Loi d'endommagement homogène ENDO_LOCA_EXP

Résumé :

Ce document décrit le modèle de comportement élastique fragile ENDO_LOCA_EXP, disponible en modélisation locale uniquement (par opposition à une formulation non locale type GRAD_VARI). Cela implique de restreindre l'usage du modèle à des situations dans lesquelles l'endommagement est diffus et non pas localisé. La version non locale correspondante est fournie par le modèle ENDO_FISS_EXP [R5.03.28]. Si l'endommagement y est modélisé de manière isotrope, le critère d'endommagement est quant à lui bien adapté à la modélisation des bétons, en distinguant notamment les états de traction et de compression, à la différence du modèle ENDO_ISOT_BETON [R7.01.04] par exemple. En outre, une restauration de rigidité en compression est introduite pour refléter la fermeture des fissures. En revanche, le modèle n'est a priori pas adapté à modéliser l'endommagement du béton en compression.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Domaine d'application

1.1 Finalités

La loi de comportement ENDO_LOCA_EXP , disponible dans la commande STAT_NON_LINE , a pour objectif de décrire l'endommagement quasi-fragile diffus du béton sous sollicitations mécanique de traction. L'endommagement y est décrit de manière isotrope. Sur le plan phénoménologique, le modèle vise à refléter plus particulièrement :

- le contraste entre les limites d'élasticité en traction et en compression, évitant ainsi un endommagement prématuré en compression sous précontrainte, par exemple ;
- la forme spécifique de la surface d'endommagement en traction multiaxiale, proche d'un critère de Rankine ;
- l'impact sur la rigidité de la fermeture des fissures dans les directions de compression, ce qui renforce également la robustesse des simulations en présence de fissures débouchantes.

En présence d'un endommagement localisé, on lui préférera le modèle non local ENDO_FISS_EXP dont la définition des paramètres est proche de celle de ENDO_LOCA_EXP.

Le lecteur intéressé pourra trouver des éléments plus détaillés sur la formulation de la loi et sa validation dans la référence [Lorentz, 2020]. Compte tenu de la proximité avec les lois de comportement ENDO_ISOT_BETON et ENDO_FISS_EXP, il pourra aussi se reporter aux références [Badel et al., 2007], [Lorentz, 2017], [R7.01.04] et [R5.03.28].

1.2 Paramètres matériaux

La loi de comportement s'appuie sur six paramètres internes (dont les constantes d'élasticité), comme on le verra dans la présentation des équations au chapitre suivant. Toutefois, dans un régime de fissuration diffuse où émerge une distance moyenne inter-fissure, on pourra reformuler les paramètres en termes de grandeurs plus accessibles à l'ingénieur. Outre le module de Young et le coefficient de Poisson, on renseignera les résistances en traction et en compression (cette dernière étant moins significative pour les problèmes ciblés), l'énergie de fracturation et un paramètre pour décrire la forme de la réponse adoucissante. Enfin, la distance moyenne inter-fissure sera fixée sur la base des caractéristiques du ferraillage, par exemple. La commande DEFI_MATER_GC prend en charge la transformation de ces paramètres d'ingénieur en caractéristiques internes de la loi et peut donc se substituer à la commande DEFI_MATERIAU, mais elle nécessite dans ce cas de renseigner également la distance moyenne inter-fissures.

1.3 Variables internes

La loi de comportement ENDO_LOCA_EXP donne accès à cinq variables internes. Le degré d'endommagement b, compris entre 0 pour un matériau sain et 1 pour un matériau totalement endommagé, constitue a priori la seule véritable variable interne du modèle. Pour des raisons d'efficacité numérique, on conserve également l'état du pas de temps courant, avec comme valeurs 0=élastique, 1=endommageant, 2=saturé. Enfin, on y regroupe également trois variables pour faciliter le post-traitement.

Les variables internes sont regroupées dans le tableau suivant:

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

ENDO	V1	Endommagement b
INDIENDO	V2	État du pas de temps courant (0, 1 ou 2)
ENDORIGI	V3	Perte de rigidité $1-B(b)$
ENERELAS	V4	Énergie volumique élastique
ENERDISS	V5	Énergie volumique consommée

2 Modèle continu

2.1 Équations de comportement

La relation contrainte -déformation prend la forme suivante, dans laquelle $\langle x\rangle_-$ et $\langle x\rangle_+$ désignent respectivement les parties négatives et positives d'un scalaire ou d'un tenseur symétrique:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon},b) \;=\; B(b)\left[\lambda\langle tr(\boldsymbol{\varepsilon})\rangle_+ + 2\mu\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+\right] \;+\; \left[\lambda\langle tr(\boldsymbol{\varepsilon})\rangle_- + 2\mu\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_-\right] \tag{1}$$

Quant à la fonction de rigidité $B(b)$, elle vaut:

$$B(b) \;=\; \frac{1-b}{(1-b)+\frac{\kappa}{2}b\left(m_0+(D_1-m_0)b^{r-1}\right)} \tag{2}$$

L'évolution de l'endommagement est gouvernée par les conditions de Kuhn et Tucker suivantes :

$$\dot{b}\geqslant 0 \quad ; \quad Q(\boldsymbol{\varepsilon})-\varphi(b)\leqslant 0 \quad ; \quad \dot{b}\left[Q(\boldsymbol{\varepsilon})-\varphi(b)\right]=0 \tag{3}$$

La fonction seuil $\varphi(b)$ a pour expression :

$$\varphi(b) \;=\; \left[(1-b)+\frac{\kappa}{2}b\left(m_0+(D_1-m_0)b^{r-1}\right)\right]^2 \tag{4}$$

Quant à la fonction de la déformation $Q(\boldsymbol{\varepsilon})$, elle s'écrit :

$$Q(\boldsymbol{\varepsilon}) \;=\; \varepsilon_*^2 \tag{5}$$

Dans cette expression, la pseudo-norme ε_* est la solution de l'équation scalaire suivante:

$$f_\sigma\left(\frac{\lambda tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{Id} \;+\; 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}}{\varepsilon_*}\right) \;=\; 0 \tag{6}$$

Enfin, le seuil d'initiation a pour expression :

$$f_\sigma(\boldsymbol{\sigma}) \;=\; \left\|\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sigma_0}+\left(\beta_0-\frac{1}{3}\right)\mathrm{tr}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sigma_0}\right)\mathbf{Id}\right\| \;+\; \left\|\exp\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sigma_0}\right)\right\| \;-\; \gamma_0 \tag{7}$$

La fonction de rigidité $B(b)$ qui intervient dans la relation contrainte – déformation mesure l'impact du niveau d'endommagement sur la rigidité résiduelle (en traction). Sa forme particulière ainsi que celle du seuil $\varphi(b)$sont guidées par la cohérence avec la réponse de la loi ENDO_FISS_EXP dans un essai de traction uniaxiale confinée. Elle joue le même rôle que la forme plus classique $(1-b)$ utilisée dans nombre de modèles de la littérature.

2.2 Énergie élastique et transition traction – compression

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour tenir compte de la restauration de rigidité en compression, la loi d'élasticité n'est plus linéaire, même si elle reste hyperélastique (*i.e.* elle dérive d'une énergie) afin d'éviter toute production ou consommation parasites d'énergie. Elle est semblable à la formulation adoptée pour la loi ENDO_ISOT_BETON [R7.01.04]; elle tient compte non seulement du signe des déformations propres mais aussi de celui de la trace des déformations. Sur le plan pratique, elle nécessite donc de déterminer les déformations propres. Sa valeur est fournie parmi les variables internes (ENERELAS).

Ses propriétés sont étudiées de manière détaillée dans [Badel et al., 2007]. On retiendra qu'elle est continûment dérivable, ce qui assure la continuité de la relation contrainte – déformation. En revanche, elle n'est pas deux fois continûment dérivable, ce qui signifie que la rigidité présente un saut au franchissement de la transition traction – compression. Cela peut nuire à la convergence du calcul; c'est pourquoi on propose de régulariser cette transition.

L'idée, explicitée dans [Lorentz, 2017] et [Lorentz, 2020] consiste à régulariser l'énergie élastique. Cela a comme conséquence sur la relation contrainte – déformation (1) que les parties positive et négative y sont approchées par des fonctions infiniment dérivables :

$$\langle x\rangle_- \simeq N_\gamma(x) \quad ; \quad \langle x\rangle_+ \simeq x - N_\gamma(x) \tag{8}$$

L'approximation N_γ dépend d'un paramètre $\gamma>0$ qui tend vers l'infini en l'absence de régularisation. Elle a pour expression :

$$N_\gamma(x)=\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{2\gamma}\right)\exp\left(-\dfrac{1}{\gamma x}\right) & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x\geqslant 0\end{cases} \tag{9}$$

2.3 Paramètres du modèle

On peut recenser les paramètres utilisés dans les équations de comportement. Il s'agit de λ, μ, σ_0, γ_0, β_0, κ, m_0, D_1 et r. On se propose de donner leur signification et leur expression, pour lister finalement ceux devant être renseignés par l'utilisateur.

Elasticité – Les caractéristiques élastiques, qui interviennent dans l'expression de l'énergie de déformation, se réduisent classiquement aux coefficients de Lamé λ et μ ou, de manière équivalente, au module de Young E et au coefficient de Poisson ν. On en déduit en particulier la rigidité confinée $E_c=\lambda+2\mu$.

Seuil d'initiation de l'endommagement – Le seuil d'initiation est défini via la fonction f_σ qui dépend de trois paramètres : σ_0, γ_0 et β_0. En pratique, on fixe β_0 à 0.1 et on détermine σ_0 et τ_0 en fonction des résistances du béton en traction f_t en en compression f_c, selon la méthodologie présentée dans [Lorentz, 2017]. Ces données permettent alors de calculer $Q(\boldsymbol{\varepsilon})$ pour toute déformation. En particulier, on peut déterminer la contrainte d'initiation en traction uniaxiale confinée σ_c par la résolution de l'équation suivante, dans laquelle $\boldsymbol{n}$ désigne la direction (arbitraire) de traction :

$$f_\sigma\left(\left(\frac{\lambda}{E_c}\boldsymbol{Id}+\frac{2\mu}{E_c}\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}\right)\sigma_c\right)=0 \tag{10}$$

On accède ensuite à w_c l'énergie de déformation lorsque le seuil d'initiation est atteint en traction uniaxiale confinée via $w_c=\sigma_c^2/2E_c$.

- **Energie d'endommagement** – L'énergie de fissuration G_F mesure l'énergie consommée par unité de surface fissurée. Elle est à rapprocher de la distance moyenne L qui sépare deux fissures pour construire l'énergie volumique $k=G_F/L$ consommée par le modèle d'endommagement; on choisit de

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

normaliser cette dernière via $\kappa = G_F / (L w_c)$. Les deux paramètres G_F et L n'interviennent donc dans le modèle d'endommagement qu'à travers leur ratio même si tous deux ont une signification physique propre.

- **Facteur de forme** – Un dernier paramètre, $p \geqslant 1$, influe sur la forme de la réponse en phase d'endommagement (réponse d'autant plus courbée dans un diagramme $\sigma - \varepsilon$ que p est grand). De la valeur de p, on déduit les paramètres m_0, D_1 et r selon les expressions suivantes:

$$m_0 = \frac{3\pi}{2}(p+2)^{-\frac{3}{2}} \tag{11}$$

$$D_1 = \frac{3\pi}{4}\sqrt{p+1} \tag{12}$$

$$r = \frac{2(D_1-1)-m_0}{2-m_0} \tag{13}$$

Et de là, connaissant également l'énergie volumique à rupture normalisée κ, on peut exprimer pour toute valeur d'endommagement la fonction de rigidité $B(b)$ et le seuil $\phi(b)$. La donnée de p limite également les valeurs possibles pour κ pour des questions de stabilité du point matériel ce qui, indirectement, fixe une borne supérieure L_c à la distance inter-fissures L via l'inégalité suivante :

$$L \leqslant L_c = \frac{G_F}{w_c}\frac{3\pi}{4}(p+2)^{-\frac{3}{2}} \tag{14}$$

- **Régularisation de la transition traction – compression** – Le dernier paramètre, γ, conditionne la régularisation des fonctions parties positive et négative intervenant dans la relation contrainte – déformation, comme expliqué au § 2.2. Alternativement à la donnée d'une valeur pour γ, on peut préférer fixer la proportion de la rigidité (sans régularisation) qui est retrouvée pour une déformation (en compression) de l'ordre de f_c/E, proportion qu'on note ρ_γ.

Au final, en s'appuyant sur la commande DEFI_MATERIAU, on est amené à renseigner les neuf paramètres suivants : E, ν, σ_c, σ_0, γ_0, β_0, κ, p et γ. Des valeurs par défaut sont proposées : $\beta_0 = 0.1$ et $\gamma = 0$ (pas de régularisation). Alternativement, la commande DEFI_MATER_GC permet de renseigner ces paramètres de manière plus commune. On y fournit en effet les dix paramètres suivants : E, ν, f_t, f_c, γ_0, β_0, G_F, L, p et ρ_γ. Là aussi, deux valeurs par défaut sont proposées : $\beta_0 = 0.1$ et $\rho_\gamma = 0.95$ (une régularisation jugée raisonnable).

3 Intégration numérique

3.1 Équations discrétisées

La discrétisation en temps des équations de comportement s'appuie sur un schéma d'Euler implicite, c'est-à-dire que les différentes variables du problème sont exprimées à l'instant final du pas de temps. L'expression de la contrainte en fin de pas de temps obéit ainsi à (1), la déformation et l'endommagement y étant également exprimés à la fin du pas de temps. Reste la partie délicate qui consiste à calculer l'évolution de l'endommagement.

Intégrer l'équation d'évolution de l'endommagement est un problème scalaire non linéaire. Il résulte de la discrétisation temporelle des conditions de Kuhn et Tucker (3), en indiçant par n les quantités au début du pas de temps et en omettant tout indice pour celle en fin de pas de temps :

$$b - b_n \geqslant 0 \quad ; \quad Q(\boldsymbol{\varepsilon}) - \varphi(b) \leqslant 0 \quad ; \quad (b-b_n)\left[Q(\boldsymbol{\varepsilon}) - \varphi(b)\right] = 0 \tag{15}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

I l s'agit alors de déterminer la valeur de b , $\boldsymbol{\varepsilon}$ étant connu; c'est ce qu'on appelle l'intégration de la loi de comportement.

Il faut aussi bien noter que la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ correspond à la partie mécanique des déformations, c'est-à-dire la déformation totale de laquelle on a retiré les déformations de retrait, notamment thermique (dilatation). Dans la terminologie propre au code Aster (Code_Aster), il s'agit d'une loi exprimée en déformation mécanique.

3.2 Résolution de l'équation d'évolution algorithmique

Pour traiter l'alternative (15) , on reprend la méthode décrite dans [Lorentz, 2020] où on a également démontré l'existence et l'unicité de la solution b . On commence par évaluer la fonction $Q(\boldsymbol{\varepsilon})$; cela passe par la résolution de l'équation scalaire (6). On renvoie le lecteur au document [R5.03.28] pour la méthode de la résolution, la fonction Q étant égale à un facteur près à la fonction Γ définie dans ce fascicule.

On procède ensuite à un tir élastique en supposant que $b=b_n$. Si $Q(\boldsymbol{\varepsilon})-\varphi(b_n)\leqslant 0$, alors il s'agit de la solution; il s'agit du régime élastique . Dans le cas contraire, on examine la valeur ultime $b=1$. Si $Q(\boldsymbol{\varepsilon})-\varphi(1)\geqslant 0$, alors il s'agit de la solution ; il s'agit du régime saturé . Enfin, dernier cas de figure, le régime endommageant, la solution b est la racine de l'équation suivante, comprise entre b_n et 1:

$$\varphi(b) \text{ - } Q(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \tag{16}$$

Le membre de gauche est croissant avec b et de signe opposé aux deux bornes. La résolution est réalisée par une méthode de Newton à bornes contrôlées.

La précision avec laquelle les deux équations scalaires sont résolues, celle pour évaluer $Q(\boldsymbol{\varepsilon})$ et (16) est indirectement fixée par l'utilisateur, de sorte que l'erreur commise sur la contrainte soit inférieure à la limite en traction σ_c multipliée par le paramètre RESI_INTE_RELA de STAT_NON_LINE . On pourra se reporter à [Lorentz, 2020] pour le calcul des précisions attendues pour ces deux équations scalaires.

3.3 Matrice tangente

La matrice tangente est obtenue par variation de la contrainte dans (1) par rapport à la déformation. Pour cela, on commence par noter $E_+(\boldsymbol{\varepsilon})$ et $E_-(\boldsymbol{\varepsilon})$ les parties positive et négative de l'opérateur d'élasticité:

$$E_+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda\langle tr(\boldsymbol{\varepsilon})\rangle_+ + 2\mu\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+ \quad ; \quad E_-(\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda\langle tr(\boldsymbol{\varepsilon})\rangle_- + 2\mu\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_- \tag{17}$$

En différentiant (1), il vient alors :

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \left[B(b)\frac{dE_+}{d\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{dE_-}{d\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon})\right] : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + E_+(\boldsymbol{\varepsilon})\frac{dB}{db}\delta b \tag{18}$$

En régime élastique ou saturé, le dernier terme est nul (aucune variation de b). En régime endommageant, la variation de b est obtenue en différentiant l'équation (16). Cela conduit à :

$$\delta b = \left(\frac{d\varphi}{db}(b)\right)^{-1}\frac{dQ}{d\boldsymbol{\varepsilon}} : d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{19}$$

La partie délicate consiste alors à dériver Γ, E_+ et E_- par rapport à $\boldsymbol{\varepsilon}$. On renvoie pour cela au document [R5.03.28] dans lequel ces opérations sont détaillées. Bien que ces quantités dépendent des déformations propres, on peut noter que la méthodologie de dérivation qui est mise en œuvre s'affranchit de la dérivée des vecteurs propres associés qui, on le rappelle, ne sont pas définis lorsque les valeurs propres ne sont pas distinctes.

4 Pilotage par prédiction élastique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

S'agissant d'une loi d'endommagement, des instabilités matérielles peuvent apparaître. Pour permettre de les suivre, on recommande l'usage d'une méthode de pilotage par prédiction élastique (PRED_ELAS) en l'absence de variables de commande (telles qu'un transitoire thermique) et de chargements dépendant du temps physique, voir document [R5.03.80].

L'incrément de pilotage, noté $\Delta\tau$, s'interprète ici comme un incrément d'endommagement maximal cible. Au niveau d'un point d'intégration, il s'agit alors de déterminer la ou les valeurs du paramètre de pilotage η qui placent la déformation sur le seuil d'endommagement. A ce stade, la déformation s'exprime comme une fonction affine de η, c'est-à-dire que $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_0+\eta\boldsymbol{\varepsilon}_1$. Compte tenu de l'expression de la condition de cohérence (3), il s'en suit que η est solution de l'équation scalaire suivante :

$$Q\left(\boldsymbol{\varepsilon}_0+\eta\boldsymbol{\varepsilon}_1\right) = \varphi\left(b_n+\tau\right) \tag{20}$$

Compte-tenu de la convexité de Q, cette équation admet au plus deux solutions. On détaille dans [Lorentz, 2020] comment établir un intervalle borné dans lequel chercher ces solutions et l'application d'une méthode de Newton pour les déterminer.

5 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
15.1	E.LORENTZ, EDF-R&D/ERMES	Texte initial

6 Bibliographie

- Badel P., Godard V., Leblond J.-B. (2007) Application of some anisotropic damage model to the prediction of the failure of some complex industrial concrete structure. Int. J. Solids Struct. 44, 5848-5874.
- Lorentz E. (2017) A nonlocal damage model for plain concrete consistent with cohesive fracture. Int. J. Fract. 207, 123-159.
- Lorentz E. (2020) CIWAP3 – Fissuration du béton : proposition d'un modèle local isotrope représentatif de l'endommagement en traction et cisaillement pour simuler des zones fissurées homogènes. EDF R&D 6125-1724-2020-01604.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)