stirrups}$ est un coefficient de pondération du ration de longueur des épingles d'acier d'effort tranchant ;

$h_{eff,i}=h-c-c'$ est la hauteur efficace considérée pour l'élément i ;

l_{crit} est la longueur critique des épingles d'aciers d'effort tranchant.

α_{reinf} , α_{shear} et $\alpha_{stirrups}$ ont pour valeur par défaut 1 , la densité volumique d'acier critique ρ_{critic} à pour valeur par défaut $150\,kg/m^3$, a densité de ferraillage d'effort tranchant critique $A_{sw,critic}$ a pour valeur par défaut $60\,cm^2/m^2$ et la longueur critique des épingles d'aciers d'effort tranchant a pour valeur par défaut $1\,m$.

Avec de telles valeurs, on considère que la transition entre constructible et inconstructible est donné pour des valeurs de l_c entre 1 et $1{,}2$. Au-delà de $l_c=2$ on considère que la mise en œuvre du ferraillage est très compliqué et au-delà de $l_c=3$ on considère que la mise en œuvre du ferraillage est impossible.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Calcul du ferraillage des plaques

Le calcul du ferraillage des plaques (éléments '2D') peut se faire suivant deux méthodes distinctes : la méthode de Capra-Maury (qui est une généralisation du calcul '1D' à un nombre fini 'N' de facettes fictives, tel qu'on l'explique au niveau du §2.1) ou la méthode Sandwich (conformément à l'Annexe LL de l'EN-1992-2).

2.1 Méthode de Capra et Maury

2.1.1 Calcul du ferraillage longitudinal

Le principe de la méthode de Capra-Maury consiste à assimiler l'étude d'une plaque à un problème équivalent de ferraillage de poutres, et ce en considérant par le biais de coupures l'équilibre successif des différentes facettes obtenues – chaque facette étant sollicitée par un torseur d'efforts réduits « 1D » et ferraillé par conséquent suivant la théorie des poutres.

En ce sens, chaque facette est définie par son vecteur normal $\vec{n}(\theta)$ faisant un angle θ avec l'axe local x de la plaque, et elle est soumise aux efforts obtenus en écrivant l'équilibre du prisme conséquent et illustré dans la figure ci-dessous.

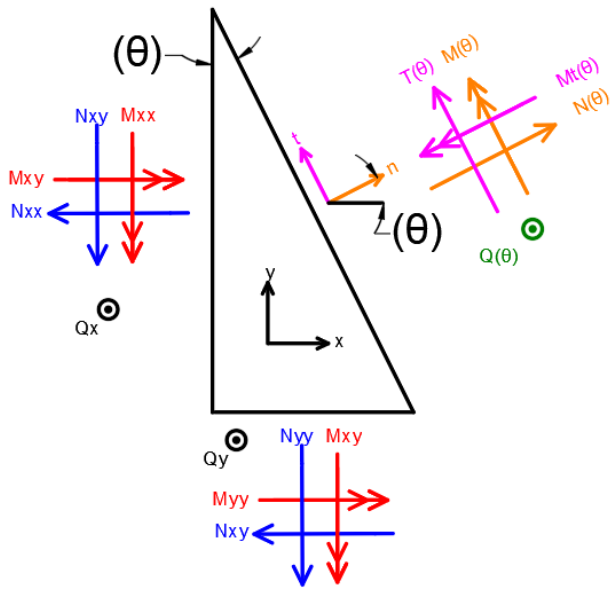


Figure 16 . Équilibre de coin et passage des efforts "2D" aux efforts "1D"

On trouve :

$$N(\theta)=N_{xx}\times cos^2(\theta)+2\times N_{xy}\times\cos(\theta)\times\sin(\theta)+N_{yy}\times sin^2(\theta)$$
$$M(\theta)=M_{xx}\times cos^2(\theta)+2\times M_{xy}\times\cos(\theta)\times\sin(\theta)+M_{yy}\times sin^2(\theta)$$
$$T(\theta)=\frac{-1}{2}\times N_{xx}\times\sin(2\theta)+N_{xy}\times\cos(2\theta)+\frac{1}{2}\times N_{yy}\times\sin(2\theta)$$
$$M_t(\theta)=\frac{-1}{2}\times M_{xx}\times\sin(2\theta)+M_{xy}\times\cos(2\theta)+\frac{1}{2}\times M_{yy}\times\sin(2\theta)$$
$$Q(\theta)=-Q_x\times\cos(\theta)-Q_y\times\sin(\theta)$$

Tels que :

- $N(\theta)\,et\,M(\theta)$ ➔ Sollicitent la poutre fictive en Flexion Composée (FC)
- $T(\theta)\,et\,M_t(\theta)$ ➔ Sollicitent la poutre fictive en Cisaillement Membranaire (CISA)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- $Q(\theta)$ ➔ Sollicite la poutre fictive en Cisaillement Hors-Plan (CISHP)

Telle qu'elle est utilisée dans sa version courante, la méthode de Capra Maury 'classique' couvrirait uniquement la vérification de l'effort normal $N(\theta)$ et du moment de flexion $M(\theta)$ comme efforts membranaires, les sollicitations $T(\theta) et M_t(\theta)$ étant négligés .

En ce sens, pour θ allant de 0 à 360°, on se ramènerait au dimensionnement d'une poutre fictive en flexion composée, tel qu'on déterminera les sections d'acier supérieure $A_{s,s}(\theta)$ et inférieure $A_{s,i}(\theta)$ requis pour l'équilibre, conformément aux principes de dimensionnement des poutres tels qu'explicités au niveau du §1 de la documentation.

Ce ferraillage est « fictif » et il est ressenti par la projection des lits de ferraillage réellement disposés dans la plaque, à savoir la projection des sections d'acier suivant les axes x et y respectivement, et suivant la face supérieure et inférieure de la dalle.

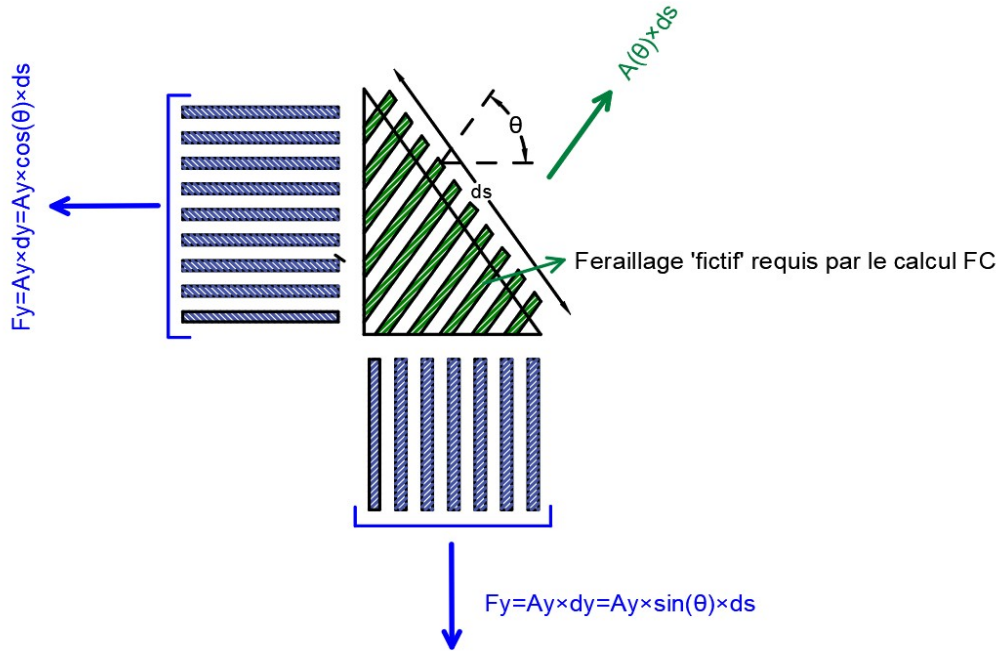


Figure 17 . Projection des lits de ferraillage et constitution du ferraillage fictif par facette considérée

Ainsi, en se rapportant au ferraillage 'réel' de la dalle/voile à savoir le quadruplet $(A_{sx,s}, A_{sy,s}, A_{sx,i}, A_{sy,i}\ en cm^2/ml)$, on devra vérifier, conformément à la figure précédente, les deux inéquations ci-dessous :

Pour la face supérieure : $A_{sx,s} \times \cos^2\theta + A_{sy,s} \times \sin^2\theta \geq A_{s,s}(\theta)$

Pour la face inférieure : $A_{sx,i} \times \cos^2\theta + A_{sy,i} \times \sin^2\theta \geq A_{s,i}(\theta)$

On se limite dans ce qui suit, à une seule face de la section (inférieure ou supérieure), tel qu'on cherche à minimiser la somme ($(A_{sx} + A_{sy})$ tout en vérifiant à ce que les deux termes restent bien évidemment positifs. Pour cela, on passe par un raisonnement graphique et on trace dans le repère orthonormé (A_{sx},A_{sy}), pour chaque angle θ considéré, la droite d'équation :

$$(d_\theta) : A_{sy} = \frac{A_s(\theta)}{\sin^2(\theta)} - A_{sx} \times cotn^2(\theta)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'ensemble des droites ainsi tracées, délimiterait un domaine de validation construit par le biais des intersections de ces droites, et garantissant le respect des inéquations données précédemment pour chaque valeur de θ considérée – à noter bien entendu, qu'on aurait deux ensembles de droites distincts : un pour l'équilibre en nappe supérieure et un autre pour l'équilibre en nappe inférieure.

Sachant que pour une droite donnée, son domaine de validité est la partie du repère situé au-dessus de la droite, l'ensemble des droites tracées constituerait par conséquent un polygone convexe « ouvert » vers le haut, dont les sommets ne sont autres que les intersections des différentes droites (d_θ). Ces derniers points sont ainsi par conséquent, des couples de ferraillage $(A_x ; A_y)_i$ solutions à l'équilibre global de la nappe supérieure/inférieure. En particulier, en vue de la convexité du domaine de validation construit, ces points conduiraient au ferraillage minimum (c'est-à-dire aux solutions donnant les plus petites sommes $(A_x + A_y)$) de l'ensemble du domaine de validité, et on retiendra finalement le point permettant de minimiser la distance 'd' entre sa projection orthogonale sur la 1 ère bissectrice du plan et l'origine du repère (cf. à la figure ci-dessous).

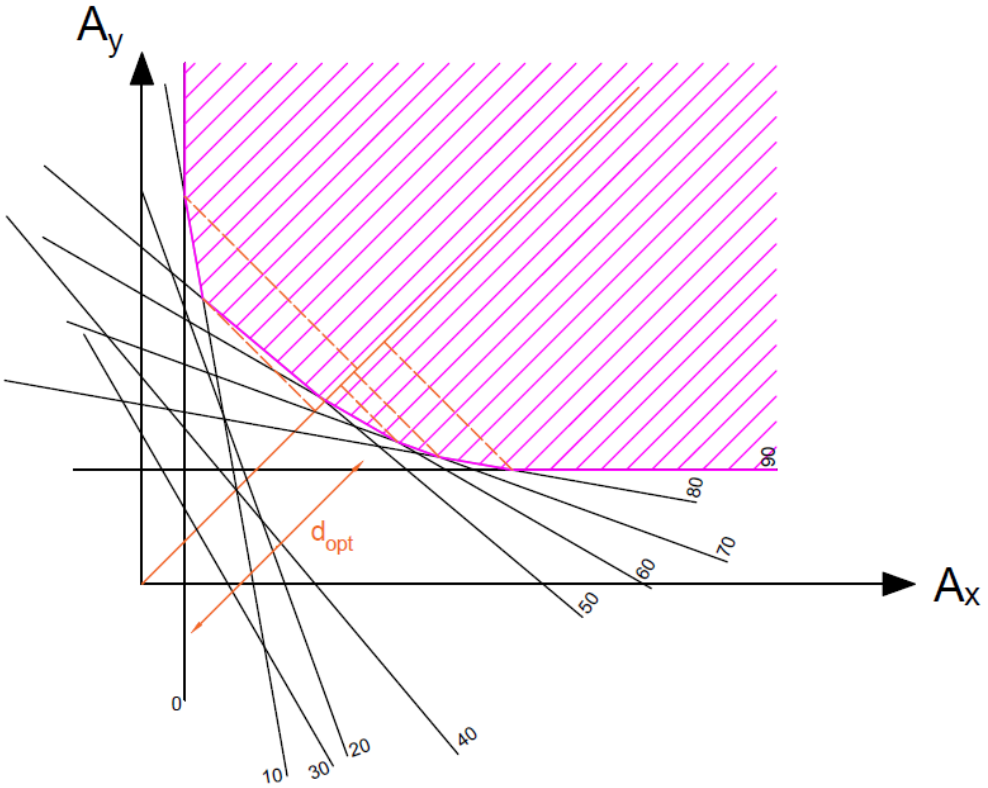


Figure 18 . Construction du domaine de validation par nappe (Sup et Inf)

Concrètement dans l'algorithme, on définit un ensemble discret de facettes centrées au point de calcul, dont la normale tourne dans le plan tangent au feuillet moyen. L'angle θ des facettes est discrétisé régulièrement de $-90°$ à $+90°$, compte tenu de la symétrie des inéquations d'équilibre.

2.1.2 Considération du Cisaillement Hors-Plan

Il s'agit dans cette partie de la reprise des efforts de cisaillement transverse des facettes, à savoir $Q(\theta)$ avec :

$$Q(\theta) = -Q_x \times \cos(\theta) - Q_y \times \sin(\theta)$$

La reprise de $Q(\theta)$ par chacune des 'poutres fictives' correspond à une étude classique d'effort tranchant transversal d'une poutre (§6.2 de l'EN-1992-1).

Suivant les clauses et formules développées dans ce paragraphe de l'Eurocode 2, on calculera un ferraillage transversal $A_{sv,CISHP}(\theta)$ (dans le cas où $Q(\theta) > V_{Rd,c,z}(\theta)$), en considérant :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Hauteur de la poutre : $h=e$, ' e' étant l'épaisseur de la plaque
- Largeur de la poutre : $b=1m$
- Hauteur utile de calcul : $d=\begin{cases} h-c_{\inf} si\ M(\theta)>0 \\ h-c_{\sup} si\ M(\theta)<0 \end{cases}$
- Bras de levier de calcul : $z=\left[\left[A_{s,comp}\times\sigma_{As,comp}\right]\times z_1+\left[F_{cc}\right]\times z_2\right]/\left[A_{s,comp}\times\sigma_{As,comp}+F_{cc}\right]$

  Où
  - $A_{s,comp}$: désigne la section d'acier comprimé (si requise par le calcul en Flexion Composée)
  - $\sigma_{As,comp}$: désigne la contrainte ressentie au droit de l'acier comprimé (tel que donné par le calcul en FC et en fonction du diagramme de déformation associé)
  - $z_1=\begin{cases} d-c_{\sup} si\ M(\theta)>0 \\ d-c_{\inf} si\ M(\theta)<0 \end{cases}$: désigne le bras de levier de l'acier de compression par rapport au centre de gravité de l'acier de traction (ferraillage principal)
  - F_{cc} : désigne l'effort total repris par le béton comprimé (tel que donné par le calcul en FC et en fonction du diagramme de déformation associé)
  - z_2 : désigne le bras de levier de l'effort F_{cc} par rapport au centre de gravité de l'acier de traction (ferraillage principal)

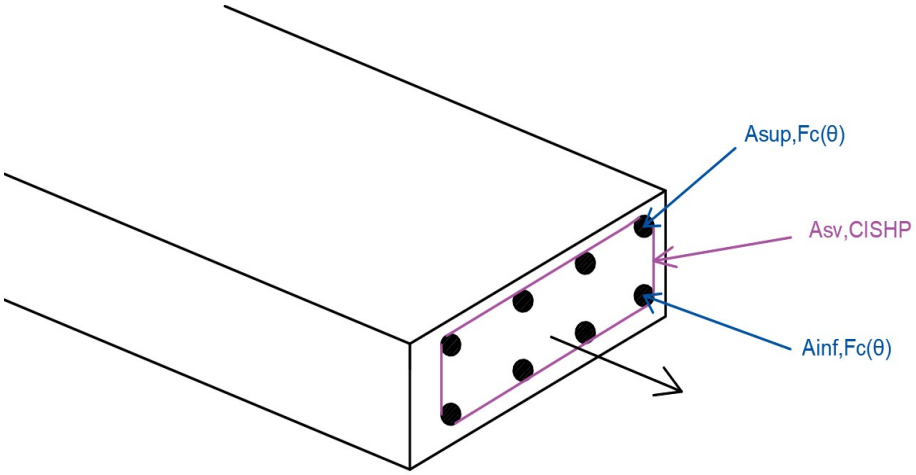


Figure 19 . Calcul du ferraillage transversal pour la reprise du Cisaillement Hors-Plan (CISHP)

De là, on se rapporte au ferraillage transversal 'réel' de la dalle/ voile (à savoir le couple de ferraillage $\left(A_{sv,x};A_{sv,y}\right)$ exprimés en cm ^{2} /m/m).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

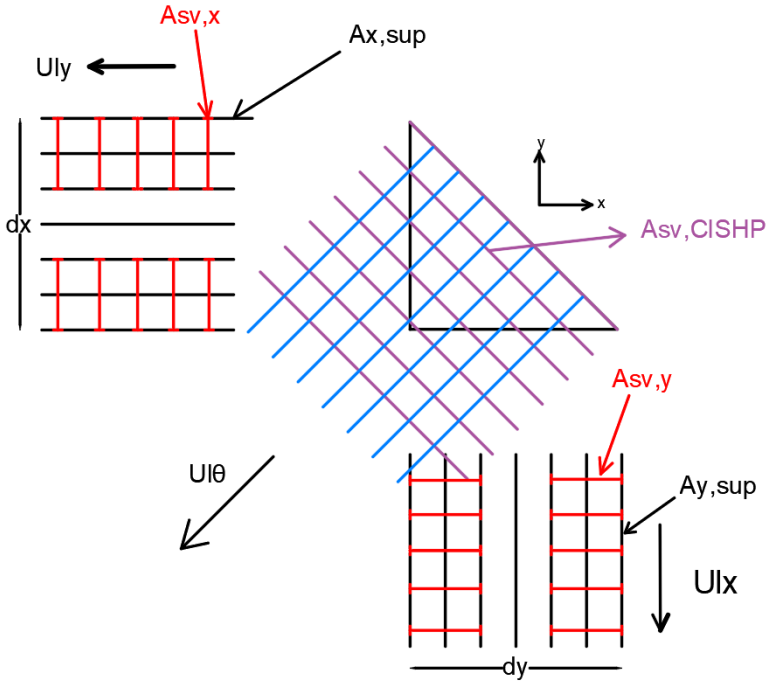


Figure 20 . Équilibre global et calcul du ferraillage au cisaillement hors-plan

Ainsi, suivant un raisonnement similaire à celui adopté pour la détermination du ferraillage de membrane, il s'agira de vérifier pour chaque orientation de facette considérée l'inéquation ci-dessous :

$$A_{sv,x} \times \cos^2\theta + A_{sv,y} \times \sin^2\theta \geq A_{sv,CISHP}(\theta)$$

La résolution s'effectue graphiquement, de façon identique aux explications explicitées au niveau du § 2.1.1.

2.2 Méthode Sandwich

2.2.1 Principe de la méthode

La méthode Sandwich – initiée dans la littérature par Gupta et Marti et dont le principe a été introduit (mais de façon incomplète et peu détaillée) au niveau de l'Annexe LL de l'EN-1992-2 en 2004 – est une méthode qui permet de valoriser le caractère 2D d'un élément de plaque, en prenant en compte la rigidité bidirectionnelle de l'élément ainsi que la cinématique de plaque (ce dernier point étant appuyé par l'étape supplémentaire de la remontée d'échelle qu'on introduira ultérieurement dans la note).
Cette méthode divise la plaque en 3 couches (d'où son nom) :

- Les couches supérieure et inférieure (d'épaisseurs respectives **t sup** et **t inf**) résistent aux sollicitations membranaires (effort normaux, moment de flexion, cisaillement membranaire et torsion). Elles reprennent donc les efforts $N_{xx}, N_{yy} et N_{xy}$ ainsi que les efforts $M_{xx}, M_{yy} et M_{xy}$.

- La couche intermédiaire ou le noyau de béton (d'épaisseur **t c**) résiste au cisaillement hors plan. Elle reprend donc les efforts $Q_x et Q_y$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

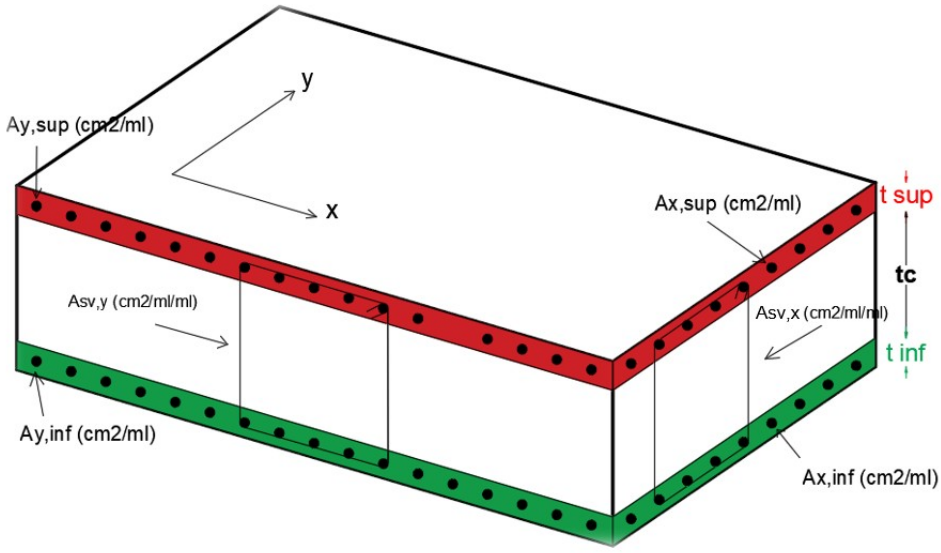


Figure 21 . Présentation du modèle "Sandwich" (division de la plaque en 3 couches)

Ainsi, la première étape de la méthode est de déterminer , par le biais d'un calcul itératif, les épaisseurs optimales des deux couches périphériques et d'en déduire alors par le biais des équations de l'équilibre membranaire, le ferraillage de membrane (à savoir le quadruplet ($A_{x,sup}, A_{y,sup}, A_{x,inf}, A_{y,inf}$) en cm^2/ml). Dans une seconde étape, l'épaisseur de la couche intermédiaire pourra être déduite ($t_c = h - t_{sup} - t_{inf}$) et le ferraillage transversal (à savoir le couple ($A_{sv,x}, A_{sv,y}$) en $cm^2/ml/ml$) sera calculé suivant les règles classiques de dimensionnement à l'effort tranchant des poutres telles qu'élaborées dans le §6.2 de l'E N-1992-1.

2.2.2 Détermination de l'équilibre membranaire

On commence par calculer les efforts 'ressentis' aux centres de gravité des nappes d'armatures supérieure (SUP) et inférieure (INF).
Ainsi, conformément aux notations qui suivent, on aura :

- Pour la nappe supérieure :

$$N_{xx,sup} = N_{xx} \times \left(\frac{z - y_{sup}}{z} \right) + \frac{M_{xx}}{z} + \frac{1}{2} \times D_{nxx}$$
$$N_{yy,sup} = N_{yy} \times \left(\frac{z - y_{sup}}{z} \right) + \frac{M_{yy}}{z} + \frac{1}{2} \times D_{nyy}$$
$$N_{xy,sup} = N_{xy} \times \left(\frac{z - y_{sup}}{z} \right) + \frac{M_{xy}}{z} + \frac{1}{2} \times D_{nxy}$$

- Pour la nappe inférieure :

$$N_{xx,inf} = N_{xx} \times \left(\frac{z - y_{inf}}{z} \right) - \frac{M_{xx}}{z} + \frac{1}{2} \times D_{nxx}$$
$$N_{yy,inf} = N_{yy} \times \left(\frac{z - y_{inf}}{z} \right) - \frac{M_{yy}}{z} + \frac{1}{2} \times D_{nyy}$$
$$N_{xy,inf} = N_{xy} \times \left(\frac{z - y_{inf}}{z} \right) - \frac{M_{xy}}{z} + \frac{1}{2} \times D_{nxy}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

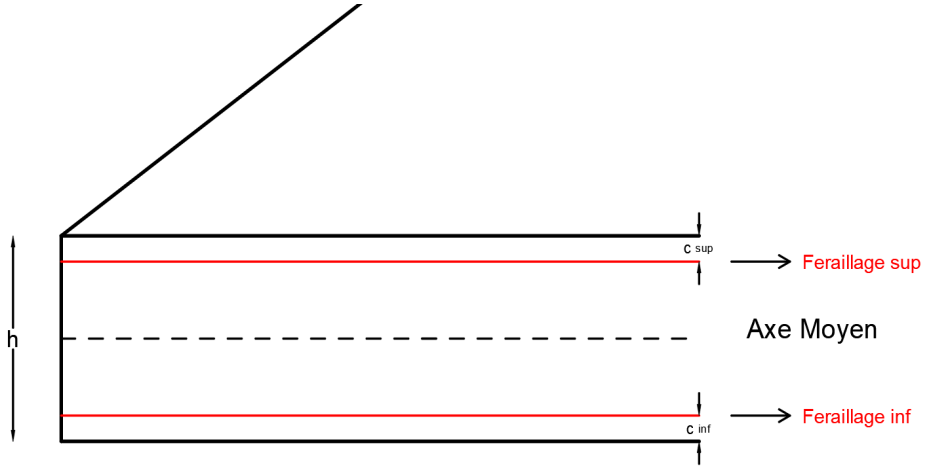


Figure 2 2 . Répartition des efforts membranaires entre les nappes SUP et INF

Tels qu'on ait :

- Excentricité de la nappe SUP : $y_{sup}=h/2-c_{sup}$
- Excentricité de la nappe INF : $y_{inf}=h/2-c_{inf}$
- Bras de levier interne des efforts : $z=y_{sup}+y_{inf}$
- Les efforts **D nxx** , **D nyy** et **D nxy** sont les efforts de traction dus au treillis de Ritter-Morsch pour la reprise du cisaillement transverse dans la couche intermédiaire (au début de l'algorithme, ces efforts sont nuls, puis on itérera).

On évalue alors l' état de chaque nappe d'acier (on donne à titre indicatif le raisonnement pour le nappe SUP) :

- Si $N_{xx,sup}\geq-\left|N_{xy,sup}\right|$ et $N_{yy,sup}\geq-\left|N_{xy,sup}\right|$, alors CAS_SUP = 1
- S inon, si $N_{xx,sup}<-\left|N_{xy,sup}\right|$ et $N_{yy,sup}>N_{xy,sup}^2/N_{xx,sup}$, alors CAS_SUP = 2
- Sinon, si $N_{xx,sup}<-\left|N_{xy,sup}\right|$ et $N_{yy,sup}\leq N_{xy,sup}^2/N_{xx,sup}$, alors CAS_SUP = 3
- Sinon, si $N_{yy,sup}<-\left|N_{xy,sup}\right|$ et $N_{xx,sup}>N_{xy,sup}^2/N_{yy,sup}$, alors CAS_SUP = 3
- Sinon, si $N_{yy,sup}<-\left|N_{xy,sup}\right|$ et $N_{xx,sup}\leq N_{xy,sup}^2/N_{yy,sup}$, alors CAS_SUP = 4
- Sinon, alors CAS_SUP = 4

En ce sens, on aura les cas de figure suivants :

- CAS_SUP = 1 ➔ ferraillage de traction requis suivant les directions x et y de la nappe SUP
- CAS_SUP = 2 ➔ ferraillage de traction requis suivant la direction y seulement de la nappe SUP
- CAS_SUP = 3 ➔ ferraillage de traction requis suivant la direction x seulement de la nappe SUP
- CAS_SUP = 4 ➔ pas de ferraillage de traction requis pour la nappe SUP

De là, en fonction des valeurs prises par CAS_SUP et par CAS_INF, l'algorithme de la méthode est structuré suivant 4 volets principaux tels qu'étayés ci-dessous :

- Si CAS_SUP ≠ 4 et CAS_INF ≠ 4 ➔ CAS_SAND = 1
- Sinon, si CAS_SUP ≠ 4 et CAS_INF = 4 ➔ CAS_SAND = 2
- Sinon, si CAS_SUP = 4 et CAS_INF ≠ 4 ➔ CAS_SAND = 3
- Sinon ➔ CAS_SAND = 4

Tels que :

- **CAS_SAND = 1** ➔ ferraillage de traction requis en nappes SUP et INF

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- **CAS_SAND = 2** ➔ ferraillage de traction requis en nappe SUP seulement (la couche t_{inf} étant régie par un état de compression bi-axiale)
- **CAS_SAND = 3** ➔ ferraillage de traction requis en nappe INF seulement (la couche t_{sup} étant régie par un état de compression bi-axiale)
- **CAS_SAND = 4** ➔ pas de ferraillage de traction requis (plaque entièrement comprimée)

L'idée étant alors d'écrire l'équilibre membranaire suivant le cas en question et de déterminer les épaisseurs des deux couches SUP et INF, ainsi que le ferraillage principal de membrane de la plaque.

2.2.2.1 1ère configuration : CAS_SAND = 1

Dans ce premier cas considéré, chaque couche périphérique (SUP et INF) sera caractérisée par :

- Son épaisseur ($t_{sup/inf}$)
- Deux efforts 'positifs' (traction) résistants d'acier (suivant x : n_{sx} et suivant y : n_{sy})
- Un effort 'négatif' (compression) résistant repris par une bielle de compression (n_c) dont la direction est à déterminer (angle θ formé avec l'axe « y ») ; en effet, le ferraillage de traction étant requis, on aurait au moins une contrainte principale de traction au niveau de chaque couche (et donc au plus, une seule bielle de compression par couche).

Les équations d'équilibre global membranaire s'écrivent alors comme suit :

$$N_{xx} = n_{sx,sup} + n_{sx,inf} + n_{c,sup} \times \sin^2(\theta_{sup}) + n_{c,inf} \times \sin^2(\theta_{inf}) \quad [E1]$$

$$N_{yy} = n_{sy,sup} + n_{sx,inf} + n_{c,sup} \times \cos^2(\theta_{sup}) + n_{c,inf} \times \cos^2(\theta_{inf}) \quad [E2]$$

$$N_{xy} = n_{c,sup} \times \cos(\theta_{sup}) \times \sin(\theta_{sup}) + n_{c,inf} \times \cos(\theta_{inf}) \times \sin(\theta_{inf}) \quad [E3]$$

$$M_{xx} = n_{sx,sup} \times y_{sup} - n_{sx,inf} \times y_{inf} + m_{c,sup} \times \sin^2(\theta_{sup}) - m_{c,inf} \times \sin^2(\theta_{inf}) \quad [E4]$$

$$M_{yy} = n_{sy,sup} \times y_{sup} - n_{sy,inf} \times y_{inf} + m_{c,sup} \times \cos^2(\theta_{sup}) - m_{c,inf} \times \cos^2(\theta_{inf}) \quad [E5]$$

$$M_{xy} = m_{c,sup} \times \cos(\theta_{sup}) \times \sin(\theta_{sup}) - m_{c,inf} \times \cos(\theta_{inf}) \times \cos(\theta_{inf}) \quad [E6]$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

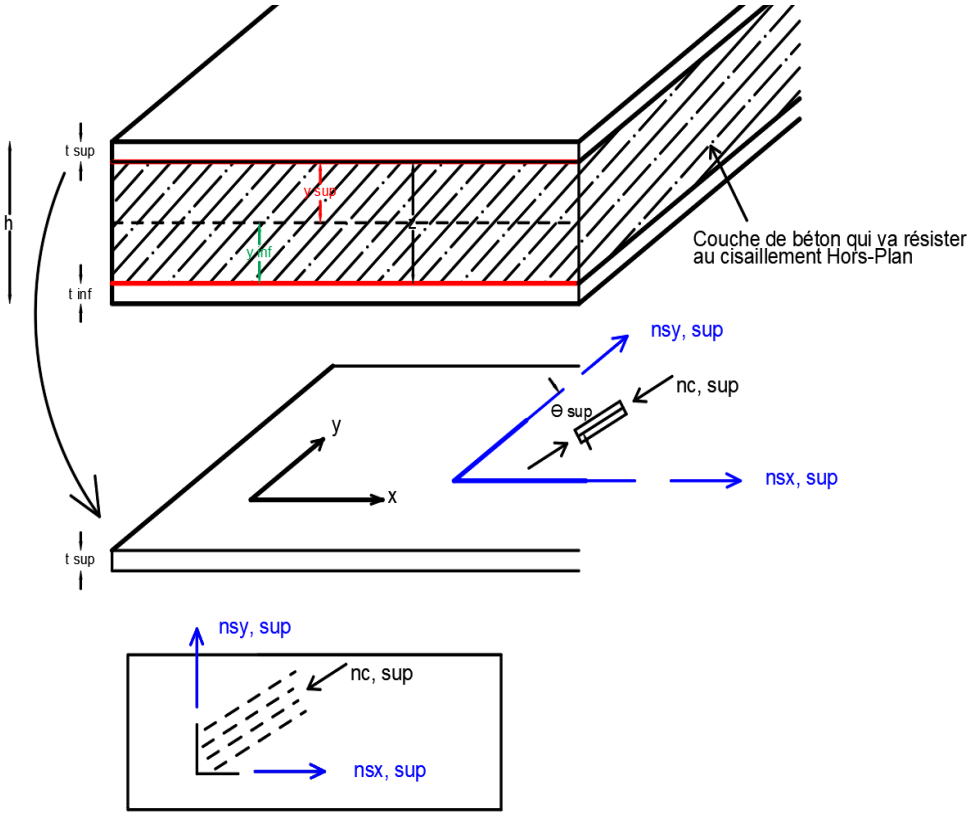


Figure 2 3 . Configuration de la dalle (efforts d'acier et orientation des bielles de béton)

On aurait ainsi, dans ce premier cas de figure :

6 équations pour 8 inconnues : θ_{sup} ; θ_{inf} ; t_{sup} ; t_{inf} ; $A_{sx,sup}$; $A_{sy,sup}$; $A_{sx,inf}$; $A_{sy,inf}$

Tels que :

$n_{sx,sup} = A_{sx,sup} f_{yd}$; $n_{sy,sup} = A_{sy,sup} f_{yd}$; $n_{sx,inf} = A_{sx,inf} f_{yd}$; $n_{sy,inf} = A_{sy,inf} f_{yd}$

$n_{c,sup} = -t_{sup} f_{c,sup}$; $n_{c,inf} = -t_{inf} f_{c,inf}$; $m_{c,sup} = 0,5 \times (h - t_{sup}) \times n_{c,sup}$; $m_{c,inf} = 0,5 \times (h - t_{inf}) \times n_{c,inf}$

En particulier, la résistance des bielles de compression est déterminée conformément aux clauses du **§6.109 - Éléments de membrane** de l'EN-1992-2 (Cas d'une plaque 'partiellement comprimée') :

$$f_{c,sup/inf} = f_{cd1} = f_{cd} \times \left[0.85 - \frac{\sigma_s}{f_{yd}} \times (0.85 - \vartheta) \right]$$

O u :

- σ_s représente la contrainte ressentie dans l'acier (on prendra $\sigma_s = f_{yd}$)*
- $\vartheta = 0.6 \times \left[1 - f_{ck}/250 \right]$.

NOTA: on considère pour le moment que les armatures ainsi que les bielles de compression travaillent simultanément à leurs états limites ultimes. En réalité, il faudra incorporer dans le problème la recherche du champ de déformations (de façon similaire à la règle des 3 pivots pour les poutres en flexion composée) dont on déduira, en fonction des lois de comportement des matériaux, le matériau (béton comprimé ou acier tendu) qui travaille à son état limite ultime et dictant par conséquent la forme du diagramme des déformations et par conséquent les contraintes réellement ressenties.

2.2.2.2 2 è me configuration : CAS_SAND = 2

Dans ce cas, seule la couche SUP requiert un ferraillage positif de traction ; la couche INF étant régie par un champ de compression bi-axial, aucun ferraillage n'est requis (on suppose pour ce fait pour le moment que les

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

contraintes de compression restent relativement faibles vis-à-vis de la capacité ultime du béton, et que par conséquent un ferraillage 'négatif' de compression n'est pas envisagé). Ainsi :

- La couche SUP sera toujours caractérisée par son épaisseur $\mathbf{t}_{\mathbf{sup}}$, l'inclinaison de sa bielle de compression $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{sup}}$ et l'effort résistant qu'elle reprend ($\mathbf{n}_{\mathbf{c,sup}} = -t_{sup} \times f_{c,sup}$), ainsi que les efforts de ferraillage $\mathbf{n}_{\mathbf{sx,sup}}$ et $\mathbf{n}_{\mathbf{sy,sup}}$, positifs (traction).

- La couche INF sera caractérisée par son épaisseur $\mathbf{t}_{\mathbf{inf}}$, et par le champ de contraintes sollicitant le béton compris dans le repère (x,y), à savoir :

$$\begin{pmatrix} n_{cx,inf} & n_{cxy,inf} \\ n_{cxy,inf} & n_{cy,inf} \end{pmatrix}$$

  Ces efforts sont négatifs vu qu'il s'agit d'un état de compression, le repère (x,y) n'étant pas nécessairement le repère principal du champ de contraintes dans la couche INF (il le sera si et seulement si $n_{cxy,inf}=0$). Les contraintes principales pouvant être déduites en diagonalisant la matrice.

L'équilibre membranaire du système s'écrit désormais comme suit :

$$N_{xx}=n_{sx,sup}+n_{c,sup}\times\sin^2(\theta_{sup})+n_{cx,inf} \qquad [E1]$$

$$N_{yy}=n_{sy,sup}+n_{c,sup}\times\cos^2(\theta_{sup})+n_{cy,inf} \qquad [E2]$$

$$N_{xy}=n_{c,sup}\times\cos(\theta_{sup})\times\sin(\theta_{sup})+n_{cxy,inf} \qquad [E3]$$

$$M_{xx}=n_{sx,sup}\times y_{sup}+m_{c,sup}\times\sin^2(\theta_{sup})-m_{cx,inf} \qquad [E4]$$

$$M_{yy}=n_{sy,sup}\times y_{sup}+m_{c,sup}\times\cos^2(\theta_{sup})-m_{cy,inf} \qquad [E5]$$

$$M_{xy}=m_{c,sup}\times\cos(\theta_{sup})\times\sin(\theta_{sup})-m_{cxy,inf} \qquad [E6]$$

T els que :

$$n_{sx,sup} = A_{sx,sup} f_{yd} \ ; \ n_{sy,sup} = A_{sy,sup} f_{yd}$$
$$n_{c,sup} = -t_{sup} f_{c,sup} \ ; \ m_{c,sup} = 0,5 \times (h - t_{sup}) \times n_{c,sup}$$

$$m_{cx,inf} = 0,5 \times (h - t_{inf}) \times n_{cx,inf} ; \ m_{cy,inf} = 0,5 \times (h - t_{inf}) \times n_{cy,inf} ; \ m_{cxy,inf} = 0,5 \times (h - t_{inf}) \times n_{cxy,inf}$$

De plus , conformément aux explications qui précèdent, on obtient, en diagonalisant la matrice des efforts dans la couche INF, l'effort principal de compression majeur ci-dessous :

$$n_{c,inf}=-t_{inf}\times f_{c,inf}=\frac{1}{2}\times(n_{cx,inf}+n_{cy,inf})-\sqrt{\left(\frac{n_{cx,inf}+n_{cy,inf}}{2}\right)^2+n_{cxy,inf}^2} \qquad [E7]$$

Et o n aura it désormais :

7 équations pour 8 inconnues : $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{sup}}$; $\mathbf{t}_{\mathbf{sup}}$; $\mathbf{t}_{\mathbf{inf}}$; $\mathbf{A}_{\mathbf{sx,sup}}$; $\mathbf{A}_{\mathbf{sy,sup}}$; $\mathbf{n}_{\mathbf{c\ x,inf}}$; $\mathbf{n}_{\mathbf{c\ y,inf}}$; $\mathbf{n}_{\mathbf{cxy,inf}}$

En particulier, la résistance des bielles de compression est déterminée conformément aux clauses du §6.109 - Éléments de membrane de l'EN-1992-2 :

$$f_{c,sup}=f_{cd1}=f_{cd}\times\left[0.85-\frac{\sigma_s}{f_{yd}}\times(0.85-\vartheta)\right]$$ (Cas d'une plaque 'partiellement comprimée')

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$f_{c,inf}=f_{cd2}=0.85\times f_{cd}\times\frac{1+3.8\,\alpha_{inf}}{\left(1+\alpha_{inf}\right)^2}$$ (Cas d'une plaque ' entièrement comprimée')

T el que α_{inf} désigne le ratio des contraintes principales de compression dans la couche INF :

$$\alpha_{inf}=\left|\frac{\frac{1}{2}\times\left(n_{cx,inf}+n_{cy,inf}\right)+\sqrt{\left(\frac{n_{cx,inf}+n_{cy,inf}}{2}\right)^2+n_{cxy,inf}^2}}{\frac{1}{2}\times\left(n_{cx,inf}+n_{cy,inf}\right)-\sqrt{\left(\frac{n_{cx,inf}+n_{cy,inf}}{2}\right)^2+n_{cxy,inf}^2}}\right|\leq 1$$

2.2.2.3 3 è me configuration : CAS_SAND = 3

Ce cas est symétrique au cas précédent.
Dans ce cas, seule la couche INF requiert un ferraillage positif de traction ; la couche SUP étant régie par un champ de compression bi-axial, aucun ferraillage est requis.

2.2.2.4 4 è me configuration : CAS_SAND = 4

Dans ce cas, aucune couche requiert un ferraillage positif de traction ; les deux couches SUP et INF étant régies par des champs de compression bi-axiaux. Les équations de l'équilibre membranaire s'écrivent alors comme suit :

$$N_{xx}=n_{cx,inf}+n_{cx,sup}\quad[E1]$$
$$N_{yy}=n_{cy,inf}+n_{cy,sup}\quad[E2]$$
$$N_{xy}=n_{cxy,inf}+n_{cxy,sup}\quad[E3]$$
$$M_{xx}=m_{cx,sup}-m_{cx,sinf}\quad[E4]$$
$$M_{yy}=m_{cy,sup}-m_{cy,sinf}\quad[E5]$$
$$M_{xy}=m_{cxy,sup}-m_{cxy,sinf}\quad[E6]$$

Tels que :

$m_{cx,sup}$ = 0,5 x (h – t_{sup}) x $n_{cx,sup}$; $m_{cy,sup}$ = 0,5 x (h – t_{sup}) x $n_{cy,sup}$; $m_{cxy,sup}$ = 0,5 x (h – t_{sup}) x $n_{cxy,sup}$

$m_{cx,inf}$ = 0,5 x (h – t_{inf}) x $n_{cx,inf}$; $m_{cy,inf}$ = 0,5 x (h – t_{inf}) x $n_{cy,inf}$; $m_{cxy,inf}$ = 0,5 x (h – t_{inf}) x $n_{cxy,inf}$

Par ailleurs, on obtient en diagonalisant les matrices des efforts en couches SUP et INF, les efforts principaux majeurs de compression respectifs ci-dessous :

$$n_{c,sup}=-t_{sup}\times f_{c,sup}=\frac{1}{2}\times\left(n_{cx,sup}+n_{cy,sup}\right)-\sqrt{\left(\frac{n_{cx,sup}+n_{cy,sup}}{2}\right)^2+n_{cxy,sup}^2}\quad[E7]$$
$$n_{c,inf}=-t_{inf}\times f_{c,inf}=\frac{1}{2}\times\left(n_{cx,inf}+n_{cy,inf}\right)-\sqrt{\left(\frac{n_{cx,inf}+n_{cy,inf}}{2}\right)^2+n_{cxy,inf}^2}\quad[E8]$$

Et o n aura it désormais :

8 équations pour 8 inconnues : $\mathbf{t}_{sup}$; $\mathbf{t}_{inf}$; $\mathbf{n}_{c\,x,\,sup}$; $\mathbf{n}_{c\,y,\,sup}$; $\mathbf{n}_{cxy,\,sup}$; $\mathbf{n}_{c\,x,inf}$; $\mathbf{n}_{c\,y,inf}$; $\mathbf{n}_{cxy,inf}$
En particulier, la résistance des bielles de compression est déterminée conformément aux clauses du §6.109 - Éléments de membrane de l'EN-1992-2 :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$f_{c,\sup}=f_{cd2}=0.85\times f_{cd}\times\frac{1+3.8\,\alpha_{\sup}}{\left(1+\alpha_{\sup}\right)^2}$$ (Cas d'une plaque ' entièrement comprimée')

$$f_{c,inf}=f_{cd2}=0.85\times f_{cd}\times\frac{1+3.8\,\alpha_{inf}}{\left(1+\alpha_{inf}\right)^2}$$ (Cas d'une plaque ' entièrement comprimée')

2.2.2.5 Considération du ferraillage 'négatif' de compression

D e point de vue numérique, un tel cas se rencontre lorsque, avec les macros introduites précédemment (CAS_SAND = 1 , 2 , 3 ou 4), on obtient l'un des cas de figures ci-dessous :

- Si dans la boucle CAS_SAND = 1 (ferraillage de traction requis en SUP et INF), on a l'un des termes calculés $n_{sx,sup}, n_{sy,sup}, n_{sx,inf}, n_{sy,inf}$ qui est négatif, alors on ne change rien dans ce cas vu que les équations d'équilibre sont toujours les mêmes ➔ Les efforts aux valeurs négatives indiquent qu'il s'agit d'un ferraillage de compression suivant la nappe et la direction considérées.

- De même, si dans l a boucle CAS_SAND = 2 (ferraillage de traction requis en SUP), l'algorithme aboutit à une solution du problème avec au plus l'un des efforts d'acier négatif en SUP ➔ Rien à changer, les efforts aux valeurs négatives indiquent qu'il s'agit d'un ferraillage de compression suivant la nappe et la direction considérées. Cependant , si l'équilibre ne peut pas aboutir (c'est-à-dire incapacité de déterminer les inconnues du problème, dont notamment les épaisseurs des deux couches SUP et INF), on introduit alors un nouveau cas de figure qu'on désignera **CAS_SAND = 2 bis** .

- Même constat pour la boucle CAS_SAND = 3 (et introduction éventuelle du cas de figure **CAS_SAND = 3 bis**) .

- Si dans la boucle CAS_SAND = 4 l'équilibre ne peut pas aboutir (c'est-à-dire incapacité de déterminer les inconnues du problème, dont notamment les épaisseurs des deux couches SUP et INF), on introduit alors un nouveau cas de figure qu'on désignera **CAS_SAND = 4 bis** .

On présente donc dans ce qui suit, l'approche analytique des trois cas supplémentaires développés pour couvrir convenablement, et de façon approprié au cas dont il dérive, le ferraillage de compression.

2.2.2.5.1 CAS_SAND = 2 bis

Dans ce nouveau cas, on aurait désormais simultanément, dans la couche INF :

- 2 lits d'acier suivant x et y, reprenant les efforts $n_{sx,inf}$ et $n_{sy,inf}$ respectivement (le calcul devra donner des valeurs négatives à ces efforts, s'agissant d'armatures de compression).

- 2 bielles de compression principales, à savoir $n_{c,inf,max}$ et $n_{c,inf,min}$ (ces efforts sont négatifs également). Afin de simplifier le processus et alléger les notations, on considérera comme inconnues du problème, la contrainte maximale en posant $n_{c,inf}=n_{c,inf,max}$ et son orientation dans le repère (x,y) donné par l'angle θ_{inf} que fait sa direction avec l'axe y (l'orientation de $n_{c,inf,min}$ étant donné par $\pi/2+\theta_{inf}$), ainsi que le rapport des deux contraintes principales à savoir $\alpha_{inf}=n_{c,inf,min}/n_{c,inf,max}$.

L'écriture des équations de l'équilibre membranaire aboutit alors dans ce nouveau cas à :

$$N_{xx}=n_{sx,sup}+n_{sx,inf}+n_{c,sup}\times\sin^2\left(\theta_{sup}\right)+n_{c,inf}\times\left[\sin^2\left(\theta_{inf}\right)+\alpha_{inf}\times\cos^2\left(\theta_{inf}\right)\right] \quad [E1]$$

$$N_{yy}=n_{sy,sup}+n_{sy,inf}+n_{c,sup}\times\cos^2\left(\theta_{sup}\right)+n_{c,inf}\times\left[\cos^2\left(\theta_{inf}\right)+\alpha_{inf}\times\sin^2\left(\theta_{inf}\right)\right] \quad [E2]$$

$$N_{xy}=n_{c,sup}\times\cos\left(\theta_{sup}\right)\times\sin\left(\theta_{sup}\right)+\left(1-\alpha_{inf}\right)\times n_{c,inf}\times\cos\left(\theta_{inf}\right)\times\sin\left(\theta_{inf}\right) \quad [E3]$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$M_{xx}=n_{sx,sup}\times y_{sup}-n_{sx,inf}\times y_{inf}+m_{c,sup}\times\sin^2(\theta_{sup})-m_{c,inf}\times\left[\sin^2(\theta_{inf})+\alpha_{inf}\times\cos^2(\theta_{inf})\right] \quad [E4]$$

$$M_{yy}=n_{sy,sup}\times y_{sup}-n_{sy,inf}\times y_{inf}+m_{c,sup}\times\cos^2(\theta_{sup})-m_{c,inf}\times\left[\cos^2(\theta_{inf})+\alpha_{inf}\times\sin^2(\theta_{inf})\right] \quad [E5]$$

$$M_{xy}=m_{c,sup}\times\cos(\theta_{sup})\times\sin(\theta_{sup})-(1-\alpha_{inf})\times m_{c,inf}\times\cos(\theta_{inf})\times\sin(\theta_{inf}) \quad [E6]$$

De plus, compte tenu des clauses du §6.109 de l'EN-1992-2, on aurait en plus les relations ci-dessous :

$n_{c,sup}=-t_{sup}\times f_{c,sup}=-t_{sup}\times f_{cd1}$ (Cas d'une plaque 'partiellement comprimée')

$$n_{c,inf}=-t_{inf}\times f_{c,inf}=-t_{inf}\times f_{cd2}=-t_{inf}\times 0.85\times f_{cd}\times\frac{(1+3.8\times\alpha_{inf})}{(1+\alpha_{inf})^2} \quad [E7]$$ (Cas d'une plaque 'entièrement comprimée')

Et o n aura it au final :

7 équations pour 9 inconnues : $\mathbf{t_{sup}}$; $\mathbf{t_{inf}}$; $\boldsymbol{\theta_{sup}}$; $\boldsymbol{\theta_{inf}}$; $\boldsymbol{\alpha_{inf}}$; $\mathbf{A_{sx,sup}}$; $\mathbf{A_{sy,sup}}$; $\mathbf{A_{sx,inf}}$; $\mathbf{A_{sy,inf}}$

2.2.2.5.2 CAS_SAND = 3 bis

Dans ce nouveau cas, on aurait alors simultanément, dans la couche SUP :

- 2 lits d'acier suivant x et y, reprenant les efforts $n_{sx,sup}$ et $n_{sy,sup}$ respectivement (le calcul devra donner des valeurs négatives à ces efforts, s'agissant d'armatures de compression).
- 2 bielles de compression principales, à savoir $n_{c,sup,max}$ et $n_{c,sup,min}$ (ces efforts sont négatifs également). Afin de simplifier le processus et alléger les notations, on considérera comme inconnues du problème, la contrainte maximale en posant $n_{c,sup}=n_{c,sup,max}$ et son orientation dans le repère (x,y) donné par l'angle θ_{sup} que fait sa direction avec l'axe y (l'orientation de $n_{c,sup,min}$ étant donné par $\pi/2+\theta_{sup}$), ainsi que le rapport des deux contraintes principales à savoir $\alpha_{sup}=n_{c,sup,min}/n_{c,sup,max}$.

L es équations d'équilibre se déduisent de celles de CAS_SAND = 2 bis, par symétrie.

2.2.2.5.3 CAS_SAND = 4 bis

Par extension aux deux cas précédents, l'écriture des équations de l'équilibre membranaire aboutit dans ce nouveau cas à :

$$N_{xx}=n_{sx,sup}+n_{sx,inf}+n_{c,sup}\times\left[\sin^2(\theta_{sup})+\alpha_{sup}\times\cos^2(\theta_{sup})\right]+n_{c,inf}\times\left[\sin^2(\theta_{inf})+\alpha_{inf}\times\cos^2(\theta_{inf})\right] \quad [E1]$$

$$N_{yy}=n_{sy,sup}+n_{sy,inf}+n_{c,sup}\times\left[\cos^2(\theta_{sup})+\alpha_{sup}\times\sin^2(\theta_{sup})\right]+n_{c,inf}\times\left[\cos^2(\theta_{inf})+\alpha_{inf}\times\sin^2(\theta_{inf})\right] \quad [E2]$$

$$N_{xy}=(1-\alpha_{sup})\times n_{c,sup}\times\cos(\theta_{sup})\times\sin(\theta_{sup})+(1-\alpha_{inf})\times n_{c,inf}\times\cos(\theta_{inf})\times\sin(\theta_{inf}) \quad [E3]$$

$$M_{xx}=n_{sx,sup}\times y_{sup}-n_{sx,inf}\times y_{inf}+m_{c,sup}\times\left[\sin^2(\theta_{sup})+\alpha_{sup}\times\cos^2(\theta_{sup})\right]-m_{c,inf}\times\left[\sin^2(\theta_{inf})+\alpha_{inf}\times\cos^2(\theta_{inf})\right] \quad [E4]$$

$$M_{yy}=n_{sy,sup}\times y_{sup}-n_{sy,inf}\times y_{inf}+m_{c,sup}\times\left[\cos^2(\theta_{sup})+\alpha_{sup}\times\sin^2(\theta_{sup})\right]-m_{c,inf}\times\left[\cos^2(\theta_{inf})+\alpha_{inf}\times\sin^2(\theta_{inf})\right] \quad [E5]$$

$$M_{xy}=(1-\alpha_{sup})\times m_{c,sup}\times\cos(\theta_{sup})\times\sin(\theta_{sup})-(1-\alpha_{inf})\times m_{c,inf}\times\cos(\theta_{inf})\times\sin(\theta_{inf}) \quad [E6]$$

De plus, compte tenu des clauses du §6.109 de l'EN-1992-2, on aurait en plus les relations ci-dessous :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$n_{c,\sup} = -t_{\sup} \times f_{c,\sup} = -t_{\sup} \times f_{cd2} = -t_{\sup} \times 0.85 \times f_{cd} \times \frac{\left(1+3.8 \times \alpha_{\sup}\right)}{\left(1+\alpha_{\sup}\right)^2} \qquad [E7]$$

$$n_{c,inf} = -t_{inf} \times f_{c,inf} = -t_{inf} \times f_{cd2} = -t_{inf} \times 0.85 \times f_{cd} \times \frac{\left(1+3.8 \times \alpha_{inf}\right)}{\left(1+\alpha_{inf}\right)^2} \qquad [E8]$$

On aura donc finalement :

8 équations pour 10 inconnues : $\mathbf{t_{sup}}$; $\mathbf{t_{inf}}$; $\boldsymbol{\theta_{sup}}$; $\boldsymbol{\theta_{inf}}$; $\boldsymbol{\alpha_{sup}}$; $\boldsymbol{\alpha_{inf}}$; $\mathbf{A_{sx,sup}}$; $\mathbf{A_{sy,sup}}$; $\mathbf{A_{sx,inf}}$; $\mathbf{A_{sy,inf}}$

2.2.3 Considération du ferraillage transversal

Une fois que le calcul de l'équilibre membranaire a abouti, l'épaisseur de la couche intermédiaire de béton peut être déduite : $t_c = h - t_{¿} - t_{inf}$.

Comme expliqué au niveau du § 2.2 .1, la couche intermédiaire fera l'objet de l'équilibre du cisaillement hors-plan ou transverse, à savoir le couple d'efforts Q_x et Q_y . En isolant ainsi cette 3 e couche des deux couches SUP et INF, on confère au modèle Sandwich une dynamique de fonctionnement orthotrope, ce qui en soi est un avantage important par rapport à la méthode de Capra Maury.

Pour le calcul du ferraillage transversal au niveau de la couche intermédiaire, on applique un raisonnement similaire au ferraillage des poutres à l'effort tranchant. Pour cela, il convient d'évaluer l'effort tranchant principal équivalent $V_{Ed\,0}$ et sa direction β comme suit :

$$V_{Ed\,0} = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}$$

$$\tan\beta = \frac{Q_y}{Q_x}$$

Dans la direction de l'effort tranchant principal, l'élément de plaque se comporte donc comme une poutre et il convient alors de se référer à une modélisation en treillis de 'Ritter-Morsch', dans le cas où $V_{Ed\,0}$ est supérieur à l'effort tranchant résistant du béton seul $V_{Rd,c}$. Les spécifications et démarches du §6.2 de l'EN-1992-1 s'appliquent alors. En particulier, pour le calcul du taux de ferraillage longitudinal ρ_L , on considère:

$$\rho_L = \rho_x \cos^2(\beta) + \rho_y \sin^2(\beta)$$

Où :

- $\rho_x = \left(A_{sx,\sup} + A_{sx,inf}\right)/t_c$
- $\rho_y = \left(A_{sy,\sup} + A_{sy,inf}\right)/t_c$

Quitte à comptabiliser uniquement les armatures tendues.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

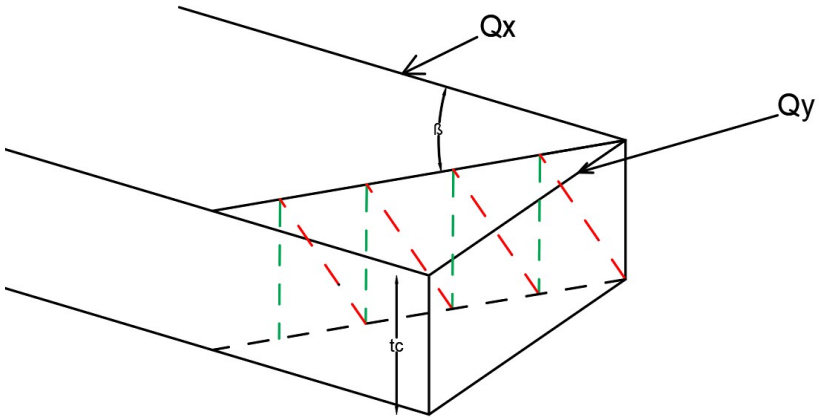


Figure 2 4 . Ferraillage de la couche intermédiaire à l'effort tranchant principal équivalent

Par ailleurs, pour la prise en compte de l'état de précontrainte (impact sur les coefficients α_{cw} et σ_{cp}), on considère comme effort normal de calcul :

$$N_{Ed} = N_{xx}\cos^2(\beta) + 2N_{xy}\cos(\beta)\sin(\beta) + N_{yy}\sin^2(\beta)$$

Dans le cas où le calcul montre qu'un ferraillage transversal est requis ($V_{Ed0} > V_{Rd,c}$) alors on calcule, conformément à l'Eurocode, un ferraillage de design A_{sv0} (cm ² /ml/ml) suivant la direction β et de là, on transite au ferraillage transversal 'réel' de sorte à vérifier l'inéquation ci-dessous :

$$A_{sv,x}\cos^2(\beta) + A_{sv,y}\sin^2(\beta) \geq A_{sv,0}$$

(Raisonnement analogue à celui introduit dans Capra-Maury)

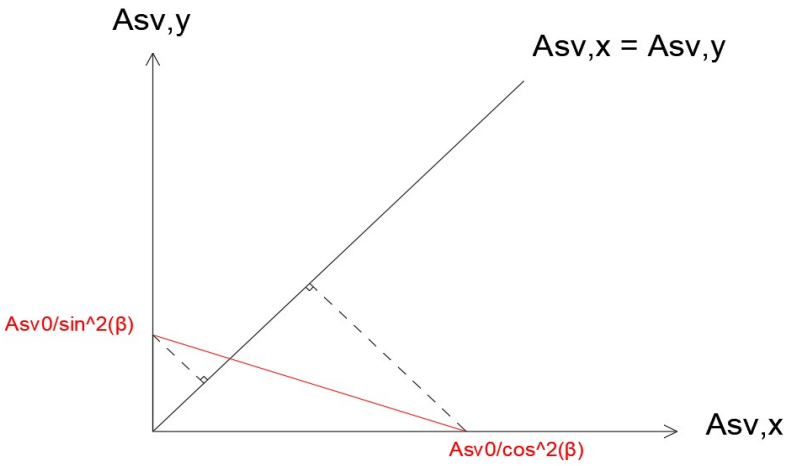


Figure 2 5 . Recherche du ferraillage transversal optimal

Ainsi la recherche de l'optimum de ferraillage consiste à déterminer le point de la droite rouge, dont le projeté sur la 1 ère bissectrice du plan ($A_{sv,x}$;$A_{sv,y}$) est le plus proche de l'origine du repère. Par conséquent, on retiendra comme solution finale :

- Si $\beta = 0 \rightarrow A_{svx} = A_{sv0} \; et \; A_{sv\,y} = 0$
- Si $\beta = \pm\frac{\pi}{2} \rightarrow A_{svx} = 0 \; et \; A_{sv\,y} = A_{sv0}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Sinon :
  - si $|\beta|<\frac{\pi}{4}$, on prend $A_{svx}=\frac{A_{sv0}}{\cos^2\beta}\, et\, A_{svy}=0$
  - si $|\beta|>\frac{\pi}{4}$, on prend $A_{svx}=0\, et\, A_{svy}=\frac{A_{sv0}}{\sin^2\beta}$
  - $si\,|\beta|=\frac{\pi}{4}$, on prend $A_{svx}=\frac{A_{sv0}}{2\cos^2\beta}\quad et\, A_{svy}=\frac{A_{sv0}}{2\sin^2\beta}$

Par ailleurs, dans le cas où le ferraillage transversal est requis, il faut ajouter les efforts supplémentaires de traction introduits au niveau des équations du § 2.2 .2 de la présente note :

$$D_{nxx}=\frac{Q_x^2}{V_{Ed0}}\times cot\theta$$
$$D_{nyy}=\frac{Q_y^2}{V_{Ed0}}\times cot\theta$$
$$D_{nxy}=\frac{Q_x\times Q_y}{V_{Ed0}}\times cot\theta$$

θ étant l'angle d'inclinaison de la bielle de compression dans le treillis de Ritter-Mosche pour le ferraillage à l'effort tranchant de la poutre de direction β .

2.3 Prise en compte du ferraillage minimum

Pour le pourcentage d'acier longitudinal minimal dans la direction principale, et conformément aux spécifications du §9.3 de l'EC2, les spécifications du §1.5.1 de la présente documentation s'appliquent.

Aucun seuil minimal n'est requis pour le ferraillage transversal.

2.4 Propriétés relatives au champ de ferraillage de sortie

La version actuelle de l'opérateur CALC_FERRAILLAGE propose également le calcul des grandeurs ci-dessous, à l'issu de la détermination du champ de ferraillage requis par l'élément :

2.4.1 Calcul de la densité volumique d'armature

A l'issue des calculs à $ELU/ELS/ELSQP$, les sections d'acier de flexion A_{XS} , A_{XI} , A_{YS} , A_{YI} et les sections d'acier d'effort tranchant $A_{sv,x}$ et $A_{sv,y}$ sont exploitées pour calculer la densité volumique d'armature δ_{BA} en kg/m^3 si elles sont exprimées en m^2/m pour les aciers de flexion en m^2/m^2 pour les aciers d'effort tranchant suivant la formule suivante où ρ_{acier} est la masse volumique des aciers en kg/m^3 .

$$\delta_{BA}=\frac{(A_{XS}+A_{YS}+A_{XI}+A_{YI})+(A_{SV,X}+A_{SV,Y})*h}{h}*\rho_{acier}$$

2.4.2 Calcul de l'indicateur de complexité de constructibilité

Un indicateur de complexité visant à traduire la difficulté de mise en œuvre du ferraillage sur le terrain est calculé selon la formule suivante :

$$I_{c,i}=\frac{\alpha_{reinf}\cdot\frac{\rho_i}{\rho_{critic}}+\alpha_{shear}\cdot\frac{A_{sw,i}}{A_{sw,critic}}+\alpha_{stirrups}\cdot\frac{A_{sw,i}}{A_{sw,critic}}\cdot\frac{h_{eff,i}}{l_{crit}}}{\alpha_{reinf}+\alpha_{shear}+\alpha_{stirrups}}$$

Avec :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

α_{reinf} est un coefficient de pondération du ration de densité d'acier par mètre cube de béton ;
ρ_i est la densité volumique totale d'acier pour l'élément i calculée précédemment δ_{BA} ;
ρ_{critic} est la densité volumique d'acier critique pour l'élément i ;
α_{shear} est un coefficient de pondération du ration de densité d'acier d'effort tranchant ;
$A_{sw,i}=\sqrt{A_{sv,x}^2+A_{sv,y}^2}$ est la densité d'acier d'effort tranchant pour l'élément i ;
$A_{sw,critic}$ est la densité de ferraillage d'effort tranchant critique ;
$\alpha_{stirrups}$ est un coefficient de pondération du ration de longueur des épingles d'acier d'effort tranchant ;
$h_{eff,i}=h-c-c'$ est la hauteur efficace considérée pour l'élément i ;
l_{crit} est la longueur critique des épingles d'aciers d'effort tranchant.

α_{reinf}, α_{shear} et $\alpha_{stirrups}$ ont pour valeur par défaut 1, la densité volumique d'acier critique ρ_{critic} à pour valeur par défaut $150\,kg/m^3$, a densité de ferraillage d'effort tranchant critique $A_{sw,critic}$ a pour valeur par défaut $60\,cm^2/m^2$ et la longueur critique des épingles d'aciers d'effort tranchant a pour valeur par défaut $1\,m$.

Avec de telles valeurs, on considère que la transition entre constructible et inconstructible est donné pour des valeurs de l_c entre 1 et $1{,}2$. Au-delà de $l_c=2$ on considère que la mise en œuvre du ferraillage est très compliqué et au-delà de $l_c=3$ on considère que la mise en œuvre du ferraillage est impossible.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Références bibliographiques

[1] Calcul automatique du ferraillage optimal des plaques et coques en béton armé. Alain CAPRA et Jean-Francis MAURY Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des travaux publics, n°367, 12/1978.

[2] Eurocode 2 part 1-1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)