Méthode Gp : une approche énergétique de la prédiction du clivage

Résumé

Le paramètre G_p permet de définir un critère d'amorçage valide dans le domaine du clivage (rupture fragile intragranulaire en présence de plasticité). On rappelle tout d'abord les fondements de cette approche : cadre énergétique du comportement des structures, modélisation de la fissure par une entaille, principe de minimisation de l'énergie et définition du critère. On discute du lien entre l'approche globale et l'approche locale avant de préciser ensuite les éléments essentiels à la mise en œuvre de G_p dans *Code_Aster*.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Introduction....3
1.1 Limites de l'approche classique....3
1.2 Objectif et intérêt de Gp....3
1.3 Historique du développement de l'approche Gp....3
1.4 Fondements de l'approche Gp....4
2 Modélisation des défauts sous forme d'entaille....4
3 Principe de minimisation d'énergie....6
3.1 Formulation énergétique dans le cadre élastique....6
3.2 Modification de la forme d'énergie....7
3.3 Extension au cadre élastoplastique....7
4 Définition d'un critère d'amorçage en élastoplasticité....7
5 Lien entre approche globale et locale....9
6 Mise en œuvre dans Code_Aster....10
6.1 Calcul de Gp....10
6.2 Identification des paramètres....11
7 Bibliographie....12
7.1 Références....12
7.2 Documents EDF (notes, CR, présentation, documents Code_Aster)....13
8 Description des versions du document....14

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Dans ce chapitre on commence par introduire les limites de l'approche classique en mécanique de la rupture (§1.1), puis on rappelle l'objectif et l'intérêt de l'approche G_p (§1.2). On aborde enfin les fondements de cette méthode au (§1.4).

1.1 Limites de l'approche classique

En mécanique de la rupture, le paramètre classique permettant de définir un critère d'amorçage d'une fissure déjà existante[1] est le paramètre G, taux de restitution d'énergie élastique. Le paramètre G est valide en élasticité linéaire ainsi qu'en élasticité non-linéaire. C'est-à-dire que le cadre et les hypothèses physiques sont bien définies, et que la formule de calcul $G\theta$ est en cohérence avec ce cadre. En revanche, la pertinence du critère de rupture $G=Gc$ avec les résultats expérimentaux est une autre question, non abordée dans ce document. En élastoplasticité, le paramètre G n'est en général pas valide. Cependant, si le chargement reste radial et monotone, alors G est valide. Cette hypothèse implique que les équations de la plasticité sont équivalentes aux équations de Hencky (qui sont celles de l'élasticité non-linéaire [**R4.20.01**]). Or, les cas de chargements strictement proportionnels sont assez rares (voire n'existent pas lorsqu'il s'agit de structures présentant des défauts géométriques tels que des fissures).

1.2 Objectif et intérêt de Gp

L'objectif de la méthode G_p est de définir un paramètre d'amorçage valide en plasticité incrémentale. Cette théorie suppose un découplage de la plasticité et de la fissuration (cas de la rupture par clivage). Ainsi l'utilisation de G_p pour prédire le clivage permettra de réduire les conservatismes de l'approche classique. Sa définition fait appel à l'énergie libre ainsi qu'à quelques paramètres géométriques nécessaires à la définition de la fissure, qui est modélisée par une entaille. Ce paramètre G_p a l'unité d'une densité d'énergie surfacique et est calculé dans la zone adjacente au front d'entaille.

L'intérêt de la méthode est triple : G_p est un critère d'amorçage déterministe, autrement dit il permet d'évaluer s'il y a amorçage ou non d'une fissure. Ce paramètre est cohérent avec le G élastique [WAD 13, LOR 14], et il est valable dans un cadre élastoplastique en chargement non proportionnel et en décharge.

Remarque :

- G_p n'est pas un critère de stabilité ou d'instabilité du défaut.
- G_p ne prédit pas de longueur de propagation.

1.3 Historique du développement de l'approche Gp

Le développement de cette approche, qui trouve ses origines au début des années 2000, est issue des travaux de Lorentz, Wadier et Debryune [LOR00]. La fissure est alors modélisée par une coupure du plan mais l'idée d'introduire une entaille y est déjà mentionnée en perspective et sera rapidement adoptée. La modélisation de la fissure par une entaille est présentée en 2003 (CR) dans [WAD 03d] et en 2004 (articles) dans [LOR 04] et [WAD 04].

L'approche a été présentée de nombreuses fois à l'occasion de conférences internationales en présentant dans un premier temps son intérêt pour la cuve dans des situations en charge/décharge [WAD 00], [WAD 01a], [WAD 01b], puis en montrant les interprétations de résultats expérimentaux illustrant l'effet « petit défaut » [WAD 03a] [WAD 03c] puis l'effet du pré-chargement à chaud [WAD 03b] [WAD 05] [WAD 09].

Une synthèse rappelant les fondements de l'approche Gp ainsi que les principaux résultats de validation est réalisée dans [WAD 13]. C'est à ce jour le seul article paru dans un journal international, dédié à l'approche Gp. De ce fait, il fait figure de référence quant à l'approche Gp.

1 Le sens du terme *amorçage* est ici différent de la terminologie utilisée en fatigue, où *amorçage* signifie création d'une fissure à partir d'un matériau sain. En rupture, on devrait plutôt dire critère de « *réamorçage* », mais on emploie couramment le terme d'*amorçage*.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Il convient de noter que des tentative s de prédire l'arrêt de fissure grâce à une approche de type Gp (G-delta) ont été réalisées par le passé [WAD 07a], mais cette voie n'est plus poursuivie à l'heure actuelle .

Depuis le départ en inactivité du principal acteur de la méthode (Y. Wadier), une nouvelle génération d'ingénieurs d'EDF R&D a repris le flambeau et continue de promouvoir l'approche Gp auprès de la communauté scientifique [GEN 16] [JUL 17] . Récemment, l'approche Gp a été étendue aux configurations pour lesquelles la zone autour de la pointe du défaut se trouve en compression [HAB 17] .

1.4 Fondements de l'approche Gp

La méthode G_p se place dans le contexte d'une formulation énergétique globale de la rupture fragile. L'approche consiste à déterminer si une propagation de défaut (conservant la géométrie du fond de défaut et à champs mécaniques constants) permet de diminuer l'énergie totale de la structure (principe de minimisation). Pour y parvenir, le trajet de fissuration est supposé connu *a priori* . Sous cette hypothèse, le cadre énergétique proposé par Francfort et Marigo [FRA 93, FRA 98] peut être mis en pratique pour prédire l'amorçage brutal de fissures. Toutefois, ce cadre présente certaines caractéristiques qui en limitent la portée [LOR 08], notamment des effets d'échelle indésirables et l'incompatibilité de la théorie avec des chargements de type forces imposées. C'est pourquoi deux types de modifications ont été apportées pour résoudre ces difficultés, tout en conservant la forme des énergies introduites. D'une part, la fissure est remplacée par une entaille dont le rayon devient un paramètre du modèle. D'autre part, on examine si l'absence de propagation est un minimum (global) à champs mécaniques fixés, donc on réalise une minimisation globale mais dans une seule direction. La nature énergétique de la formulation proposée autorise l'introduction de mécanismes plastiques.

2 Modélisation des défauts sous forme d'entaille

On se place en modélisation 2D. Dans le cadre de l'approche G_p, la fissure réelle située dans le domaine Ω n'est pas modélisée par une surface de discontinuité des champs de déplacements, mais par une « entaille » en U *(H1)*, d'épaisseur $D=2R$, avec R le rayon du fond d'entaille (voir la [Figure 2-a]). On suppose que l'entaille peut se propager sans changer de forme *(H2)* et sans bifurcation *(H3)*, en mode I. Ainsi, les trajets de fissuration sont prédéfinis et sujets à une évolution continue de la fissure (i.e. pas de fissures « en pointillés » le long du trajet).

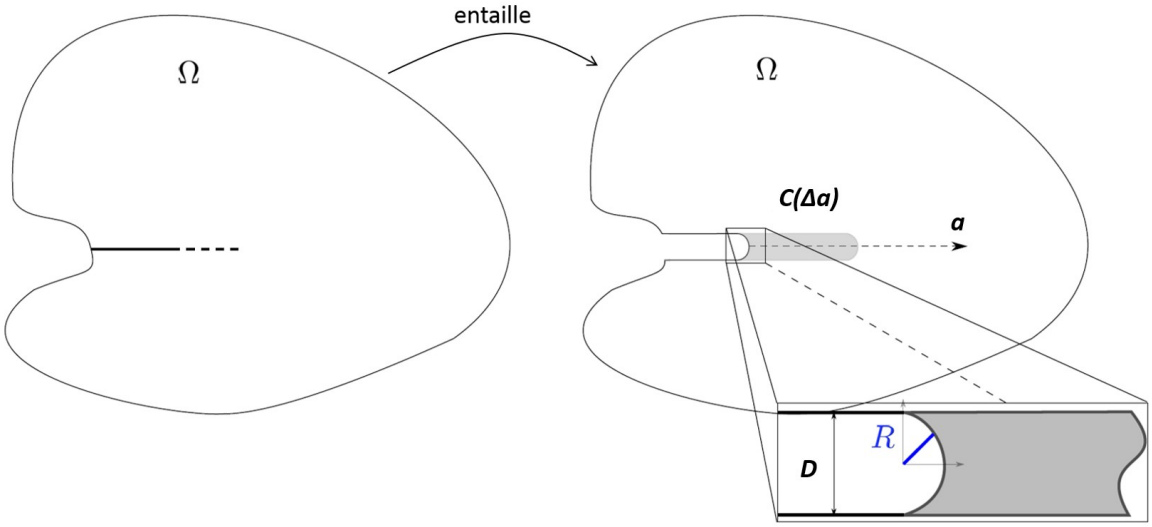


Figure 2-a – Modélisation du défaut par une entaille et représentation de la zone de propagation virtuelle $C(\Delta a)$ en gris.

On définit alors une zone de propagation virtuelle de l'entaille appelée $C(\Delta a)$, qui correspond à une zone *endommagée*, d'épaisseur D et de longueur Δa. La zone $C(\Delta a)$ illustrée par la [Figure 2-b] peut se

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

définir comme l'union d'un rectangle R_1 et d'un demi-disque C_2, à laquelle on retranche le demi-disque C_1 :

$$C(\Delta a)=(R_1\cup C_2)-C_1 \tag{1}$$

Les entités R_1, C_1 et C_2 sont définies ci-dessous, étant données une entaille suivant l'axe X et les coordonnées (X_0, Y_0) du centre du fond circulaire de l'entaille [BAR 12] :

$$R_1=(X,Y) \text{ tels que } \begin{cases} 0\leqslant X-X_0\leqslant \Delta a \\ -R\leqslant Y-Y_0\leqslant R \end{cases} \tag{2}$$

$$C_1=(X,Y) \text{ tels que } \begin{cases} (X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2\leqslant R^2 \\ X-X_0\geqslant 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$C_2=(X,Y) \text{ tels que } \begin{cases} (X-X_0-\Delta a)^2+(Y-Y_0)^2\leqslant R^2 \\ X-X_0-\Delta a\geqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

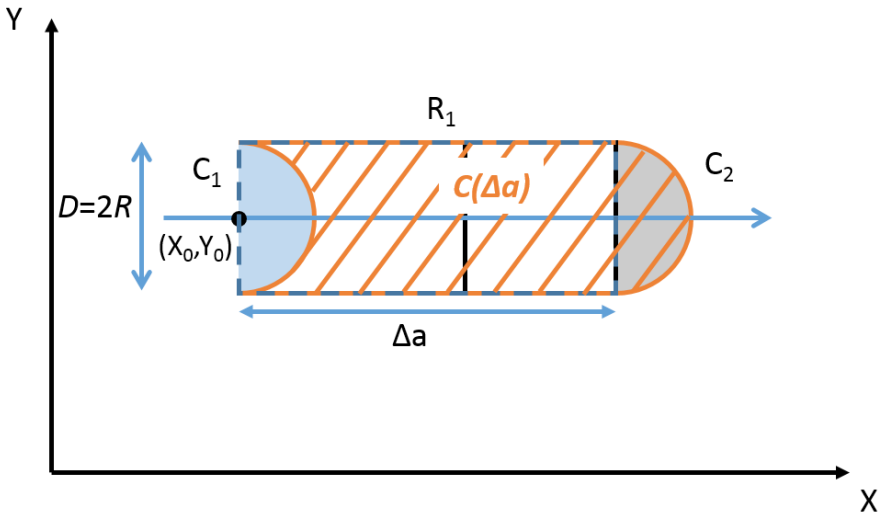


Figure 2-b – Définition géométrique de l'entaille : la zone $C(\Delta a)$ en hachuré, le rectangle R_1 en pointillé, et les demi-disques C_1 et C_2.

Remarque : l'intégrale sur $C(\Delta a)$ d'une constante w indépendante de l'espace s'écrit simplement :

$$\int_{C(\Delta a)} w\, d\Omega = w\times\Delta a\times D \tag{5}$$

En toute rigueur, nous ne sommes plus dans le contexte de la mécanique de la rupture mais dans celui de la mécanique de l'endommagement, en considérant un modèle d'endommagement brutal *(hypothèse H4)* total *(hypothèse H5)*. Le terme brutal, par opposition à progressif, signifie que seuls deux états de dommage sont possibles pour le matériau : sain ou endommagé. Le terme total, par opposition à partiel, indique que le matériau endommagé à une rigidité résiduelle nulle.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Un champ d'endommagement bivalué χ est ainsi défini sur le domaine Ω, à valeur dans $\left[0,1\right]$. Par définition, $\chi=0$ correspond au matériau sain, et $\chi=1$ au matériau endommagé. Un modèle d'endommagement permet de fixer une contrainte critique. Pour rappel, on fixe l'épaisseur de la zone sur laquelle l'endommagement se propage : on considère uniquement les évolutions de l'endommagement qui correspondent à la croissance de l'entaille $C\left(\Delta a\right)$, où Δa est la longueur sur laquelle l'entaille se propage, et D son épaisseur. On contrôle ainsi l'énergie dissipée lors de l'avancée de la zone endommagée. On note $\Omega\setminus C\left(\Delta a\right)$ l'ensemble constitué de la différence entre le domaine Ω et la zone de propagation virtuelle de l'entaille $C\left(\Delta a\right)$. Alors on a :

$$\chi(\Delta a)(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1 & \text{si} \quad \boldsymbol{x}\in C\left(\Delta a\right)\\ 0 & \text{si} \quad \boldsymbol{x}\in\Omega\setminus C\left(\Delta a\right)\end{cases} \tag{6}$$

Remarque :
On aurait pu distinguer l'épaisseur de l'entaille préexistante, de celle de la zone endommagée $C\left(\Delta a\right)$. Ceci aurait conduit à un modèle plus complexe (avec plus de paramètres). Par souci de simplicité on ne fait donc pas cette distinction.

3 Principe de minimisation d'énergie

3.1 Formulation énergétique dans le cadre élastique

Une formulation énergétique caractérise la réponse d'une structure comme un minimum d'une énergie par rapport à l'ensemble des variables qu'on a choisi pour décrire l'état mécanique de la structure [LOR 08]. Dans le cas élastique, il s'agit de minimiser l'énergie potentielle par rapport au champ de déplacement. Afin de prendre en compte les phénomènes dissipatifs, l'approche G_p s'appuie sur les travaux de Francfort et Marigo [FRA 93, FRA 98] dédiés à un modèle d'endommagement brutal *partiel*. A la différence du cas élastique, l'énergie dépend de deux champs, le champ de déplacement $\boldsymbol{u}$ et un champ d'endommagement χ à valeur dans $\left[0,1\right]$, 0 correspondant au matériau sain d'énergie libre volumique φ_s et 1 au matériau endommagé d'énergie libre volumique φ_d :

$$E_{tot}\left(\boldsymbol{u},\chi\right)=\int_{\Omega}\varphi\left(\varepsilon\left(\boldsymbol{u}\right),\chi\right)+w_c\chi \quad ; \quad \varphi\left(\varepsilon\left(\boldsymbol{u}\right),\chi\right)=\chi\varphi_d\left(\varepsilon\right)+\left(1-\chi\right)\varphi_s\left(\varepsilon\right) \tag{7}$$

où l'on se restreint à des déplacements imposés (le potentiel des efforts extérieur W_{ext} est nul). Le terme supplémentaire $w_c\chi$ mesure l'énergie à fournir pour passer de l'état sain à l'état endommagé. Après discrétisation en temps, Francfort et Marigo postulent alors que les champs de déplacement $\boldsymbol{u}$ et d'endommagement χ réalisent un minimum de l'énergie potentielle incrémentale :

$$\left(\boldsymbol{u},\chi\right)=\underset{\boldsymbol{u},\chi}{argmin}\,E_{tot}\left(\boldsymbol{u},\chi\right) \tag{8}$$

On considère par la suite le modèle d'endommagement brutal présenté par Francfort et Marigo, à ceci près que la rigidité résiduelle est nulle pour un état endommagé (modèle d'endommagement brutal *total*). Alors, on retient de la théorie de Francfort et Marigo qu'à déplacement donné, l'évolution de l'endommagement est gouvernée par la minimisation de l'énergie totale par rapport à χ. Dans ce cas, un endommagement total ou des forces extérieures ne sont plus problématiques. Ainsi, dans le cadre élastique, l'évolution de l'endommagement est obtenue par la minimisation de l'énergie potentielle incrémentale totale suivante :

$$E_{tot}\left(\boldsymbol{u},\chi\right)=\int_{\Omega}\left[\left(1-\chi\right)\Phi_{el}+\chi w_C\right]d\,\Omega-W_{ext}\left(\boldsymbol{u}\right) \tag{9}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

où Φ_{el} est la densité d'énergie libre, $\Phi_{el}=\int_\Omega \frac{1}{2}[\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{A}^{-1}:\boldsymbol{\sigma}]d\Omega$ avec $\boldsymbol{A}$ la matrice tangente du comportement, et w_c l'énergie volumique dissipée dans le processus d'endommagement en chaque point matériel. Dans cette nouvelle approche, on peut prendre des chargements de type force imposée : le potentiel des effort extérieurs W_{ext} n'est pas nécessairement nul.

3.2 Modification de la forme d'énergie

Une des limitations du modèle d'endommagement proposé est qu'il ne distingue pas la traction de la compression, du fait de la forme de la densité d'énergie libre, si bien que la restitution d'une énergie de compression contribue tout autant à la propagation du défaut qu'une énergie de traction [HAB 16]. On choisi d'éliminer artificiellement les zones en compression de l'intégrale *(hypothèse H6)*. Pour cela nous considérons une dissymétrie traction/compression dans la formulation de l'énergie considérée, en se basant sur la méthode développée par Badel dans [BAD 01]. Ainsi, en se plaçant dans le repère propre des déformations, on adoptera l'énergie élastique suivante :

$$\Phi_t^{el}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{el}\right)=\frac{\lambda}{2}tr\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{el}\right)^2 H\left(tr\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{el}\right)\right)+\mu\sum_i\left(\varepsilon_i^{el}\right)^2 H\left(\varepsilon_i^{el}\right) \tag{10}$$

où λ et μ désignent les coefficients de Lamé qui caractérisent le tenseur de rigidité. Les valeurs propres du tenseur de déformation élastique sont notées ε_i^{el}. H est la fonction d'Heaviside telle que :

$$H(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases} \tag{11}$$

3.3 Extension au cadre élastoplastique

Dans le cas d'un comportement élastoplastique, la définition de l'énergie incrémentale totale E_{tot} est étendue par Lorentz *et al.* [LOR 00], moyennant la définition de nouveaux potentiels globaux énergie libre et dissipation . On se restreint ici au cadre des matériaux isotropes . L'état d'un point matériel est décrit par sa déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$, son endommagement χ , mais aussi par sa déformation plastique $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ et des variables internes α caractérisant l'écrouissage. On suppose :

- que la **dissipation plastique est découplée de celle liée à l'endommagement** (matériaux quasi-fragiles), *(hypothèse H7)* . Le potentiel de dissipation plastique D_{pl} dépend donc des seules variables internes plastiques.
- que l'énergie bloquée par l'écrouissage dans les dislocations E_{bl} n'est pas restituable par le mécanisme de fissuration *(hypothèse phénoménologique H8)* . On considère ainsi l'expression suivante de l'énergie potentielle incrémentale :

$$E_{tot}\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\alpha,\chi\right)=\int_\Omega\left[\left(1-\chi\right)\Phi_t^{el}+\chi w_C\right]d\Omega+E_{bl}(\alpha)+D_{pl}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p,\Delta\alpha\right)-W_{ext}\left(\boldsymbol{u}\right) \tag{12}$$

où Δ désigne la variation d'une grandeur durant l'incrément considéré.

4 Définition d'un critère d'amorçage en élastoplasticité

En vertu des résultats relatifs aux formulations énergétiques développées par Francfort et Marigo, la solution du problème élastoplastique avec endommagement minimise l'énergie potentielle (12) *(hypothèse H9)* . L'intégration des équations de comportement s'écrit comme le minimum de l'énergie potentielle par rapport aux variables internes $\left(\boldsymbol{\varepsilon}^p,\alpha\right)$, les équations d'équilibre s'expriment comme le minimum de l'énergie potentielle par rapport au champ de déplacement $\boldsymbol{u}$. Enfin, l'évolution de l'endommagement est gouvernée par le minimum de l'énergie potentielle par rapport à χ .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La question de l'amorçage peut être formulée de la manière suivante [LOR 08] : à un état donné $\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha\right)$ correspondant à une évolution quasi-statique sans propagation de l'entaille, la solution sans propagation $\Delta a=0$ est-elle toujours licite au regard de la minimisation de (12) ? Si oui, alors on postule qu'il n'y a pas amorçage *(hypothèse H10)*. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si l'optimum n'est pas atteint en $\Delta a=0$, on postule qu'il y a propagation.

On considère ainsi qu'**il n'y a pas amorçage de défaut** tant que la solution élastoplastique sans évolution de l'endommagement est une solution du problème, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha\right) = \underset{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha}{argmin}\, E_{tot}\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha, \chi=0\right) \\ \text{et} \\ \forall \Delta a>0 \quad E_{tot}\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha, \chi=0\right) \leqslant E_{tot}\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha, \chi(\Delta a)\right) \end{cases} \tag{13}$$

Ainsi, en exprimant la deuxième ligne grâce à l'équation (12), on obtient après simplification que $\forall \Delta a>0$, il n'y a pas amorçage du défaut tant que :

$$\int_\Omega \Phi_t^{el}\left(\varepsilon(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{\varepsilon}^p\right) d\Omega \leqslant \int_\Omega \left[\left(1-\chi(\Delta a)\right)\Phi_t^{el}\left(\varepsilon(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{\varepsilon}^p\right)+\chi(\Delta a) w_C\right] d\Omega \tag{14}$$

Par la suite, nous omettrons l'argument de l'énergie élastique adoptée pour soulager l'expression. En développant d'une part l'intégrale de gauche et de droite sur les domaines $C\left(\Delta a\right)$ et $\Omega \backslash C\left(\Delta a\right)$, et en utilisant la définition du champ d'endommagement (6) d'autre part, il vient après simplification :

$$\int_{\Omega \backslash C(\Delta a)} \Phi_t^{el} d\Omega + \int_{C(\Delta a)} \Phi_t^{el} d\Omega \leqslant \int_{\Omega \backslash C(\Delta a)} \Phi_t^{el} d\Omega + \int_{C(\Delta a)} w_C d\Omega \tag{15}$$

Or, d'après (5) :

$$\int_{C(\Delta a)} w_C d\Omega = w_c \times \Delta a \times D \tag{16}$$

L'inégalité (13) s'exprime alors comme ci-dessous :

$$\forall \Delta a>0 \qquad \frac{\int_{C(\Delta a)} \Phi_t^{el} d\Omega}{\Delta a} \leqslant w_c \times D \tag{17}$$

On définit le terme de gauche $\widetilde{G}_p\left(\Delta a\right)$ tel que :

$$\widetilde{G}_p\left(\Delta a\right) = \frac{\int_{C(\Delta a)} \Phi_t^{el} d\Omega}{\Delta a} \tag{18}$$

Et on définit le terme de droite $G_{pc} = w_c \times D$ comme l'énergie de fissuration du matériau. La condition de non amorçage s'écrit alors :

$$\forall \Delta a>0, \quad \widetilde{G}_p\left(\Delta a\right) \leqslant G_{pc} \tag{19}$$

On définit alors le paramètre G_p comme la valeur maximale de la fonction $\widetilde{G}_p\left(\Delta a\right)$:

$$G_p = \underset{\Delta a}{max}\, \widetilde{G}_p\left(\Delta a\right) \tag{20}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le critère de non réamorçage s'écrit $G_p \leqslant G_{pc}$. Le critère d'amorçage peut alors s'écrire $G_p > G_{pc}$. Ce critère implique la connaissance de deux paramètres matériau, w_c et D. Pour des raisons pratiques, on préfère choisir D et G_{pc}. Ces paramètres nécessitent donc une identification (voir le paragraphe §6.2).

Le paramètre G_p est calculé comme le maximum (par rapport à Δa, longueur de propagation virtuelle) de l'intégrale sur le domaine $C(\Delta a)$ de l'énergie libre modifiée Φ_t^{el}, divisée par Δa. C'est donc une densité d'énergie élastique moyenne (kJ/m^2). Ce n'est pas ici un taux de restitution d'énergie car l'énergie considérée pour la minimisation est celle de l'instant courant, et n'inclue pas le rééquilibrage des champs après propagation.
A l'instar du K_J $(MPa.m^{1/2})$, défini à partir de J de manière similaire à la relation d'Irwin $J = \frac{(1-\nu^2)}{E} K_J^2$ - valable en 2D déformation plane et en 3D -, on peut aussi définir un paramètre K_{G_p} $(MPa.m^{1/2})$ à partir de G_p à l'aide de cette même relation :

$$G_p = \frac{(1-\nu^2)}{E} K_{G_p}^2 \tag{21}$$

5 Lien entre approche globale et locale

Lorentz [LOR 08] et Wadier [WAD 07b] positionnent l'approche énergétique G_p par rapport aux approches globales et locales de la rupture. Plus récente que l'approche globale en mécanique de la rupture, l'approche locale vise à prédire la ruine d'une structure en s'appuyant sur le mécanisme microscopique du clivage. Elle rend compte de la dispersion des résultats par une modélisation intrinsèquement probabiliste. Le modèle de Beremin, par exemple, définit la probabilité de rupture et la contrainte de Weibull σ_w au temps t par :

$$P_R(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\max_{\tau \leq t} \sigma_w(\tau)}{\sigma_c} \right)^m \right] \quad ; \quad \sigma_w(\tau) = \left[\frac{1}{V_0} \int_{\Omega_p(\tau)} \sigma_I(\tau)^m \, d\Omega \right]^{\frac{1}{m}} \tag{22}$$

avec $\sigma_I(t)$ et $\Omega_p(t)$ la contrainte principale maximale et le domaine en cours de plastification au temps respectivement. V_0 est un volume de référence, σ_c la contrainte critique et m un exposant sans dimension. Ainsi, l'expression de la probabilité de rupture est basée notamment sur l'hypothèse du maillon faible, i.e. la ruine est associée à l'amorçage du défaut microscopique le plus pénalisant. Dans un soucis de comparaison entre les deux modèles, on peut définir une probabilité de rupture de l'approche G_p par la formule :

$$P_R(t) = 1 - \exp\left[-a \left(\frac{G_p}{G_{p0}} \right)^{m/2} \right] \tag{23}$$

où a et m sont des constantes identifiées à partir des résultats expérimentaux, et G_{p0} une constante telle que P_r soit égal à 5 % quand G_p est égal à la valeur identifiée pour une probabilité de rupture de 5 %.

La comparaison entre les deux approches fait apparaître un certain nombre de liens. Les grandeurs intervenant dans le critère d'initiation (énergie élastique ou contrainte) sont similaires. Ces grandeurs sont moyennées sur une zone située au voisinage du fond d'entaille. Enfin, on peut être conduit à prendre en compte la contrainte hydrostatique [WAD 07b].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le modèle de Beremin permet une prise en compte naturelle de la distinction traction/compression grâce à l'introduction de la contrainte principale maximale plutôt que celle de l'énergie élastique. A l'inverse, l'approche G_p offre une transition plus simple avec les approches antérieures du domaine industriel. Elle permet de faire le lien avec l'approche globale classique car elle est fondée comme elle sur des principes énergétiques : $G_p = G$ entaille en élasticité [LOR 14].

6 Mise en œuvre dans *Code_Aster*

Le calcul mécanique est réalisé sous l'hypothèse d'un comportement thermo-élasto-plastique associé à un critère de Von Mises avec écrouissage isotrope ou cinématique linéaire (VMIS_ISOT_TRAC, VMIS_ISOT_LINE, VMIS_CINE_LINE). Nous allons préciser en quoi consiste le calcul de G_p et comment s'effectue l'identification des paramètres matériaux $R = D/2$ (rayon de l'entaille) et G_{pc} (limite de rupture).
La méthodologie de calcul et d'identification avec Code_Aster est présentée dans [U2.05.08]. La documentation d'utilisation simple est dans [U4.82.31].

6.1 Calcul de Gp

Le calcul de G_p, réalisé à l'aide de la macro commande CALC_GP, est basé sur l'utilisation de POST_ELEM qui permet le calcul de l'énergie élastique sur un groupe de mailles. Les modélisations (éléments finis, petites déformations, etc.) et chargements utilisables sont ceux de la commande POST_ELEM, mot clé ENER_ELTR. Plus précisément il s'agit, pour chaque instant prévu dans la liste des instants de calcul, de réaliser les deux étapes suivantes :

1/ Tout d'abord calculer la quantité $\widetilde{G}_p(\Delta a)$ pour des valeurs croissantes de Δa par:

$$\widetilde{G}_p(\Delta a) = \frac{\int_\Omega \Phi_t^{el} \, d\Omega}{\Delta a}$$

En 2D il faut donc identifier les éléments de la zone $C(\Delta a)$ par un groupe de mailles défini au niveau du maillage comme présenté en [Figure 2-a], ou par une zone géométrique de points de Gauss, puis calculer l'énergie élastique sur cette zone puis la diviser par Δa.
Pour identifier les éléments de la zone $C(\Delta a)$ on opérera comme suit : les éléments du premier copeau constitueront un premier groupe de mailles, les éléments des copeaux 1 et 2 constitueront un second groupe, les éléments des copeaux $1, 2, 3, \ldots, i$ constitueront un $i^{\text{ème}}$ groupe, etc. Il faut prévoir un nombre de copeaux suffisamment grand pour pouvoir trouver le maximum de $\widetilde{G}_p(\Delta a)$, qui se trouve le plus souvent à une distance d'environ $3R$ du fond d'entaille.

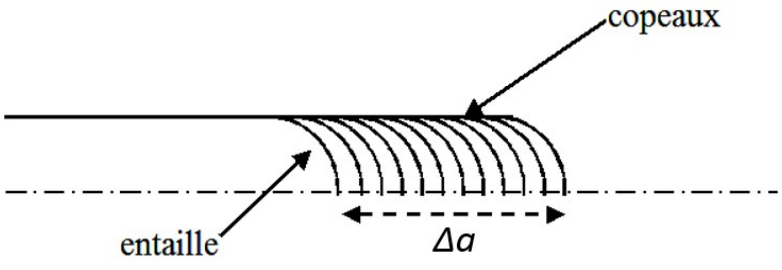


Figure 6.1-1 - Définition des copeaux dans le maillage

2/ Ensuite il s'agit d'identifier le maximum de cette fonction :

$$G_p = \max_{\Delta a} \widetilde{G}_p(\Delta a)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On trouvera des exemples et conseils d'utilisation dans le document [**U2.05.01**], dans les tests ssnp131 (voir [V6.03.131] et ssnv218 (voir [V6.04.218]).

6.2 Identification des paramètres

Le modèle énergétique est basé sur le couple de paramètres matériaux (G_{pc}, R) qu'il s'agit donc de déterminer à chaque température . On note que G_{pc} dépend en réalité du rayon d'entaille [WAD 13] . Nous verrons que l a prédiction de la rupture n'en dépend pas.

On suppose connu s d'une part le module d'Young E et la contrainte critique σ_c d'un matériau. D'autre part, on fait l'hypothèse de connaître la ténacité K_{Jc} évaluée expérimentalement à partir d'un essai de traction sur une éprouvette CT, par exemple . L'application du « minimum par rapport à l'endommagement » à l'échelle d'un point matériel dans un état de contrainte en traction simple donne la relation entre l'énergie volumique dissipée par un point matériel qui s'endommage w_c et la contrainte critique [WAD 13] *(hypothèse H11)* :

$$w_c = \frac{\sigma_c^2}{2E} \tag{24}$$

On obtient alors l'équation suivante qu'il faut résoudre pour identifier les deux paramètres :

$$G_{pc}(R) = \frac{\sigma_c^2}{E} R \tag{25}$$

Le membre de gauche $G_{pc}(R)$ est une fonction non linéaire de R . Le membre de droite est une fonction linéaire de R . Ainsi, pour résoudre (25) il s'agit de calculer G_{pc} pour différentes valeurs de R comme l'illustre la figure [Figure 6.2-1].

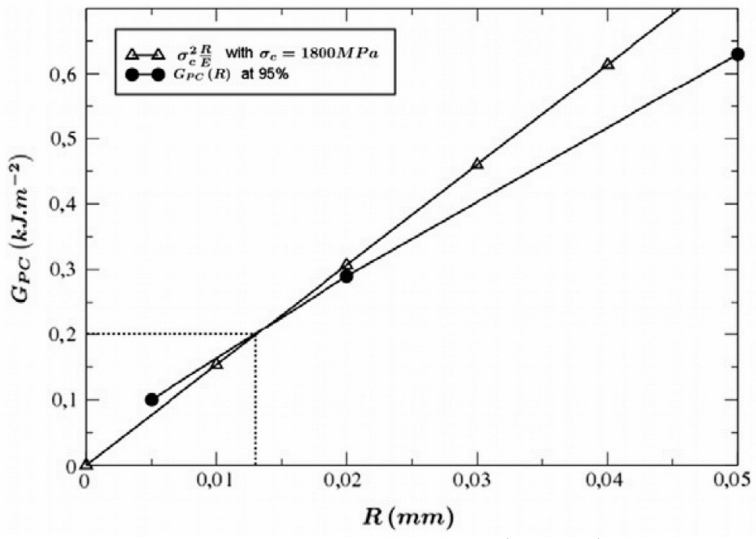


Figure 6.2-1: identification du couple (G_{pc}, R) [WAD 13]

Pour chaque entaille de rayon R donné, le paramètre G_{pc} est déterminé par simulation d'un essai sur éprouvette CT de la manière suivante : pour chaque valeur du chargement, croissant de 0 jusqu'à une

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

valeur critique, on calcule d'une part le paramètre K_J et d'autre part le paramètre G_p. Pour la valeur critique du chargement correspondant à $K_J = K_{Jc}$, on obtient $G_p = G_{pc}$ *(Hypothèse H12)*.

La résolution de l'équation (25) pour différentes valeurs de R, permet finalement de déterminer et la valeur de R et la valeur de G_{pc} à une température donnée. Dans le cadre d'un acier, on trouve des valeurs comprises entre 10 et 100 microns, ce qui est représentatif d'une fissure réelle.

7 Bibliographie

La bibliographie est volontairement exhaustive. Le paragraphe 7.1 liste les références académiques : thèses articles et congrès. Le paragraphe 7.2 liste certaines documentations internes EDF (CR, notes). Toutes ne sont pas citées dans le corps du texte.

7.1 Références

[BAD 01] Badel P.-B., Contributions à la simulation numérique de structures en béton armé. Thèse de doctorat de l'Université Paris VI, 2001

[FRA 93] Francfort G.-A., Marigo J.-J., Stable damage evolution in a brittle continuous medium. Eur J Mech A Solids 12 (2):149-189, 1993

[FRA 98] Francfort G.-A., Marigo J.-J., Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 46 (8):1319-1342, 1998

[GEN 16] Geniaut S., Haboussa D., An approach to predict cleavage fracture under tensile or compressive loadings, PVP2016-63159, 2016, Vancouver, Canada

[HAB 17] Haboussa D., Geniaut S., Correction en compression de l'approche Gp, 13ème Colloque National en Calcul des Structures (CSMA 2017), 15-19 Mai 2017, Giens, France

[JUL 17] Jules S., Geniaut S., Debruyne G., Méthode Gp : une approche énergétique de la prédiction du clivage, 13ème Colloque National en Calcul des Structures (CSMA 2017), 15-19 Mai 2017, Giens, France

[LOR 00] Lorentz E., Wadier Y., Debruyne G., Mécanique de la rupture fragile en présence de plasticité : définition d'un taux de restitution d'énergie. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics 328 (9):657-662, 2000

[LOR 04] Lorentz E., Wadier Y., L'approche énergétique de la rupture élastoplastique appliquée à la modélisation de la propagation d'une entaille. Revue Européenne des Éléments Finis 13:583-592, 2004

[LOR 08] Lorentz L., Modélisation et simulation numérique de l'endommagement des structures, 2008

[WAD 00] Wadier Y., Debruynes G., New energetic parameters for cleavage fracture and ductile tearing: application to the analysis of a subclad flaw located in a pressure vessel of a PWR, ASME PVP 2000, Seattle

[WAD 01a] Wadier Y., Lorentz E., The energetic approach of elastic-plastic fracture mechanics applied to the problem of unloading, SMIRT 16, 2001, Washington

[WAD 01b] Wadier Y., Lorentz E., New considerations and results on crack separation energy rates in elastic-plastic fracture mechanics, ICF 10, 2001, Honolulu

[WAD 03a] Wadier Y., Bonnamy M., The energy approach of elastic-plastic fracture mechanics applied to the analysis of the shallow crack effect. In: ASME PVP, Cleveland, USA, 2003

[WAD 03b] Wadier Y., Bonnamy M., The energy approach of elastic-plastic fracture mechanics applied to the analysis of the warm pre-stress effect. In: ASME PVP, Cleveland, USA, 2003

[WAD 03c] Wadier Y., Bonnamy M., The energetic approach of elastic-plastic fracture mechanics applied to the problem of the shallow crack effect, SMIRT 17, 2003

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

[WAD 04] Wadier Y., Lorentz E., Mécanique de la rupture fragile en présence de plasticité : modélisation de la fissure par une entaille, Comptes Rendus Mécanique, 332, pp 979-986, 2004

[WAD 05] Wadier Y., Bonnamy M., The energy approach of elastic-plastic fracture mechanics applied to the analysis of a WPS experiment on a cracked cylinder. In: ASME PVP, Denver, USA, 2005

[WAD 07a] Wadier Y., Mézières Y., The energetic approach of EPFM applied to the prediction of shallow crack effect, warm pre-stress effect and crack arrest, ASTM/ESIS Symposium on Fatigue and Fracture, Tempa 2007

[WAD 09] Wadier Y., Mézières Y., Bonnamy M., 3D analysis of tests on CT_POR specimens submitted to WPS cycles using the energy approach of Elastic Plastic Fracture Mechanics, ICF 12, 2009, Ottawa

[WAD 13] Wadier Y., Le H.-N., Bargellini R., An energy approach to predict cleavage fracture under non-proportional loading, Engineerin Fracture Mechanics, 97, 30-51, 2013

7.2 Documents EDF (notes, CR, présentation, documents Code_Aster)

[BAR 11a] Bargellini R., Comparaison des approches Gp et Beremin : synthèse des travaux de Post-Doctorat de Le Hoai Nam, **H-B30-2010-02909-FR**, 2011

[BAR 11b] Bargellini R., Synthèse sur l'approche Gp à la fin du projet ANODE 2008-2011, **CR-AMA.11.292**, 2011

[BAR 12] Bargellini R., S'affranchir des copeaux pour la méthode Gp en 2D : stratégie choisie et performances, **CR-AMA-12.272**, 2012

[BAR 14] Bargellini R. , Laverne J. , Étude d'influence du rayon d'entaille et de la taille des copeaux sur la prédiction du modèle Gp, **CR-T64-2014-139** , 2014

[DEB 14] Debruyne G., Projet ANODE. Simulation de l'amorçage de défauts en clivage : Modélisation par un modèle cohésif et par le paramètre "Gp", **H-T64-2014-01785-FR**, 2014

[HAB 16] Haboussa D., Debruyne G., Proposition d'une méthodologie d'analyse de nocivité en présence de compression pour le clivage : modification de l'approche Gp, **CR-T66-2015-252**, 2016

[JUL 17] Projet CUVE LP5.2 : Application de l'approche Gp à un cas industriel pour la cuve, **6125-1716-2016-17310-FR**, 2017

[JUL 18] Application of the Gp approach and size effect investigation using the experimental test program PEX1987, **6125-1716-2018-00797-EN**, 2018

[LOR 14] Lorentz E., Bargellini R., Cohérence entre le paramètre Gp et le taux de restitution d'énergie Gf en élasticité linéaire, **CR-AMA-14.009**, 2014

[MEZ 06] Méziere Y., Wadier Y., L'approche énergétique en mécanique de la rupture, présentation à la Journée annuelle des utilisateurs du Code_Aster, 2006

[MEZ 12] Mézières Y., Validation de l'approche énergétique Gp pour prédire l'amorçage des défauts dans le domaine fragile, **ENRETM120003**, 2012

[MOI 14] Moinereau D., Évaluation et validation du phénomène de préchargement à chaud (WPS) sur la résistance des aciers ferritiques vis-à-vis de la rupture brutale. Synthèse générale des actions de R&D, **H-T24-2014-06976-FR**, 2014

[MOI 15] Moinereau D., Landron C., Ait-Bachir M., Tanguy B., Jacquemoud C., Yuritzinn T., Chapuliot S., Marie S., Effet de préchargement à chaud : de la R&D à la codification dans le RSE-M, dossier de candidature SFEN 2015

[WAD 03d] Wadier Y. , Présentation succincte de l'approche énergétique de la rupture élastoplastique appliquée à la rupture par clivage, HT-64/03/001/A, référence Eureka : **H-T64-2003-00078-FR**, 2003

[WAD 07b] Wadier Y., Lien entre les approches globale et locale en mécanique de la rupture élastoplastique, **H-T64-2007-00213-FR**, 2007

[WAD 10] Wadier Y., Projet ANODE : réunion de bilan du Post-Doc de Hoaï Nam Le sur la comparaison des approches Gp et Beremin en mécanique de la rupture fragile, **CR-AMA-10.330**, 2010

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
10.4	Y. WADIER EDF R&D AMA	Texte initial
13	S. JULES EDF R&D AMA	Nouvelle présentation de la méthode

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)