Loi élasto-visco-plastique NLH_CSRM pour les géomatériaux

Résumé : Ce document présente les principales équations de la loi de comportement NLH_CSRM (Non-Linear Hardening Critical State Rock Model) ainsi que son algorithme d'intégration numérique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Le modèle NLH_CSRM remplacera, à terme, les lois de comportement **LKR** [RAU17] et LETK [FER13]. Ce travail de « modernisation » s'inscrit dans les actions de développement du projet EDF-R&D de « Gestion des Déchets Radioactifs » (GDR2).

Le périmètre d'utilisation du modèle NLH_CSRM est pour l'instant limité au comportement **mécanique isotrope**. La prise en compte de **l'anisotropie structurelle** [DJO18] et de la dépendance des écrouissages à la **température** [RAU15] — effective dans la dernière version du modèle LKR — fera l'objet de prochaines restitutions ; de même que la dépendance des critères au troisième invariant du déviateur des contraintes (angle de Lode).

Le modèle NLH_CSRM s'inscrit dans le **cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés** à deux mécanismes irréversibles,

- **Mécanisme plastique** — comportement irréversible **instantané :** écrouissages durcissant et/ou adoucissant, comportement volumique contractant ou dilatant, influence de la contrainte moyenne sur le caractère fragile de la réponse en compression,… ;
- **Mécanisme viscoplastique** — comportement irréversible **différé** (de type Perzyna [PER71]) : fluages primaire, secondaire, et tertiaire (ruine).

Un **couplage entre ces deux mécanismes** permet — entre autres — de représenter la dépendance de la résistance maximale de certains géomatériaux à la vitesse de sollicitation.

Ces travaux de « modernisation » sont motivés par la volonté d'accroître la robustesse et l'efficacité du modèle utilisé pour décrire le comportement de l'argilite du Callovo-Oxfordien — roche hôte constituant la première barrière géologique de Cigéo — afin de pouvoir envisager son utilisation sur des problèmes 3D exigeants en mémoire et en temps de calcul.

2 Équations constitutives

2.1 Énergie libre

L'énergie libre se met sous la forme générale suivante,

$$\psi\left(\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{\epsilon^p},\boldsymbol{\epsilon^v},\boldsymbol{\alpha^p},\boldsymbol{\alpha^v}\right)=\psi^e\left(\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{\epsilon^p},\boldsymbol{\epsilon^v}\right)+\psi^p\left(\boldsymbol{\alpha^p}\right)+\psi^v\left(\boldsymbol{\alpha^v}\right) \tag{2.1}$$

avec,

$$\begin{cases}\psi^e\left(\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{\epsilon^p},\boldsymbol{\epsilon^v}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon^p}-\boldsymbol{\epsilon^v}\right):\mathbb{C}:\left(\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon^p}-\boldsymbol{\epsilon^v}\right)\\ \psi^p\left(\boldsymbol{\alpha^p}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{\alpha^p}:\mathbb{H}^p:\boldsymbol{\alpha^p}\right)=\dfrac{H^p}{2}\left(\boldsymbol{\alpha^p}:\boldsymbol{\alpha^p}\right)\\ \psi^v\left(\boldsymbol{\alpha^v}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{\alpha^v}:\mathbb{H}^v:\boldsymbol{\alpha^v}\right)=\dfrac{H^v}{2}\left(\boldsymbol{\alpha^v}:\boldsymbol{\alpha^v}\right)\end{cases} \tag{2.2}$$

$\boldsymbol{\epsilon}$ est le tenseur des déformations, $\boldsymbol{\epsilon^p}$ est le tenseur des déformations plastiques, $\boldsymbol{\epsilon^v}$ est le tenseur des déformations viscoplastiques, $\mathbb{C}=3K\mathbb{J}+2\mu\mathbb{K}$ est le tenseur de Hooke — K et μ sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement, $\mathbb{J}$ et $\mathbb{K}$ sont respectivement les projecteurs sphérique et déviatorique — $\boldsymbol{\alpha^p}$ et $\boldsymbol{\alpha^v}$ sont des variables d'état respectivement associées aux mécanismes plastique et viscoplastique, $H^p\geq 0$ et $H^v\geq 0$ sont homogènes à des modules d'écrouissage [Pa] ; ce sont des paramètres matériau du modèle.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Forces thermodynamiques

Les forces thermodynamiques associées aux variables d'état $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\epsilon^p}$, $\boldsymbol{\epsilon^v}$, $\boldsymbol{\alpha^p}$, et $\boldsymbol{\alpha^v}$ sont respectivement,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \partial_{\boldsymbol{\epsilon}} \psi = \mathbb{C} : \left(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon^p} - \boldsymbol{\epsilon^v} \right) \\ \boldsymbol{A^p} = -\partial_{\boldsymbol{\epsilon^p}} \psi = \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{A^v} = -\partial_{\boldsymbol{\epsilon^v}} \psi = \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{B^p} = -\partial_{\boldsymbol{\alpha^p}} \psi = -H^p \boldsymbol{\alpha^p} \\ \boldsymbol{B^v} = -\partial_{\boldsymbol{\alpha^v}} \psi = -H^v \boldsymbol{\alpha^v} \end{cases} \tag{2.3}$$

2.3 Critères de plasticité et viscoplasticité

L'évolution de la résistance maximale des géomatériaux cohésifs en fonction de la contrainte moyenne, $\sigma_m = \frac{\sigma_{kk}}{3}$, est généralement non-linéaire. Les critères de plasticité les plus utilisés en mécanique des roches sont couramment inspirés des travaux de Hoek & Brown [HB19],

$$F^{HB}(\boldsymbol{\sigma}) := \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_c \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^a \tag{2.4}$$

où $\sigma_c > 0$ [Pa] représente la résistance à la compression simple, $0 \leq s \leq 1$ [-] est un paramètre de « cohésion », et $0 < a \leq 1$ [-] est un paramètre lié au caractère « dilatant » du matériau. $\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq -\frac{s}{\sigma_c}$ sont respectivement les contraintes principales majeure et mineure.

Les critères utilisés dans les modèles `LETK` et `LKR` constituent des généralisations — écrites en fonction des invariants du tenseur des contraintes et de son déviateur — du critère de Hoek-Brown.

Le principal inconvénient de ces critères « paraboliques » est qu'ils ne se referment pas sur l'axe hydrostatique. L'application de la loi de normalité de l'écoulement plastique produit donc uniquement des déformations plastiques volumiques dilatantes pour toute contrainte moyenne σ_m. Par conséquent, les géomécaniciens ont souvent recours à des formulations dites « non-associées » ; lesquelles permettent de mieux représenter la transition contractance/dilatance (état caractéristique) et l'état critique, ($\dot{\epsilon}_v^p = 0$ aux « grandes déformations ») observés chez la plupart des géomatériaux.

Le recours à la non-associativité ne permet — *a priori* — pas d'assurer le respect du cadre des matériaux standards généralisés, lequel garantit généralement de bonnes propriétés de convergence numérique des lois de comportement.

La forme de critère sélectionnée — dans le cadre de cette démarche de modernisation — s'appuie sur les travaux de [BP04]. Le critère proposé par [BP04] peut être considéré comme une évolution du critère elliptique de Cam-Clay [RSW58], qui permet de distordre l'ellipse initiale en ovoïdes plus ou moins déformés. L'expression générale des critères de plasticité et viscoplasticité est donnée par,

$$F^\star\left(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{B}^\star; \epsilon_v^p, \epsilon_v^v\right) := \frac{1}{p_c^i} \left[\left(\frac{X_{eq}^\star}{M} \right)^2 + \left(\frac{B_{eq}^\star}{N} \right)^2 - f^\star\left(\sigma_m; \epsilon_v^p, \epsilon_v^v\right) \right] \tag{2.5}$$

avec $\boldsymbol{X}^\star = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{B}^\star$, $T_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{T_d} : \boldsymbol{T_d})}$, $\boldsymbol{T_d} = \mathbb{K} : \boldsymbol{T}$, $p_c^i > 0$ [Pa] est assimilée à une contrainte de pré-consolidation (au sens de Cam-Clay) en compression isotrope (intersection de F^p avec l'axe hydrostatique côté compression), $M > 0$ [-] est la pente d'état critique originelle du critère de Cam-Clay, $N > 0$ [-] est un paramètre matériau intervenant dans l'expression d'une nouvelle pente d'état critique (translatée par écrouissage cinématique), $f^\star$ est une fonction de l'état de contrainte moyen, qui prend des formes mathématiques différentes pour les surfaces plastique et viscoplastique,

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} f^p = \left(\phi - \phi^{m_B}\right)\left(2\left(1-a_B\right)\phi + a_B\right)p_c^2 \\ f^v = \phi\left(2\left(1-a_B\right)\phi + a_B\right)p_c^2 \end{cases} \tag{2.6}$$

avec,

$$\phi = \frac{-\sigma_m e^{\omega\left(\epsilon_v^p + \epsilon_v^v\right)} + c^i}{p_c^i + c^i}, \quad p_c = p_c^i e^{-\omega\left(\epsilon_v^p + \epsilon_v^v\right)} \tag{2.7}$$

Les formes choisies pour f^p et f^v conduisent respectivement à des critères de plasticité et viscoplasticité fermé et ouvert (Fig. 1). Ce choix est motivé par la volonté de pouvoir — 1. reproduire les transitions fragile/ductile et dilatance/contractance sous compression triaxiale « instantanée », i.e. reproduire la dépendance du comportement plastique à l'état de contrainte moyen — 2. s'affranchir de tout comportement différé lorsque l'état de contrainte est purement hydrostatique, i.e. pas de fluage sphérique ; lequel est très peu observé pour des matériaux cohésifs à faible porosité.

$c^i \geq 0$ [Pa] est assimilée à une limite d'élasticité en traction, $\omega \geq 0$ [-] contrôle la cinétique d'écrouissage « scalaire », $0 < a_B \leq 1$ [-] et $m_B \geq 1$ [-] sont les paramètres dits « de Bigoni », qui permettent de distordre l'ellipse originelle de Cam-Clay (Fig. 1).

Dans la suite du document, la convention de signe adoptée est celle de la **Mécanique des Milieux Continus**, i.e. compressions négatives, tractions positives.

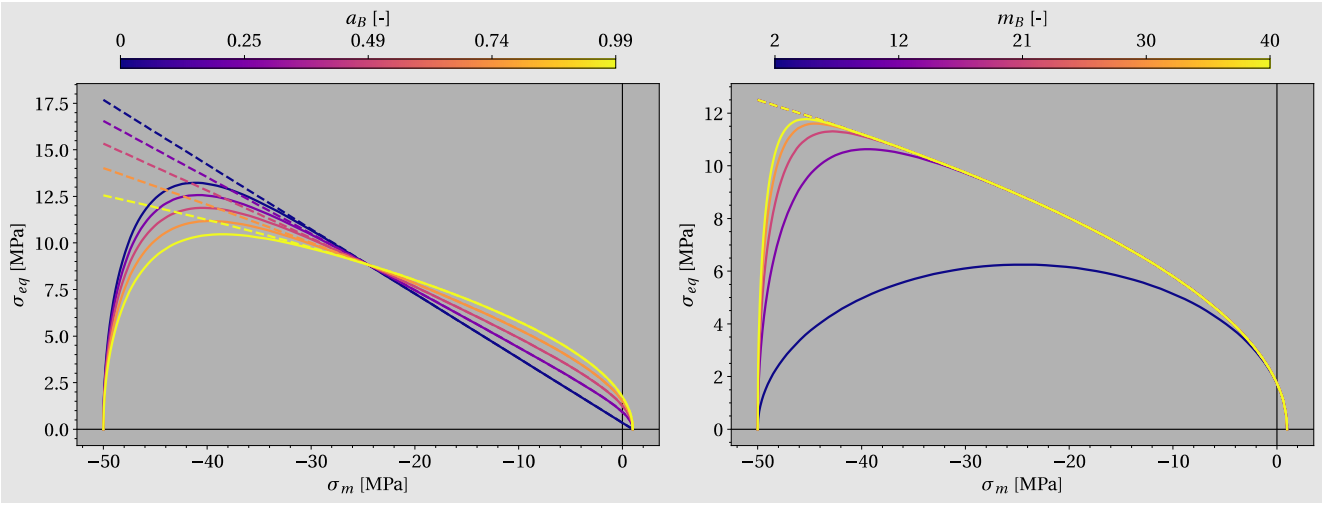


Figure 1: Limites d'élasticité initiales des mécanismes plastique (traits pleins) et viscoplastique (tirets) pour différentes valeurs des paramètres a_B et m_B

2.4 Écoulements plastique et viscoplastique

Les incréments des variables d'état sont donnés par la loi de normalité,

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\boldsymbol{p}} = \dot{\lambda}\left[\partial_{\boldsymbol{\sigma}} F^p\right] = \dot{\lambda}\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{p}} = \dot{\lambda}\left[\partial_{\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{p}}} F^p\right] = \dot{\lambda}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\boldsymbol{v}} = \varphi^v\left[\partial_{\boldsymbol{\sigma}} F^v\right] = \varphi^v\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{v}} = \varphi^v\left[\partial_{\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{v}}} F^v\right] = \varphi^v\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{v}} \end{cases} \tag{2.8}$$

où λ est le multiplicateur plastique — dont l'incrément est obtenu par l'application des conditions de compatibilité de Kuhn-Tucker [KT51] — et φ^v est un coefficient de viscosité, dont l'expression est inspirée des travaux de Perzyna [PER71],

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\varphi^{\nu} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\langle F^{\nu}\rangle}{E}\right)^{n_{\nu}} \tag{2.9}$$

$\tau > 0$ [s] est un temps caractéristique, $E > 0$ [Pa] est le module de Young, $\mathrm{n}_{\nu} > 1$ [-] est un paramètre qui contrôle la cinétique des phénomènes différés.

3 Intégration numérique

3.1 Inconnues et équations du système non-linéaire

Le modèle est intégré de manière implicite (`@DSL Implicit`) via l'outil `Mfront` [HMP+15] . Les variables internes « numériques » constituent le vecteur $\vec{Y} = \left\{\boldsymbol{\epsilon^e}, \lambda, \epsilon_{\nu}^{p}, \boldsymbol{\alpha^p}, \epsilon_{\nu}^{\nu}, \boldsymbol{\alpha^{\nu}}\right\}$. Dans le cas où les deux mécanismes sont actifs, i.e. $F^p > 0$ et $F^{\nu} > 0$ à l'issue de la phase de prédiction élastique (`@Predictor`), les équations constitutives du système non-linéaire à résoudre à l'instant $t + \Delta t$ pendant la phase de correction sont,

$$\vec{F}\left(\Delta\vec{Y}(\boldsymbol{\Delta\epsilon}), \boldsymbol{\Delta\epsilon}\right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta\epsilon^e} - \boldsymbol{\Delta\epsilon} + \Delta\lambda \boldsymbol{n^p} + \varphi^{\nu}\boldsymbol{n^{\nu}} \\ \frac{F^p}{E} \\ \Delta\epsilon_{\nu}^{p} - \Delta\lambda n_{kk}^{p} \\ \boldsymbol{\Delta\alpha^p} - \Delta\lambda \boldsymbol{m^p} \\ \Delta\epsilon_{\nu}^{\nu} - \varphi^{\nu} n_{kk}^{\nu} \\ \boldsymbol{\Delta\alpha^{\nu}} - \varphi^{\nu}\boldsymbol{m^{\nu}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\boldsymbol{\epsilon^e}} \\ f_{\lambda} \\ f_{\epsilon_{\nu}^{p}} \\ f_{\boldsymbol{\alpha^p}} \\ f_{\epsilon_{\nu}^{\nu}} \\ f_{\boldsymbol{\alpha^{\nu}}} \end{bmatrix} = \vec{0} \tag{3.1}$$

Le système non-linéaire est également résolu dans le cas où un seul des deux mécanismes est activé à l'issue de la phase de prédiction, i.e. $\left\{F^p < 0, F^{\nu} > 0\right\}$ ou $\left\{F^p > 0, F^{\nu} < 0\right\}$. Dans la suite du document, nous détaillerons uniquement les termes dérivant du système (3.1) ; les cas particuliers pour lesquels $\left\{F^p < 0, F^{\nu} > 0\right\}$ et $\left\{F^p > 0, F^{\nu} < 0\right\}$ peuvent être aisément déduits de (3.1) en prenant certains termes nuls.

Remarque : si l'utilisateur prend $\tau < 0$, le mécanisme viscoplastique est désactivé.

3.2 Directions d'écoulements

Les directions d'écoulements associées à $\boldsymbol{\epsilon^p}$, $\boldsymbol{\alpha^p}$, $\boldsymbol{\epsilon^{\nu}}$, et $\boldsymbol{\alpha^{\nu}}$ sont respectivement données par,

$$\begin{cases} \boldsymbol{n^p} = \dfrac{1}{p_c^i}\left(\dfrac{3\boldsymbol{X_d^p}}{M^2} - \left(\dfrac{\partial f^p}{\partial\phi}\right)\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial\sigma_m}\right)\dfrac{\boldsymbol{\delta}}{3}\right) \\ \boldsymbol{m^p} = \dfrac{3}{p_c^i}\left(\dfrac{\boldsymbol{X_d^p}}{M^2} + \dfrac{\boldsymbol{B_d^p}}{N^2}\right) \\ \boldsymbol{n^{\nu}} = \dfrac{1}{p_c^i}\left(\dfrac{3\boldsymbol{X_d^{\nu}}}{M^2} - \left(\dfrac{\partial f^{\nu}}{\partial\phi}\right)\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial\sigma_m}\right)\dfrac{\boldsymbol{\delta}}{3}\right) \\ \boldsymbol{m^{\nu}} = \dfrac{3}{p_c^i}\left(\dfrac{\boldsymbol{X_d^{\nu}}}{M^2} + \dfrac{\boldsymbol{B_d^{\nu}}}{N^2}\right) \end{cases} \tag{3.2}$$

avec,

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f^p}{\partial \phi} = p_c^2 \left[\left(1 - m_B \phi^{m_B - 1}\right) \left(2\left(1 - a_B\right)\phi + a_B\right) + 2\left(\phi - \phi^{m_B}\right)\left(1 - a_B\right) \right] \\ \dfrac{\partial f^v}{\partial \phi} = p_c^2 \left(4\phi\left(1 - a_B\right) + a_B\right) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \sigma_m} = -\dfrac{e^{\omega\left(\epsilon_v^p + \epsilon_v^v\right)}}{p_c^i + c^i} \end{cases} \tag{3.3}$$

3.3 Opérateur tangent

3.3.1 Expression de l'opérateur tangent

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ à $t + \Delta t$ est supposé fonction de $\vec{Y}_{|t+\Delta t}$ et $\boldsymbol{\epsilon}_{|t+\Delta t}$,

$$\boldsymbol{\sigma}\left(\vec{Y}_{|t+\Delta t}, \boldsymbol{\epsilon}_{|t+\Delta t}\right) \tag{3.4}$$

L'opérateur tangent cohérent est donné par,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\Delta\epsilon}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\Delta\epsilon}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \vec{Y}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\Delta \vec{Y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\Delta\epsilon}}\right) \tag{3.5}$$

Par ailleurs, par différenciation,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\Delta\epsilon}} = \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \Delta \vec{Y}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\Delta \vec{Y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\Delta\epsilon}}\right) + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \boldsymbol{\Delta\epsilon}} = 0 \tag{3.6}$$

$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \Delta \vec{Y}} = J$ est la matrice jacobienne du système non-linéaire à résoudre. Finalement, l'opérateur tangent s'exprime,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\Delta\epsilon}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\Delta\epsilon}} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \vec{Y}}\right) J^{-1} \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \boldsymbol{\Delta\epsilon}}\right) \tag{3.7}$$

L'équation (3.7) peut être simplifiée dans le cas particulier où, 1 — $\boldsymbol{\Delta\epsilon}$ n'apparaît que dans $f_{\boldsymbol{\epsilon}^e}$ (partition du tenseur des déformations), et 2 — $\boldsymbol{\sigma}$ ne dépend que de $\boldsymbol{\Delta\epsilon^e}$ via la loi de Hooke. Dans ce cas-là, $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \boldsymbol{\Delta\epsilon}}$ prend la forme suivante,

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \boldsymbol{\Delta\epsilon}} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

et le produit $J^{-1}\ \frac{\partial \vec{F}}{\partial \boldsymbol{\Delta\epsilon}}$ ne fait intervenir que les six premières colonnes de J^{-1} ; sous-matrice que nous notons $J^{-1}_{\boldsymbol{\epsilon}^e}$. Par ailleurs, la loi de Hooke, donne,

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\Delta\epsilon}} = \mathbb{C} : \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Delta\epsilon^e}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\Delta\epsilon}} = \mathbb{C} : J_{\boldsymbol{\epsilon^e}}^{-1} \tag{3.9}$$

$J_{\boldsymbol{\epsilon^e}}^{-1}$ est obtenu à partir de J en utilisant la fonction `MFront getPartialJacobianInvert`.

3.3.2 Expression de la matrice jacobienne du système

Le matrice jacobienne du système $\vec{F}$, J, est donnée par,

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \Delta \vec{Y}} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial f_{\boldsymbol{\epsilon^e}}}{\partial \boldsymbol{\Delta\epsilon^e}} & \frac{\partial f_{\boldsymbol{\epsilon^e}}}{\partial \Delta\lambda} & \frac{\partial f_{\boldsymbol{\epsilon^e}}}{\partial \Delta\epsilon_v^p} & \frac{\partial f_{\boldsymbol{\epsilon^e}}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^p}} & \frac{\partial f_{\boldsymbol{\epsilon^e}}}{\partial \Delta\epsilon_v^v} & \frac{\partial f_{\boldsymbol{\epsilon^e}}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^v}} \\
\frac{\partial f_{\lambda}}{\partial \boldsymbol{\Delta\epsilon^e}} & \frac{\partial f_{\lambda}}{\partial \Delta\lambda} & \frac{\partial f_{\lambda}}{\partial \Delta\epsilon_v^p} & \frac{\partial f_{\lambda}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^p}} & \frac{\partial f_{\lambda}}{\partial \Delta\epsilon_v^v} & \frac{\partial f_{\lambda}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^v}} \\
\frac{\partial f_{\epsilon_v^p}}{\partial \boldsymbol{\Delta\epsilon^e}} & \frac{\partial f_{\epsilon_v^p}}{\partial \Delta\lambda} & \frac{\partial f_{\epsilon_v^p}}{\partial \Delta\epsilon_v^p} & \frac{\partial f_{\epsilon_v^p}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^p}} & \frac{\partial f_{\epsilon_v^p}}{\partial \Delta\epsilon_v^v} & \frac{\partial f_{\epsilon_v^p}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^v}} \\
\frac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha^p}}}{\partial \boldsymbol{\Delta\epsilon^e}} & \frac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha^p}}}{\partial \Delta\lambda} & \frac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha^p}}}{\partial \Delta\epsilon_v^p} & \frac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha^p}}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^p}} & \frac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha^p}}}{\partial \Delta\epsilon_v^v} & \frac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha^p}}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^v}} \\
\frac{\partial f_{\epsilon_v^v}}{\partial \boldsymbol{\Delta\epsilon^e}} & \frac{\partial f_{\epsilon_v^v}}{\partial \Delta\lambda} & \frac{\partial f_{\epsilon_v^v}}{\partial \Delta\epsilon_v^p} & \frac{\partial f_{\epsilon_v^v}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^p}} & \frac{\partial f_{\epsilon_v^v}}{\partial \Delta\epsilon_v^v} & \frac{\partial f_{\epsilon_v^v}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^v}} \\
\frac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha^v}}}{\partial \boldsymbol{\Delta\epsilon^e}} & \frac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha^v}}}{\partial \Delta\lambda} & \frac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha^v}}}{\partial \Delta\epsilon_v^p} & \frac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha^v}}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^p}} & \frac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha^v}}}{\partial \Delta\epsilon_v^v} & \frac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha^v}}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^v}}
\end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Dans `MFront`, cette matrice peut être obtenue par perturbation numérique — `@Algorithm NewtonRaphson_NumericalJacobian` — ou analytiquement, comme c'est le cas ici. Les composantes de J sont détaillées ci-après dans le cas où les deux mécanismes sont activés.

3.3.2.1 Première ligne de la jacobienne

$$\begin{cases}
\frac{\partial f_{\boldsymbol{\epsilon^e}}}{\partial \boldsymbol{\Delta\epsilon^e}} = \mathbb{I} + \Delta\lambda\left(\frac{\partial \boldsymbol{n^p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) : \mathbb{C} + \frac{\Delta t}{\tau}\left(\left(\frac{\partial \varphi^v}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) \otimes \boldsymbol{n^v} + \varphi^v\left(\frac{\partial \boldsymbol{n^v}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\right) : \mathbb{C} \\
\frac{\partial f_{\boldsymbol{\epsilon^e}}}{\partial \Delta\lambda} = \boldsymbol{n^p} \\
\frac{\partial f_{\boldsymbol{\epsilon^e}}}{\partial \Delta\epsilon_v^p} = \Delta\lambda\left(\frac{\partial \boldsymbol{n^p}}{\partial \Delta\epsilon_v^p}\right) + \frac{\Delta t}{\tau}\left(\left(\frac{\partial \varphi^v}{\partial \Delta\epsilon_v^p}\right)\boldsymbol{n^v} + \varphi^v\left(\frac{\partial \boldsymbol{n^v}}{\partial \Delta\epsilon_v^p}\right)\right) \\
\frac{\partial f_{\boldsymbol{\epsilon^e}}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^p}} = \Delta\lambda\left(\frac{\partial \boldsymbol{n^p}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^p}}\right) \\
\frac{\partial f_{\boldsymbol{\epsilon^e}}}{\partial \Delta\epsilon_v^v} = \Delta\lambda\left(\frac{\partial \boldsymbol{n^p}}{\partial \Delta\epsilon_v^v}\right) + \frac{\Delta t}{\tau}\left(\left(\frac{\partial \varphi^v}{\partial \Delta\epsilon_v^v}\right)\boldsymbol{n^v} + \varphi^v\left(\frac{\partial \boldsymbol{n^v}}{\partial \Delta\epsilon_v^v}\right)\right) \\
\frac{\partial f_{\boldsymbol{\epsilon^e}}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^v}} = \frac{\Delta t}{\tau}\left(\boldsymbol{n^v} \otimes \left(\frac{\partial \varphi^v}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^v}}\right) + \varphi^v\left(\frac{\partial \boldsymbol{n^v}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^v}}\right)\right)
\end{cases} \tag{3.11}$$

Les expressions des dérivées de $\boldsymbol{n^p}$ sont,

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{n^p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dfrac{1}{p_c^i}\left[\dfrac{3\mathbb{K}}{M^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f^p}{\partial \phi^2}\right)\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\right] \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{n^p}}{\partial \Delta\epsilon_v^p} = -\dfrac{1}{p_c^i}\left[\left(\dfrac{\partial^2 f^p}{\partial \Delta\epsilon_v^p \partial \phi}\right) + \omega\left(\dfrac{\partial f^p}{\partial \phi}\right)\right]\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{n^p}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^p}} = -\dfrac{3H^p}{p_c^i M^2}\mathbb{K} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{n^p}}{\partial \Delta\epsilon_v^v} = \dfrac{\partial \boldsymbol{n^p}}{\partial \Delta\epsilon_v^p} \end{cases} \tag{3.12}$$

avec,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f^p}{\partial \phi^2} = p_c^2\left[m_B(1-m_B)\phi^{m_B-2}\left(2(1-a_B)\phi + a_B\right) + 4(1-a_B)\left(1-m_B\phi^{m_B-1}\right)\right] \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial \sigma_m}\right)\dfrac{\boldsymbol{\delta}}{3} \\ \dfrac{\partial^2 f^p}{\partial \Delta\epsilon_v^p \partial \phi} = -2\omega\left(\dfrac{\partial f^p}{\partial \phi}\right) + \left(\dfrac{\partial^2 f^p}{\partial \phi^2}\right)\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial \Delta\epsilon_v^p}\right) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \Delta\epsilon_v^p} = \dfrac{-\sigma_m \omega e^{\omega\left(\epsilon_v^p + \epsilon_v^v\right)}}{p_c^i + c^i} \end{cases} \tag{3.13}$$

Les expressions des dérivées de $\boldsymbol{n^v}$ sont,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{n^v}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dfrac{1}{p_c^i}\left[\dfrac{3\mathbb{K}}{M^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f^v}{\partial \phi^2}\right)\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\right] \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{n^v}}{\partial \Delta\epsilon_v^p} = \dfrac{\partial \boldsymbol{n^v}}{\partial \Delta\epsilon_v^v} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{n^v}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^v}} = -\dfrac{3H^v}{p_c^i M^2}\mathbb{K} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{n^v}}{\partial \Delta\epsilon_v^v} = -\dfrac{1}{p_c^i}\left[\left(\dfrac{\partial^2 f^v}{\partial \Delta\epsilon_v^v \partial \phi}\right) + \omega\left(\dfrac{\partial f^v}{\partial \phi}\right)\right]\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) \end{cases} \tag{3.14}$$

avec,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f^v}{\partial \phi^2} = 4p_c^2(1-a_B) \\ \dfrac{\partial^2 f^v}{\partial \Delta\epsilon_v^v \partial \phi} = -2\omega\left(\dfrac{\partial f^v}{\partial \phi}\right) + \left(\dfrac{\partial^2 f^v}{\partial \phi^2}\right)\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial \Delta\epsilon_v^v}\right) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \Delta\epsilon_v^v} = \dfrac{\partial \phi}{\partial \Delta\epsilon_v^p} \end{cases} \tag{3.15}$$

Les expressions des dérivées de φ^v sont,

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi^v}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left(\dfrac{\partial \varphi^v}{\partial F^v}\right)\boldsymbol{n^v} \\ \dfrac{\partial \varphi^v}{\partial \Delta\epsilon_v^p} = \left(\dfrac{\partial \varphi^v}{\partial F^v}\right)\left(\dfrac{\partial F^v}{\partial \Delta\epsilon_v^p}\right) \\ \dfrac{\partial \varphi^v}{\partial \Delta\epsilon_v^v} = \left(\dfrac{\partial \varphi^v}{\partial F^v}\right)\left(\dfrac{\partial F^v}{\partial \Delta\epsilon_v^v}\right) \\ \dfrac{\partial \varphi^v}{\partial \boldsymbol{\alpha_v}} = \left(\dfrac{\partial \varphi^v}{\partial F^v}\right)\left(\dfrac{\partial F^v}{\partial \boldsymbol{\alpha^v}}\right) \end{cases} \qquad \frac{\partial \varphi^v}{\partial F^v} = \frac{n_v}{E}\left(\frac{\langle F^v \rangle}{E}\right)^{n_v - 1} \tag{3.16}$$

avec,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F^v}{\partial \Delta\epsilon_v^p} = \dfrac{\partial F^v}{\partial \Delta\epsilon_v^v} \\ \dfrac{\partial F^v}{\partial \Delta\epsilon_v^v} = -\dfrac{1}{p_c^i}\left(-2\omega f^v + \left(\dfrac{\partial f^v}{\partial \phi}\right)\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial \Delta\epsilon_v^v}\right)\right) \\ \dfrac{\partial F^v}{\partial \alpha^v} = -\dfrac{3H^v}{p_c^i}\left(\dfrac{X_d^v}{M^2} + \dfrac{B_d^v}{N^2}\right) \end{cases} \tag{3.17}$$

3.3.2.2 Deuxième ligne de la jacobienne

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial \boldsymbol{\Delta\epsilon^e}} = \dfrac{1}{E}\left(\boldsymbol{n^p} : \mathbb{C}\right) \\ \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial \Delta\lambda} = 0 \\ \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial \Delta\epsilon_v^p} = \dfrac{1}{E}\left(\dfrac{\partial F^p}{\partial \Delta\epsilon_v^p}\right) \\ \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^p}} = \dfrac{1}{E}\left(\dfrac{\partial F^p}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^p}}\right) \\ \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial \Delta\epsilon_v^v} = \dfrac{1}{E}\left(\dfrac{\partial F^p}{\partial \Delta\epsilon_v^v}\right) \\ \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^v}} = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{3.18}$$

Les expressions des dérivées de F^p sont,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F^p}{\partial \Delta\epsilon_v^p} = -\dfrac{1}{p_c^i}\left(-2\omega f^p + \left(\dfrac{\partial f^p}{\partial \phi}\right)\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial \Delta\epsilon_v^p}\right)\right) \\ \dfrac{\partial F^p}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^p}} = -\dfrac{3H^p}{p_c^i}\left(\dfrac{\boldsymbol{X_d^p}}{M^2} + \dfrac{\boldsymbol{B_d^p}}{N^2}\right) \\ \dfrac{\partial F^p}{\partial \Delta\epsilon_v^v} = \dfrac{\partial F^p}{\partial \Delta\epsilon_v^p} \end{cases} \tag{3.19}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3.2.3 Troisième ligne de la jacobienne

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_{\epsilon_v^p}}{\partial \boldsymbol{\Delta\epsilon^e}} = -\Delta\lambda\left(\dfrac{\partial n_{kk}^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}\right) \\ \dfrac{\partial f_{\epsilon_v^p}}{\partial \Delta\lambda} = -n_{kk}^p \\ \dfrac{\partial f_{\epsilon_v^p}}{\partial \Delta\epsilon_v^p} = 1 - \Delta\lambda\left(\dfrac{\partial n_{kk}^p}{\partial \Delta\epsilon_v^p}\right) \\ \dfrac{\partial f_{\epsilon_v^p}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^p}} = \mathbf{0} \\ \dfrac{\partial f_{\epsilon_v^p}}{\partial \Delta\epsilon_v^v} = -\Delta\lambda\left(\dfrac{\partial n_{kk}^p}{\partial \Delta\epsilon_v^v}\right) \\ \dfrac{\partial f_{\epsilon_v^p}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^v}} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{3.20}$$

Les expressions des dérivées de n_{kk}^p sont,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n_{kk}^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -\dfrac{e^{2\omega\left(\epsilon_v^p+\epsilon_v^v\right)}}{p_c^i\left(p_c^i+c^i\right)^2}\left(\dfrac{\partial^2 f^p}{\partial \phi^2}\right)\dfrac{\boldsymbol{\delta}}{3} \\ \dfrac{\partial n_{kk}^p}{\partial \Delta\epsilon_v^p} = \dfrac{e^{\omega\left(\epsilon_v^p+\epsilon_v^v\right)}}{p_c^i\left(p_c^i+c^i\right)}\left(\omega\left(\dfrac{\partial f^p}{\partial \phi}\right) + \dfrac{\partial^2 f^p}{\partial \Delta\epsilon_v^p \partial \phi}\right) \\ \dfrac{\partial n_{kk}^p}{\partial \Delta\epsilon_v^v} = \dfrac{\partial n_{kk}^p}{\partial \Delta\epsilon_v^p} \end{cases} \tag{3.21}$$

3.3.2.4 Quatrième ligne de la jacobienne

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha^p}}}{\partial \boldsymbol{\Delta\epsilon^e}} = -\Delta\lambda\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{m^p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}\right) \\ \dfrac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha^p}}}{\partial \Delta\lambda} = -\boldsymbol{m^p} \\ \dfrac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha^p}}}{\partial \Delta\epsilon_v^p} = \mathbf{0} \\ \dfrac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha^p}}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^p}} = \mathbb{I} - \Delta\lambda\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{m^p}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^p}}\right) \\ \dfrac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha^p}}}{\partial \Delta\epsilon_v^v} = \mathbf{0} \\ \dfrac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha^p}}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^v}} = 0 \end{cases} \tag{3.22}$$

Les expression des dérivées de $\boldsymbol{m^p}$ sont,

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{m^p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dfrac{3\mathbb{K}}{p_c^i M^2} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{m^p}}{\partial \boldsymbol{\alpha^p}} = -\dfrac{3H^p}{p_c^i}\left(\dfrac{1}{M^2}+\dfrac{1}{N^2}\right)\mathbb{K} \end{cases} \tag{3.23}$$

3.3.2.5 Cinquième ligne de la jacobienne

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_{\epsilon_v^v}}{\partial \boldsymbol{\Delta\epsilon^e}} = -\dfrac{\Delta t}{\tau}\left(n_{kk}^v\left(\dfrac{\partial \varphi^v}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)+\varphi^v\left(\dfrac{\partial n_{kk}^v}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\right):\mathbb{C} \\ \dfrac{\partial f_{\epsilon_v^v}}{\partial \Delta\lambda} = 0 \\ \dfrac{\partial f_{\epsilon_v^v}}{\partial \Delta\epsilon_v^p} = -\dfrac{\Delta t}{\tau}\left(n_{kk}^v\left(\dfrac{\partial \varphi^v}{\partial \Delta\epsilon_v^p}\right)+\varphi^v\left(\dfrac{\partial n_{kk}^v}{\partial \Delta\epsilon_v^v}\right)\right) \\ \dfrac{\partial f_{\epsilon_v^v}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^p}} = \mathbf{0} \\ \dfrac{\partial f_{\epsilon_v^v}}{\partial \Delta\epsilon_v^v} = 1-\dfrac{\Delta t}{\tau}\left(n_{kk}^v\left(\dfrac{\partial \varphi^v}{\partial \Delta\epsilon_v^v}\right)+\varphi^v\left(\dfrac{\partial n_{kk}^v}{\partial \Delta\epsilon_v^v}\right)\right) \\ \dfrac{\partial f_{\epsilon_v^v}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^v}} = -\dfrac{\Delta t}{\tau}\left(n_{kk}^v\left(\dfrac{\partial \varphi^v}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^v}}\right)\right) \end{cases} \tag{3.24}$$

Les expressions des dérivées de n_{kk}^v sont,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n_{kk}^v}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -\dfrac{e^{2\omega\left(\epsilon_v^p+\epsilon_v^v\right)}}{p_c^i\left(p_c^i+c^i\right)^2}\left(\dfrac{\partial^2 f^v}{\partial \phi^2}\right)\dfrac{\boldsymbol{\delta}}{3} \\ \dfrac{\partial n_{kk}^v}{\partial \Delta\epsilon_v^p} = \dfrac{\partial n_{kk}^v}{\partial \Delta\epsilon_v^v} \\ \dfrac{\partial n_{kk}^v}{\partial \Delta\epsilon_v^v} = \dfrac{e^{\omega\left(\epsilon_v^p+\epsilon_v^v\right)}}{p_c^i\left(p_c^i+c^i\right)}\left(\omega\left(\dfrac{\partial f^v}{\partial \phi}\right)+\dfrac{\partial^2 f^v}{\partial \Delta\epsilon_v^v \partial \phi}\right) \end{cases} \tag{3.25}$$

3.3.2.6 Sixième ligne de la jacobienne

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha}^v}}{\partial \boldsymbol{\Delta\epsilon^e}} = -\dfrac{\Delta t}{\tau}\left(\boldsymbol{m^v}\otimes\left(\dfrac{\partial \varphi^v}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)+\varphi^v\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{m^v}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\right):\mathbb{C} \\ \dfrac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha}^v}}{\partial \Delta\lambda} = \mathbf{0} \\ \dfrac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha}^v}}{\partial \Delta\epsilon_v^p} = -\dfrac{\Delta t}{\tau}\left(\dfrac{\partial \varphi^v}{\partial \Delta\epsilon_v^p}\right)\boldsymbol{m^v} \\ \dfrac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha}^v}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^p}} = \mathbf{0} \\ \dfrac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha}^v}}{\partial \Delta\epsilon_v^v} = -\dfrac{\Delta t}{\tau}\left(\dfrac{\partial \varphi^v}{\partial \Delta\epsilon_v^v}\right)\boldsymbol{m^v} \\ \dfrac{\partial f_{\boldsymbol{\alpha}^v}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^v}} = \mathbb{I}-\dfrac{\Delta t}{\tau}\left(\left(\dfrac{\partial \varphi^v}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^v}}\right)\otimes\boldsymbol{m^v}+\varphi^v\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{m^v}}{\partial \boldsymbol{\Delta\alpha^v}}\right)\right) \end{cases} \tag{3.26}$$

Les expressions des drivées de $\boldsymbol{m^v}$ sont,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{m^v}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dfrac{3\mathbb{K}}{p_c^i M^2} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{m^v}}{\partial \boldsymbol{\alpha^v}} = -\dfrac{3H^v}{p_c^i}\left(\dfrac{1}{M^2}+\dfrac{1}{N^2}\right)\mathbb{K} \end{cases} \tag{3.27}$$

4 Paramètres matériaux

Le Tableau 1 résume les paramètres du modèle NLH_CSRM à définir dans la commande DEFI_MATERIAU.

Tableau 1: Paramètres matériaux du modèle NLH_CSRM

Nom	Symb.	Description	Unité	Intervalle
YoungModulus	E	Module de Young	Pa	$\mathbb{R}^{+\star}$
PoissonRatio	ν	Coefficient de Poisson	-	$[-1, 0.5[$
IsoCompElasLim	p_c^i	Pression de préconsolidation initiale	Pa	$\mathbb{R}^{+\star}$
IsoTensElasLim	c^i	Limite d'élasticité initiale en traction	Pa	$\mathbb{R}^{+}$
mBigoCritCoef	m_B	Paramètre de forme des critères	-	$[2, \infty[$
aBigoCritCoef	a_B	Paramètre de forme des critères	-	$]0, 1]$
MCCSlopeCSL	M	Pente d'EC en l'absence d'écrouissage « ciné. »	-	$\mathbb{R}^{+\star}$
NLHIndex	N	Contrôle la pente d'EC avec écrouissage « ciné. »	-	$\mathbb{R}^{+\star}$
NLHModulusP	H^p	Module d'écrouissage « cinématique » plast.	Pa	$\mathbb{R}^{+}$
NLHModulusV	H^v	Module d'écrouissage « cinématique » visco.	Pa	$\mathbb{R}^{+}$
IncompIndex	ω	Contrôle la cinétique d'écrouissage « isotrope »	-	$\mathbb{R}^{+}$
Tau	τ	Temps caractéristique pour le mécanisme visco.	s	$\mathbb{R}^{+\star}$
PerzynaExpo	n_v	Exposant de la fonction de Perzyna	-	$[1, \infty[$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Variables internes

Les variables internes, dont les incréments temporels constituent les inconnues du système non-linéaire à résoudre, sont résumées dans le Tableau 2.

Tableau 2: Variables internes du modèle NLH_CSRM

Nom	Symb.	Description	CMP 2D	CMP 3D
ElasticStrain	$\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{e}}$	Tenseur des déformations élastiques	V1-V4	V1-V6
PlastMulti	λ	Multiplicateur plastique	V5	V7
VolStrainP	ϵ_v^p	Déformation volumique plastique	V6	V8
NLHStrainP	$\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{p}}$	Tenseur associé à l'écrouissage « cinématique » plast.	V7-V10	V9-V14
VolStrainV	ϵ_v^v	Déformation volumique viscoplastique	V11	V15
NLHStrainV	$\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{v}}$	Tenseur associé à l'écrouissage « cinématique » visco.	V12-V15	V16-V21

Quelques variables auxiliaires supplémentaires apparaissent dans le champ des variables internes au sens de Code_Aster. Elles sont résumées dans le Tableau 3.

Tableau 3: Variables auxiliaires du modèle NLH_CSRM

Nom	Description	CMP 2D	CMP 3D
NewtonIter	Nombre d'itérations du Newton local	V16	V22
DomainEPVP	0 si élastique, 1 si plast., 2 si visco., 3. si plast & visco.	V17	V23
IniSigTime	Temps « absolu »	V18	V24

Remarque : IniSigTime n'est pas une inconnue du système non-linéaire à résoudre, mais elle intervient quand même dans l'algorithme d'intégration, i.e. **ce n'est pas uniquement une variable de post-traitement**. IniSigTime permet d'initialiser le tenseur des déformations élastiques en cas de contraintes initiales non-nulles (mais restant à l'intérieur des domaines d'élasticité initiaux) ; ce qui est souvent le cas en géomécanique (exemple du creusement d'un tunnel). Il faut donc porter une attention particulière à l'initialisation de cette variable dans STAT_NON_LINE et DINA_NON_LINE en cas de reprise de calculs.

6 Cas-tests

Les références des cas-test et documentations associées sont données dans le Tableau 4.

Tableau 4: Cas-tests et documentations du modèle NLH_CSRM

Réf. cas-test	Description	Réf. doc.
ssnv206m	Essai de compression triaxiale AXIS	V6.04.206
wtnv135h	Essai de compression triaxiale drainé 3D_THM	V7.31.135
comp012g	Test de compatibilité avec la commande CALC_ESSAI_GEOMECA	V6.07.112
comp001l	Test de robustesse	V6.07.101

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Exemples de réponses au point matériel

Les Figures 2 à 5 présentent quelques réponses obtenues à l'aide de l'exécutable `MTest` (point matériel),

- Fig. 2 — Essais de compression triaxiale à différentes pressions de confinement ;
- Fig. 3 — Essais de compression triaxiale à différentes vitesses de déformations imposées ;
- Fig. 4 — Essais de fluages à différents déviateurs imposés ;
- Fig. 5 — Essais de fluages à différents confinements imposés.

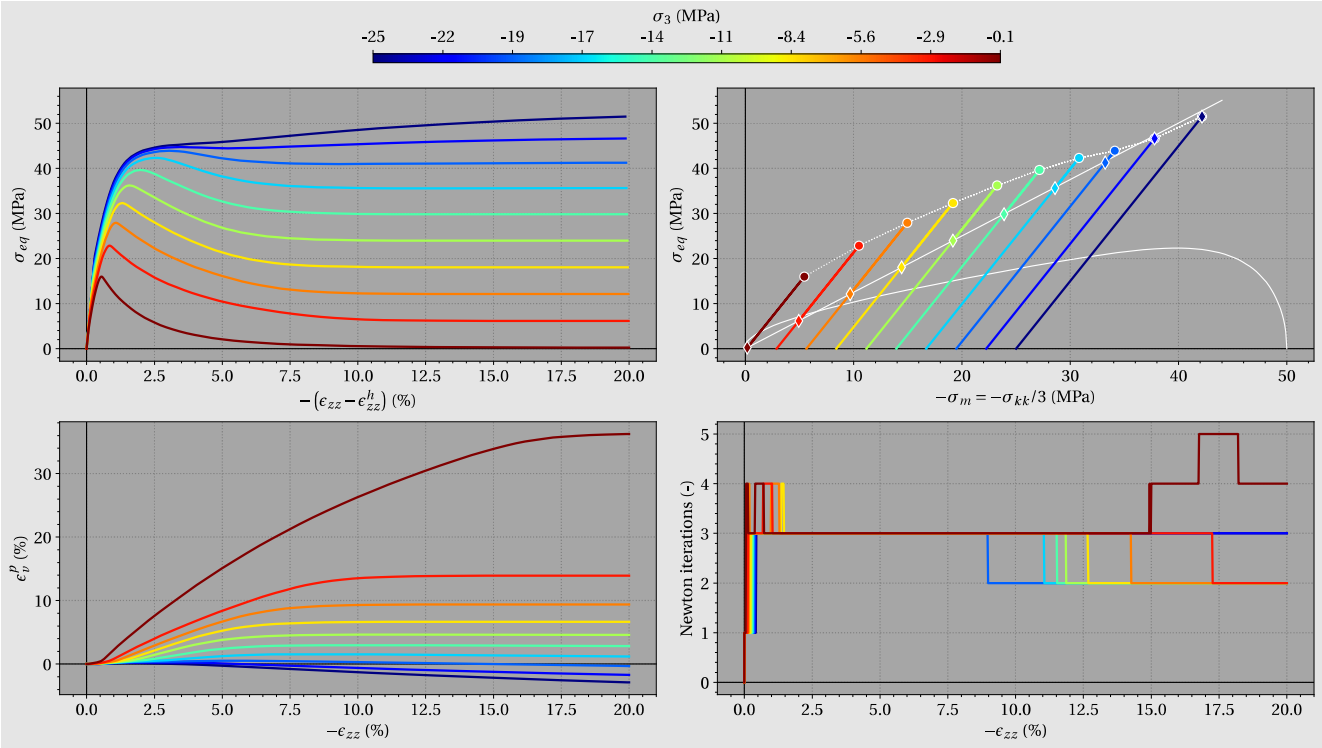


Figure 2: Réponses obtenues lors d'essais de compression triaxiale à différentes pressions de confinement

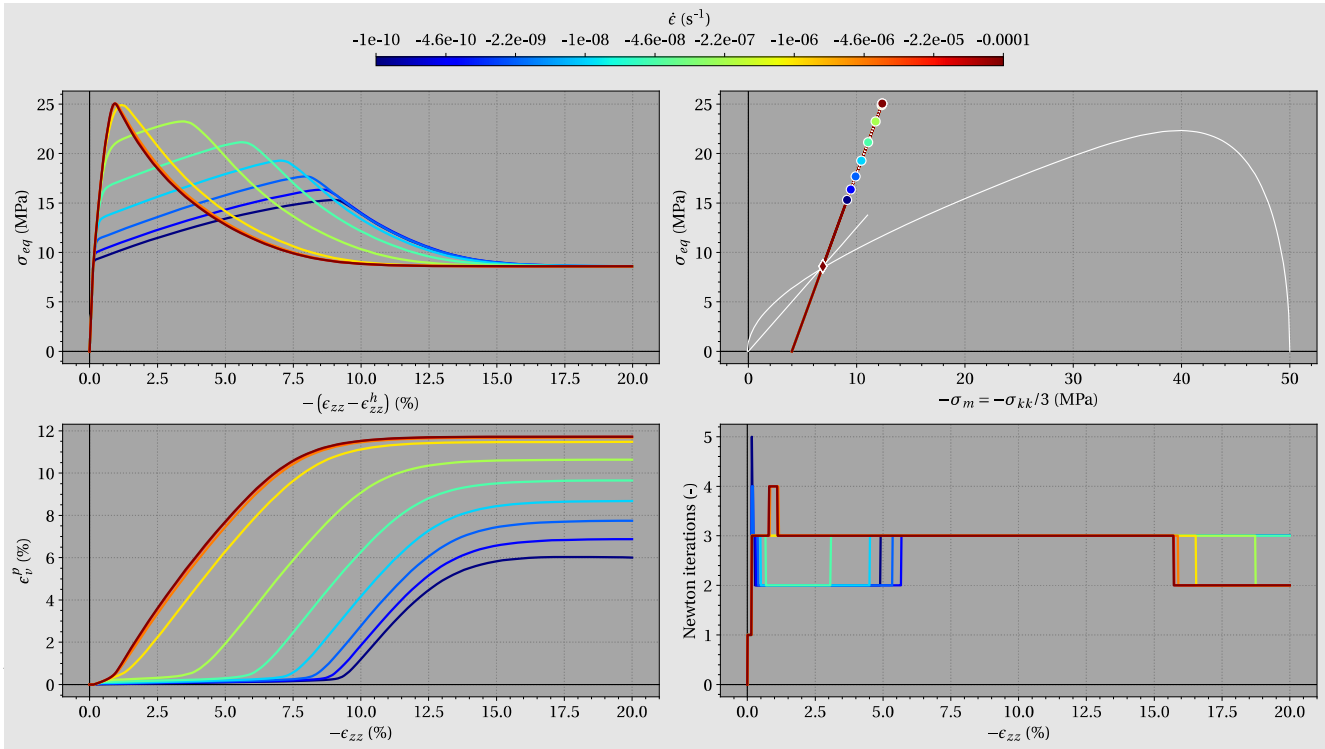


Figure 3: Réponses obtenues lors d'essais de compression triaxiale à différentes vitesses de déformation imposée

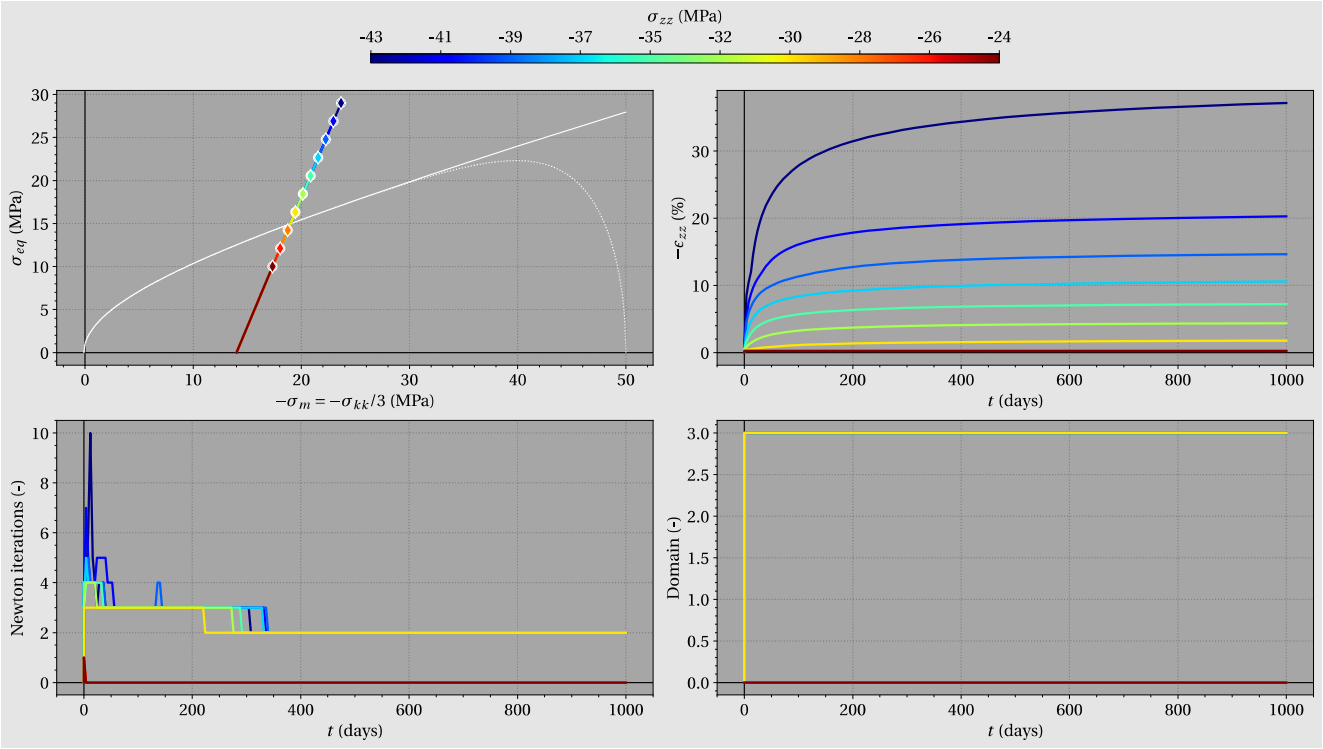


Figure 4: Réponses obtenues lors d'essais de fluages à différents déviateurs imposés

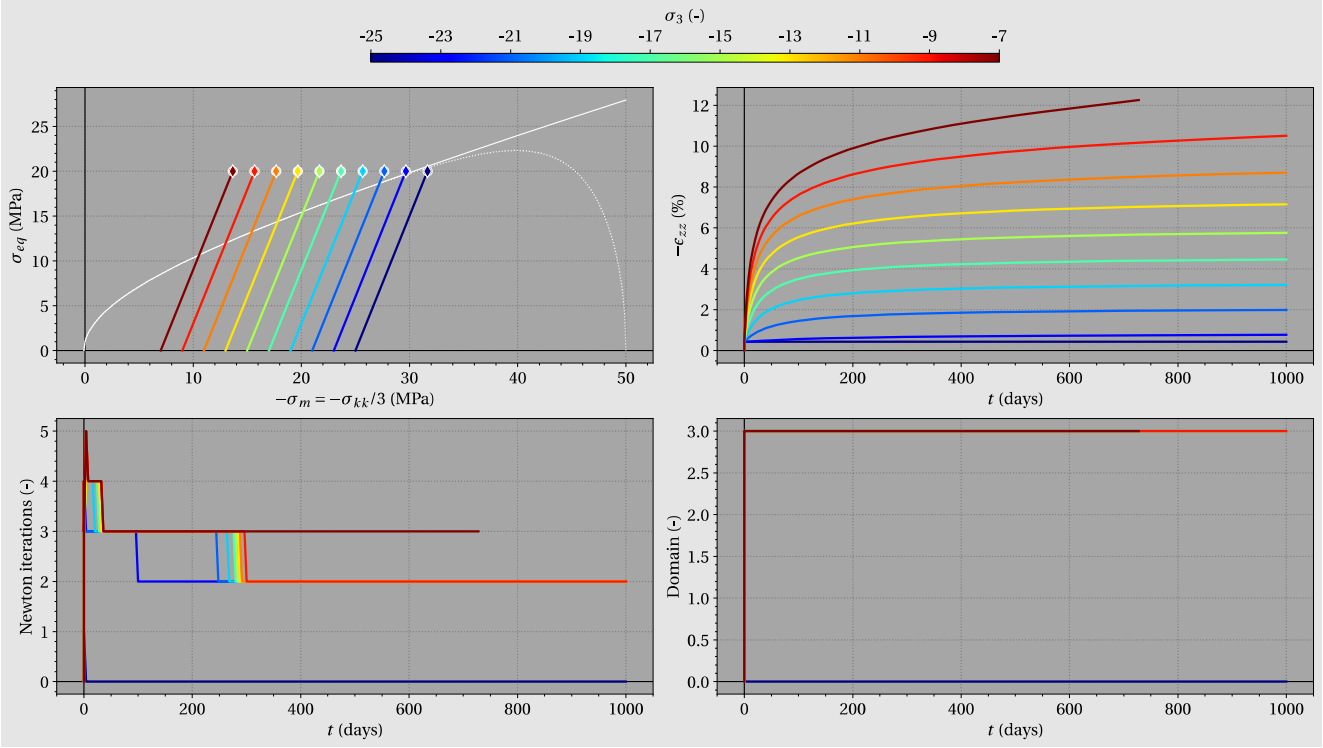


Figure 5: Réponses obtenues lors d'essais de de fluages à différents confinements imposés

Bibliographie

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

RAU17: Simon Raude, Modèle de comportement lkr, 2017
FER13: Roméo Fernandes, Loi de comportement viscoplastique letk, 2013
DJO18: Inès Djouadi, Prise en compte de l'anisotropie dans le comportement instantané des géomatériaux pour les calculs d'ouvragessouterrains, 2018
RAU15: Simon Raude, Prise en compte des sollicitations thermiques sur les comportements instantané et différé des géomatériaux, 2015
PER71: Piotr Perzyna, Thermodynamic theory of viscoplasticity, 1971
HB19: E.Hoek and E.T.Brown, The hoek–brown failure criterion and gsi – 2018 edition, 2019
BP04: Davide Bigoni and Andrea Piccolroaz, Yield criteria for quasibrittle and frictional materials, 2004
RSW58: K. Roscoe, Andrew Schofield, and C. Wroth, On the yielding of soils, 1958
KT51: H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Nonlinear programming, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on MathematicalStatistics and Probability, 1950 (Berkeley and Los Angeles), 1951
HMP+15: Thomas Helfer, Bruno Michel, Jean-Michel Proix, Maxime Salvo, Jérôme Sercombe, and Michel Casella, Introducing the open-source mfront code generator : Application to mechanical behaviours and material knowledge management within the pleiades fuel element modelling platform, 2015

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)