Modèle de comportement LKR

Résumé :

Le modèle de comportement *LKR* est une évolution thermomécanique du modèle élasto(visco)plastique *L&K* [1] et [2]. Son développement et son intégration numérique sont le fruit des travaux de thèse de S. Raude [3].

Ce document présente les grandes lignes conceptuelles du modèle et les principales équations qui régissent son fonctionnement. Le premier paragraphe introduit les grands concepts du modèle, essentiels à la compréhension du second paragraphe dans lequel sont présentées ses principales équations issues de [3] . Le dernier paragraphe revient brièvement sur les grandes lignes de l'intégration numérique du modèle.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Cadre physique et concepts du modèle L&K....3
1.1 Mécanisme élastoplastique....3
1.2 Mécanisme viscoplastique....6
1.3 Couplage entre les deux mécanismes....8
1.4 Remarques sur le comportement isotrope....8
2 Extension thermomécanique du modèle L&K (modèle LKR)....9
2.1 Partition du tenseur des déformations....9
2.2 Mécanisme élastique....9
2.3 Mécanisme plastique....10
2.4 Mécanisme viscoplastique....20
2.5 Couplage entre les deux mécanismes....23
2.6 Lois d'écoulement....23
2.7 Lois de dilatance....25
3 Intégration numérique....30
3.1 Schéma d'intégration explicite....30
3.2 Schéma d'intégration implicite....34
4 Description des paramètres du modèle....37
5 Variables internes....39
6 Bibliographie....40

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Cadre physique et concepts du modèle L&K

L'objectif de ce paragraphe n'est pas de décrire de manière exhaustive la démarche entreprise par [1] et [2] pour aboutir au développement du modèle *L&K*. Le but est de revenir sur certains points essentiels à la compréhension des paragraphes §2 et §3. Nous invitons le lecteur à se référer à [1] et [2] pour plus de détails. Les concepts présentés dans ce paragraphe ont été conservés par [3] dans le développement du modèle *LKR*.

Le modèle présenté par [2] est un modèle élasto(visco)plastique à deux mécanismes. Le premier mécanisme, élastoplastique, s'attache à décrire le comportement déviatorique instantané des géomatériaux. Le second mécanisme, viscoplastique, traduit l'effet du temps sur le comportement déviatorique.

Le comportement déviatorique instantané est caractérisé par des essais de compression simple/triaxiale et d'extension (entre autres). Le cadre conceptuel retenu pour le développement du mécanisme élastoplastique est principalement basé sur l'analyse du comportement en compression triaxiale. La réponse des géomatériaux à ce type de sollicitation se décompose en deux phases (voir figure 1.1). Pour des déformations relativement faibles, la résistance d'un échantillon augmente avec sa déformation axiale. Cette phase, qualifiée de *pré-pic*, prend fin lorsque le matériau atteint sa résistance maximale. Au-delà de ce pic, la résistance diminue jusqu'à atteindre une valeur résiduelle. L'évolution d'un matériau entre ses résistances de pic et résiduelle est qualifiée de *post-pic*. Les comportements *pré-pic* et *post-pic* sont détaillés dans le paragraphe §1.1.

L'effet du temps sur le comportement déviatorique est caractérisé par des essais de fluage, de relaxation ou de compression triaxiale à différentes vitesses de chargement. Le cadre conceptuel retenu pour le développement du mécanisme viscoplastique est principalement basé sur l'analyse du comportement lors d'un essai de fluage. Ce point est détaillé dans le paragraphe §1.2.

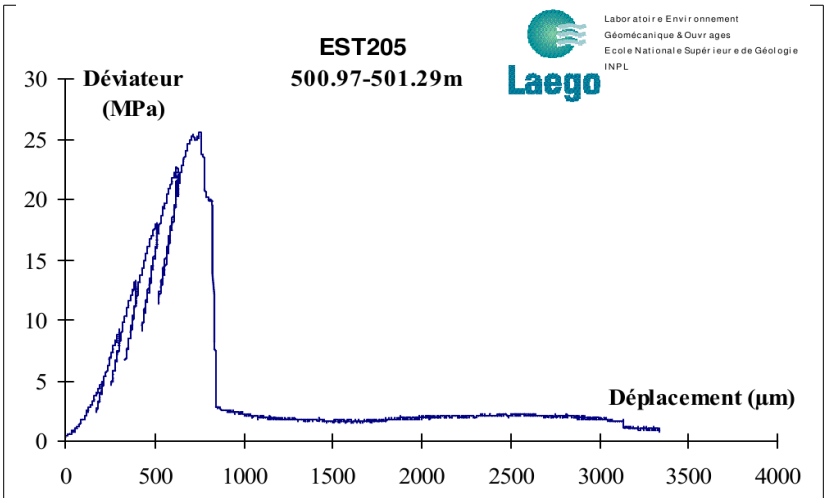


Figure 1.1: Essai de compression simple sur l'argilite du Cox [4]

1.1 Mécanisme élastoplastique

Le mécanisme élastoplastique s'attache à reproduire les phénomènes suivants [1] :

- le comportement élastique est non linéaire pour des faibles déformations ;
- la résistance maximale dépend du niveau de confinement ;
- le radoucissement post-pic est gouverné par la perte progressive de cohésion et par l'évolution de l'angle de dilatance ;
- l'état résiduel, ou état critique, est caractérisé par une cohésion nulle, une dilatance nulle et un comportement purement frottant.

1.1.1 Comportement pré-pic

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le comportement pré-pic peut se décomposer en plusieurs phases. À titre d'exemple, [2] et [5] en distinguent six (voir figure 1.2):

1. Cette phase, dite de serrage, concerne les faibles niveaux de contrainte. Elle s'accompagne d'une contraction de l'échantillon et traduit la fermeture initiale des fissures pré-existantes au sein du matériau. Cette phase est considérablement réduite, voire inexistante, lorsqu'une pression de confinement est appliquée à l'échantillon.
2. Cette phase correspond à la partie linéaire/élastique de la courbe contrainte-déformation et dépasse rarement 40% de la résistance maximale. Le comportement volumique reste contractant mais évolue plus lentement que pendant la première phase.
3. Cette phase marque l'initiation de la fissuration et de la dilatance. La propagation des fissures créées reste cependant stable. Le niveau de contrainte correspondant à cette phase est généralement compris entre 30% et 60% de la résistance maximale.
4. Pour des déviateurs compris entre 50% et 60% de la résistance maximale, une intensification importante de la fissuration est observée. Une augmentation de la pression de confinement a un effet stabilisateur sur le développement de ces fissures.
5. La coalescence des fissures s'amorce. Cette phase correspond à des déviateurs compris entre 70% et 90% de la résistance maximale.

   Les phases 3, 4 et 5 ne font pas toujours l'objet d'une telle distinction. Leur caractérisation et les niveaux de déviateurs auxquels elles correspondent dépendent fortement de la pression de confinement appliquée à l'échantillon. Pour de faibles confinements, la fissuration deviendra rapidement instable dès la troisième phase. À confinement élevé, cette transition peut être retardée jusqu'à la fin de la cinquième phase.
6. Cette phase est associée au développement instable de la fissuration et à une augmentation significative de la dilatance jusqu'à la résistance maximale de l'échantillon.

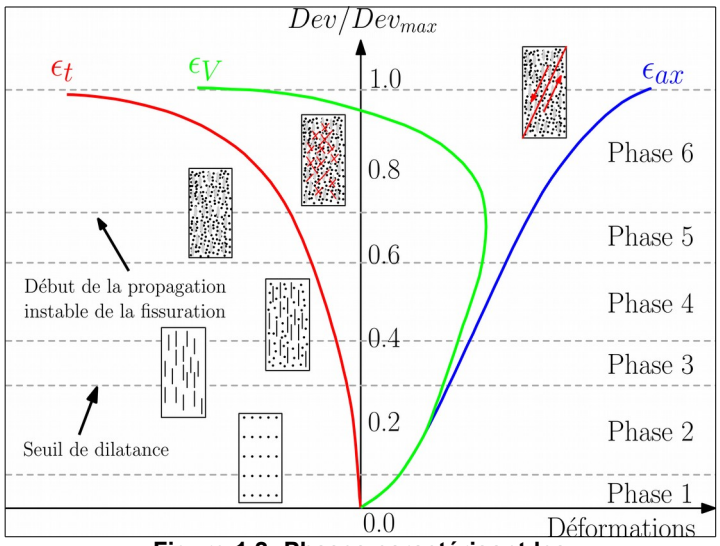


Figure 1.2: Phases caractérisant les évolutions mécanique et volumique d'un matériau au cours d'essais de compression simple ou triaxiale (de [5] repris par [2])

De manière simplifiée, nous retiendrons trois phases :

1. Les phases 1 et 2 peuvent constituer un seul et même domaine à l'intérieur duquel le comportement est élastique. La limite supérieure de cette phase correspond à la limite d'élasticité du matériau.
2. Les phases 3, 4 et 5 peuvent également constituer un seul et même domaine qui marque une transition dans le comportement volumique (fissuration stable/instable). Pour de faibles confinements, cette transition s'opère pour des niveaux de contrainte faibles, proches de la limite d'élasticité initiale. Pour des pressions de confinement élevées, cette transition peut avoir lieu pour des niveaux de contrainte très proches du pic de résistance.
3. La phase 6 est associée au développement instable de la fissuration. La limite supérieure de cette phase coïncide avec la résistance maximale du matériau.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Cette décomposition en trois phases simplifiées permet de définir trois seuils dans l'espace des contraintes (figure 1.4). Les limites supérieures des domaines 1 et 3 caractérisent des seuils mécaniques : limite d'élasticité initiale et résistance maximale, également appelée résistance de pic. La limite supérieure de la phase 2. marque une transition dans le comportement volumique (contractance/dilatance). Cette transition entre des comportements contractant et dilatant s'opère pour des états de contrainte appelés états caractéristiques [6] et et [7] . L'ensemble des états caractéristiques obtenus pour des essais de compression triaxiale à différentes pressions de confinement définit le seuil caractéristique.

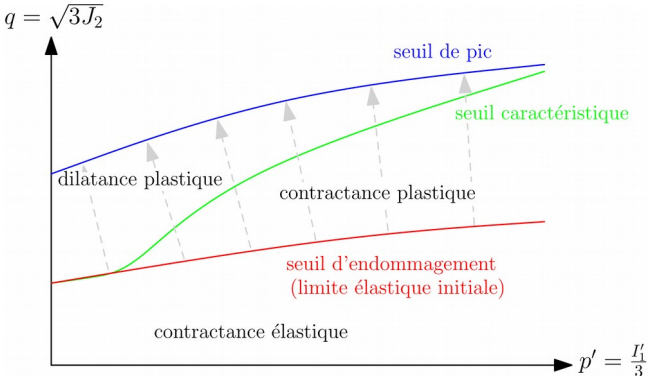


Figure 1.3: Seuils d'évolution en phase pré-pic.

Dans le cadre retenu par [2] , l'écrouissage pré-pic se traduit donc par une *dilatation* du domaine élastique entre les seuils *d'endommagement* (ou limite d'élasticité initiale) et de *pic* (ou résistance maximale) (figure 1.3).

Lorsque l'état de contrainte se trouve entre la limite d'élasticité initiale et le seuil caractéristique, le comportement volumique plastique est qualifié de contractant. Lorsque l'état de contrainte se trouve entre le seuil caractéristique et le seuil de pic, le comportement volumique plastique est qualifié de dilatant. Le seuil caractéristique est défini comme l'union de la limite d'élasticité initiale (pour des confinements faibles) et d'un seuil appelé limite de *clivage* en référence aux travaux réalisés par [8] et [9] (confinements plus élevés) (figure 1.3).

1.1.2 Comportement post-pic

Le comportement post-pic caractérise l'évolution du matériau à proximité et au-delà du pic de résistance (entre ses résistances maximale et résiduelle). La plupart des matériaux cohérents présentent un comportement radoucissant après avoir atteint leur résistance de pic. Ce domaine traduit une détérioration des propriétés mécaniques du matériau et, en particulier, une perte de cohésion. Le comportement post-pic est fortement dépendant du confinement [2] . Une augmentation de la pression de confinement a tendance à stabiliser la chute de résistance. Cette stabilisation est cependant progressive et fonction de paramètres extérieurs tels que la vitesse de sollicitation, la température, le chemin de contrainte, la pression interstitielle, etc. Plusieurs faciès de rupture, ou modes de ruine [1] , sont observés en fonction de la pression de confinement. Il est communément admis d'en distinguer trois :

- Confinement faible : l'échantillon se rompt par *clivage* , la rupture est fragile et explosive. Ce mode de rupture est qualifié de *bifurcation diffuse* par [10] (figure 1.4) ;
- Confinement intermédiaire : la formation d'une ou plusieurs structure(s) de cisaillement au sein de l'échantillon contrôle la perte de résistance (figure 1.4). Dès la création de ces structures dites *induites* [1] , la perte de résistance est entièrement contrôlée par le comportement le long de ces discontinuités jusqu'au seuil résiduel (critère de résistance résiduelle, état critique du matériau, comportement purement frottant, cohésion et dilatance nulles). Ce mode de rupture est qualifié de *bifurcation localisée* par [10] ;
- Confinement élevé : le comportement devient ductile. L'échantillon peut se déformer de manière importante sans perte de résistance et d'homogénéité. Le comportement volumique peut rester purement contractant. Il y a *mise en tonneau* de l'échantillon (figure 1.4).

Les travaux réalisés par [1] et [2] ont permis de mettre en évidence l'existence d'un état intermédiaire entre les résistances maximale et résiduelle d'un matériau. Cet état coïncide avec une perte totale de cohésion et un maximum de dilatance qui correspondent à la formation d'une ou plusieurs surface(s) de cisaillement (figure 1.4). L'ensemble de ces états intermédiaires définit un seuil dans l'espace des contraintes, appelé seuil

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

intermédiaire. [1] et [2] supposent que le seuil intermédiaire coïncide avec la seconde partie du seuil caractéristique introduit dans le paragraphe §1.1.1 Il ne faut cependant pas confondre ces deux seuils. Le seuil caractéristique est un seuil de transition dans le comportement volumique pré-pic tandis que le seuil intermédiaire est un seuil *mécanique* par lequel s'écrouit le domaine élastique en régime post-pic. Le comportement volumique en phase post-pic est toujours dilatant, peu importe l'état de contrainte. L'évolution du domaine d'élasticité pour le comportement post-pic se fait donc en deux temps [2]:

- Une première transition entre seuils de pic et intermédiaire pendant laquelle la cohésion du matériau va progressivement s'annuler (grandeur C sur la figure 1.5) tandis que la dilatance augmentera pour atteindre son maximum sur le seuil intermédiaire (grandeur ϕ sur la sur la figure 1.5).
- Une seconde transition entre seuils intermédiaire et résiduel pendant laquelle la dilatance diminue par usure progressive des lèvres des structures de cisaillement créées au niveau du seuil intermédiaire (figure 1.5). Sur le seuil résiduel, cohésion et dilatance sont nulles, le comportement est purement frottant (état critique) (grandeur $\phi_{rés}$ sur la figure 1.5).

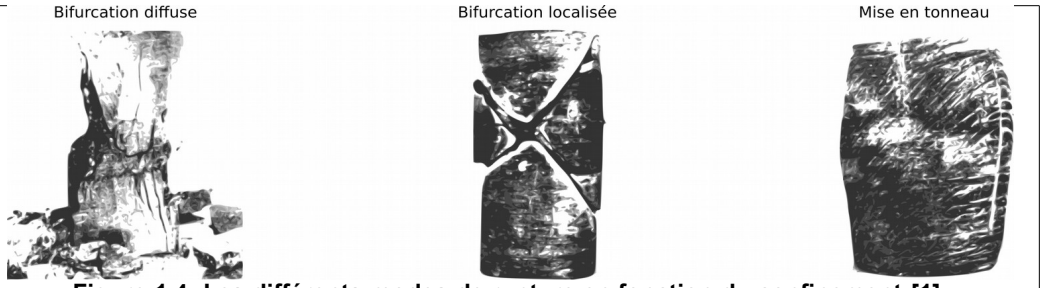


Figure 1.4: Les différents modes de rupture en fonction du confinement [1]

Pour de faibles confinements, la transition entre seuil de pic et seuil résiduel se fait essentiellement par perte de cohésion. Il y a rupture par clivage ou bifurcation diffuse (figure 1.5). La dilatance ne fait qu'augmenter, aucune surface de cisaillement indépendante n'est créée. Pour des confinements plus élevés, la tendance s'inverse; le rôle de la dilatance devient de plus en plus important (figure 1.5).

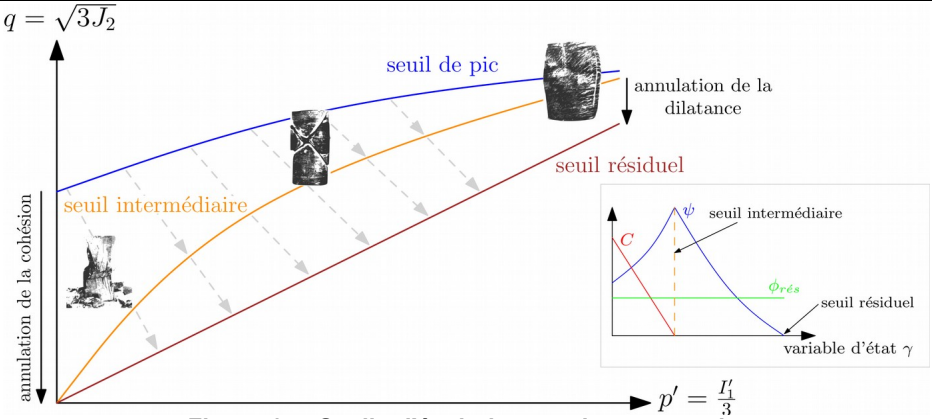


Figure 1.5: Seuils d'évolution en phase post-pic.

1.2 Mécanisme viscoplastique

L'effet du temps sur le comportement d'un matériau s'exprime par différents phénomènes. Citons par exemple :

- La consolidation : diminution de volume dans le temps suite à un drainage du matériau (phénomène hydromécanique).
- Le gonflement : augmentation de volume engendrée par des modifications chimiques de la structure de la roche.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Le fluage : déformations différées à chargement constant.
- La relaxation : relâchement des contraintes à déformation constante.
- Le vieillissement : dégradation des propriétés mécaniques de la roche suite à une altération chimique de ses minéraux constitutifs.
- La cicatrisation : phénomène physico-chimique de recristallisation permettant à la roche de retrouver ses propriétés mécaniques.

Le comportement déviatorique différé des géomatériaux peut être caractérisé par différents types d'essais :

- Des essais de compression triaxiale à différentes vitesses de sollicitation : il est communément admis que la résistance maximale d'un matériau diminue avec une diminution de la vitesse de chargement [2] .
- Des essais de fluage (figure 1.6) : un déviateur est maintenu constant après une phase de confinement isotrope. L'évolution des déformations axiales en fonction du temps permet de caractériser la vitesse et l'amplitude des effets différés. Trois régimes distincts sont généralement mis en évidence : un fluage primaire pendant lequel la vitesse de fluage ne fait que diminuer au cours du temps; un fluage secondaire pendant lequel la vitesse de fluage est constante; un fluage tertiaire pendant lequel la vitesse de fluage augmente rapidement. Ce dernier régime mène généralement à la rupture de l'échantillon.
- Des essais de relaxation : la déformation est maintenue constante. La chute de contrainte au cours du temps permet également de caractériser la vitesse et l'amplitude des effets différés.

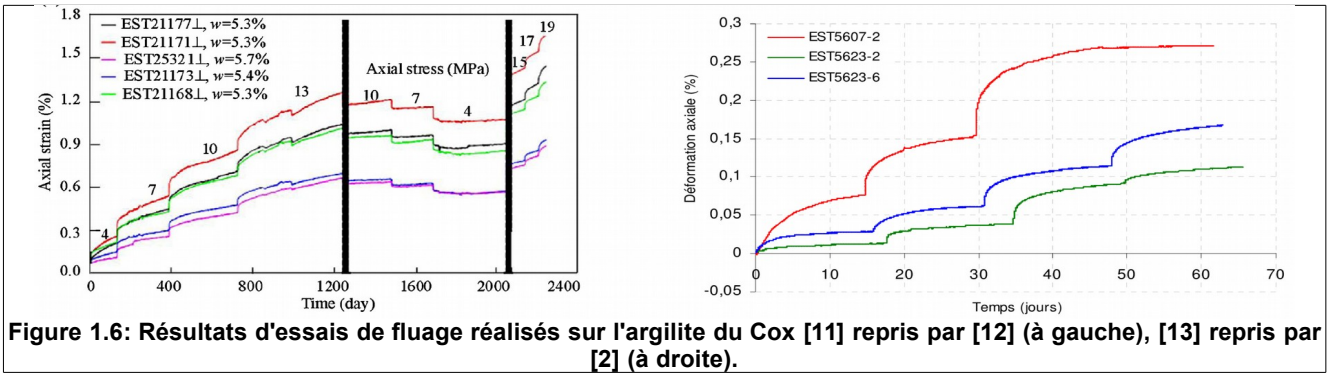


Figure 1.6: Résultats d'essais de fluage réalisés sur l'argilite du Cox [11] repris par [12] (à gauche), [13] repris par [2] (à droite).

En fonction du niveau de déviateur appliqué à un échantillon, les trois régimes de fluage présentés ci-dessus peuvent ou non exister. Pour des niveaux de déviateur faibles, le fluage se stabilise rapidement (fluage primaire). Pour des déviateurs plus élevés, le comportement à long terme évolue de manière instable. Le temps de transition entre fluages secondaire et tertiaire dépend du niveau de contrainte appliqué et de paramètres extérieurs tels que la température. Une augmentation de la pression de confinement stabilise le comportement à long terme. L'identification des états de contrainte correspondant à la transition entre des comportements à long terme stable et instable pour différentes pressions de confinement permet de définir un seuil dans l'espace des contraintes, appelé seuil viscoplastique maximal. Ce seuil est également appelé seuil de résistance à long terme par [2] car le niveau de contrainte de transition entre fluages stable et instable correspond aussi à la résistance maximale pouvant être atteinte lors d'un essai de compression triaxiale à vitesse de chargement infiniment lente.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

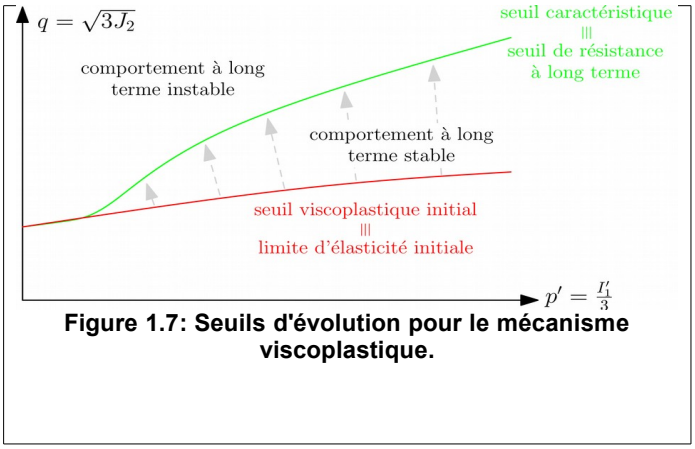


Figure 1.7: Seuils d'évolution pour le mécanisme viscoplastique.

L'existence de ce seuil ne fait pas l'unanimité auprès de la communauté scientifique car sa détermination reste difficile à définir, en particulier pour les matériaux à cinétique de fluage lente. Cependant, basé sur plusieurs travaux énumérés par [2] , le modèle *L&K* retient comme seuil de résistance à long terme, le seuil d'initiation de fissurations d'extension (fissuration instable), c'est à dire l'enveloppe du seuil d'endommagement et de la limite de clivage. Le seuil de résistance à long terme coïncide donc avec le seuil caractéristique défini dans le paragraphe §1.1.1. Là encore, il ne faut pas confondre le rôle de ces deux seuils. Le seuil viscoplastique maximal est un seuil *mécanique* par lequel s'écrouit le domaine d'élasticité du mécanisme viscoplastique tandis que le seuil caractéristique est un seuil de transition dans le comportement volumique pour les deux mécanismes. Avec ces définitions, un comportement à long terme instable correspond nécessairement à un état volumique dilatant. Le seuil d'initiation des déformations viscoplastiques correspond à la limite d'élasticité initiale (seuil d'endommagement), on le voit sur la figure 1.7 avec $q=\sigma_{eq}=\sqrt{3\,J_2}=\sqrt{\frac{3}{2}\widetilde{\sigma}:\widetilde{\sigma}}$ la contrainte équivalente de von Mises (contrainte déviatorique) et p' représente la pression moyenne effective (confinement). Le domaine élastique du mécanisme viscoplastique évolue donc entre la limite d'élasticité initiale (qui est identique à celle du mécanisme élastoplastique) et le seuil de résistance à long terme. Lors d'un essai de fluage, un déviateur maintenu constant entre la limite d'élasticité initiale et le seuil viscoplastique maximal correspond à un fluage stable (fluage primaire) et à un comportement volumique contractant. Un déviateur maintenu constant entre le seuil viscoplastique maximal et le seuil de pic correspond à un comportement à long terme instable et à un comportement volumique dilatant.

1.3 Couplage entre les deux mécanismes

Comme indiqué dans le paragraphe §1.2, la résistance maximale atteinte lors d'un essai de compression triaxiale dépend de la vitesse de sollicitation et donc du temps. Or la résistance maximale est une notion uniquement portée par le mécanisme plastique (seuil de pic) qui est indépendant du temps. Pour être en mesure de reproduire ce genre de phénomène, il est donc nécessaire de coupler les deux mécanismes afin d'introduire, de manière implicite, la notion de temps au sein du mécanisme plastique.

Le couplage introduit par [2] s'opère au niveau des variables internes d'écrouissage des deux mécanismes. Lorsque l'état de contrainte se trouve au-dessus du seuil viscoplastique maximal, l'écrouissage de la surface viscoplastique influence celui de la surface plastique. Le lecteur se référera à [2] pour plus de détails à ce sujet. Le couplage entre les deux mécanismes sera par ailleurs évoqué dans le paragraphe §2.5 dans lequel sont présentées les expressions des variables d'écrouissage des deux mécanismes.

1.4 Remarques sur le comportement isotrope

Le modèle de comportement *L&K* a initialement été développé pour reproduire le comportement d'ouvrages lors d'excavations souterraines. Le chemin de contrainte suivi en paroi de galerie lors d'une excavation n'est pas isotrope. Le modèle *L&K* s'attache donc essentiellement à reproduire le comportement déviatorique des géomatériaux. Le long d'un chemin de contrainte purement hydrostatique, le comportement modélisé reste élastique non-linéaire. Il en est de même pour le modèle *LKR*.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Extension thermomécanique du modèle L&K (modèle LKR)

L'objectif de ce paragraphe est de présenter les évolutions apportées au modèle de comportement *L&K*, que ce soit sur la partie mécanique du modèle ou sur l'intégration des effets de la température. L'intégralité des équations constitutives du modèle est présentée dans ce paragraphe. Quelques commentaires seront formulés concernant les évolutions apportées au modèle *L&K* et l'intégration des effets de la température.

Le modèle *LKR* peut être couplé aux équations classiques de la thermo-poro-élasticité au sens de [14] et [15] . Les équations de couplage ne sont pas détaillées dans ce document. Pour plus d'informations, voir [14].

2.1 Partition du tenseur des déformations

Le tenseur des déformations est divisé en quatre parties. Le tenseur des déformations élastiques se décompose en une partie mécanique, $\varepsilon^{m,e}$, et en une partie thermique, $\varepsilon^{T,e}$. Les déformations irréversibles se décomposent en une partie plastique (instantanée), ε^{p} , et en une partie viscoplastique (différée), ε^{vp} . Sous l'hypothèse des petites perturbations, cette décomposition est également valable pour une écriture incrémentale :

$$\dot{\varepsilon}=\dot{\varepsilon}^{m,e}+\dot{\varepsilon}^{T,e}+\dot{\varepsilon}^{vp}+\dot{\varepsilon}^{p} \quad (1)$$

La notation $\dot{x}$ représente la dérivée par rapport au temps de la grandeur x . La notion de temps physique est uniquement valable pour le mécanisme viscoplastique. La notion de temps pour les mécanismes élastique et plastique fait référence à un pas de temps d'intégration numérique.

2.2 Mécanisme élastique

L'incrément de déformation élastique *mécanique* est lié à l'incrément de contrainte par une relation élastique non-linéaire, qualifiée d'hypoélastique :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{m,e}=\frac{1}{2G}\dot{\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}}+\frac{1}{9K}\dot{I}'_1\boldsymbol{\delta} \quad (2)$$

Où $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{\sigma}-p\boldsymbol{\delta}$ est la partie déviatorique du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$. $\dot{I}'_1=3p'=Tr(\boldsymbol{\sigma}')$ est le premier invariant du tenseur des contraintes effectives $\boldsymbol{\sigma}'$. p' est la pression moyenne effective. $\boldsymbol{\delta}$ est le tenseur identité d'ordre deux. K et G sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement qui dépendent de l'état de contrainte moyen :

$$K=K_0\left(\frac{p'}{P_a}\right)^{n_{elas}} \text{ et } G=G_0\left(\frac{p'}{P_a}\right)^{n_{elas}} \quad (3)$$

P_A est la pression atmosphérique (en Pascals), K_0 et G_0 sont les modules de compressibilité et de cisaillement à pression atmosphérique et n_{elas} (**NELAS**) est une constante matériau qui traduit l'évolution des modules élastiques en fonction de l'état de contrainte moyen. K_0 et G_0 sont directement calculés à partir du module de Young et du coefficient de Poisson saisis par l'utilisateur sous le mot-clé facteur **ELAS** de la commande **DEFI_MATERIAU**.

Les modules élastiques des roches tendres et dures ont tendance à légèrement diminuer avec la température. Cependant, cette évolution est moins franche pour des matériaux argileux, fortement dépendante de paramètres extérieurs tels que l'humidité relative, et négligeable par rapport aux effets de la pression de confinement dans les gammes de températures couramment envisagées. Les effets de la température sur les modules élastiques ne sont donc pas pris en compte dans le modèle *LKR*.

L'incrément de déformation élastique *thermique*, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{T,e}$, est lié à l'incrément de température $\dot{T}$, par la relation :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{T,e}=\alpha_V\dot{T}\,\boldsymbol{\delta} \quad (4)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Avec α_V (**ALPHA**) est, en première approximation, indépendant de la température.

Remarque : il est néanmoins possible de définir les modules élastiques et le coefficient de dilatation thermique comme des fonctions de la température à travers la définition de variables de commandes.

2.3 Mécanisme plastique

2.3.1 Expression du critère de plasticité

L'expression générale du critère de plasticité reste inchangée par rapport au critère proposé par [2] :

$$F^p(\boldsymbol{\sigma}', a^p, s^p, m^p) \equiv \frac{q\,H(\theta)}{\sigma_c H_0^c} - \left(\frac{m^p}{\sigma_c} \left(p' - \frac{qH(\theta)}{3H_0^c} \right) + s^p \right)^{a^p} = 0 \tag{5}$$

Les quantités a^p, s^p et m^p sont les paramètres d'écrouissage du mécanisme plastique. Les expressions de ces paramètres sont détaillées dans le paragraphe §2.3.2 Nous laissons le lecteur se référer à [2] ou à [16] pour plus de détails sur la signification physique de ces paramètres. s peut être associé à un terme de cohésion (un matériau est supposé intact si $s=1$ et granulaire si $s=0$), m peut être assimilé à un terme de friction ou de frottement définissant la pente du critère dans le plan des contraintes principales et a peut être assimilé à un terme de *dilatance [1]* . On note $\sigma_{eq}=\sqrt{3J_2}=\sqrt{\frac{3}{2}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}$ la contrainte équivalente de von Mises et σ_c (**SIGMA_C**) est la résistance à la compression simple. La fonction $H(\theta)$ traduit l'influence du troisième invariant du tenseur des contraintes sur la forme du critère de plasticité dans le plan déviatorique, ou plan π (plan de normale p'). θ est l'angle de Lode (voir (6)). Cette fonction a été modifiée pour permettre de garantir la convexité du critère *L&K* dans le plan π pour tout jeu de paramètres matériau. Les recherches menées dans [3] ont permis d'aboutir à une nouvelle expression inspirée des travaux de [17] :

$$\begin{cases} H(\theta)=\cos\left(\frac{\beta\pi}{6}-\frac{1}{3}\arccos(\gamma\cos 3\theta)\right) \\ H_0^c=H(0)=\cos\left(\frac{\beta\pi}{6}-\frac{1}{3}\arccos(\gamma)\right) \end{cases} \text{ pour } \theta\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right] \text{ avec } \cos 3\theta=\frac{\sqrt{54}\,det\,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\left(\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}\right)^3} \tag{6}$$

La constante β (**BETA**) est fixée à $1{,}5$ et γ (**GAMMA**) est une constante matériau qui varie entre 0 et 1 . Pour $\gamma=0$, le critère de plasticité est indépendant de θ (critère de type Drucker-Prager). Pour $\gamma=1$, nous retrouvons le critère de Mohr-Coulomb. La figure 2.1 présente l'évolution du critère de plasticité dans le plan π pour plusieurs valeurs des constantes β et γ . La relation (6) a l'avantage d'introduire une seule constante matériau, γ , et de garantir la convexité du critère pour $0\leq\gamma\leq 1$. γ peut, par exemple, être déterminé en identifiant la résistance maximale atteinte lors d'essais d'extension.

Remarque : d 'autres valeurs pour β sont possibles et l'impact de ce choix est présenté sur la f igure 2.1 . Dans tous les cas, le critère reste convexe pour $0\leq\gamma\leq 1$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

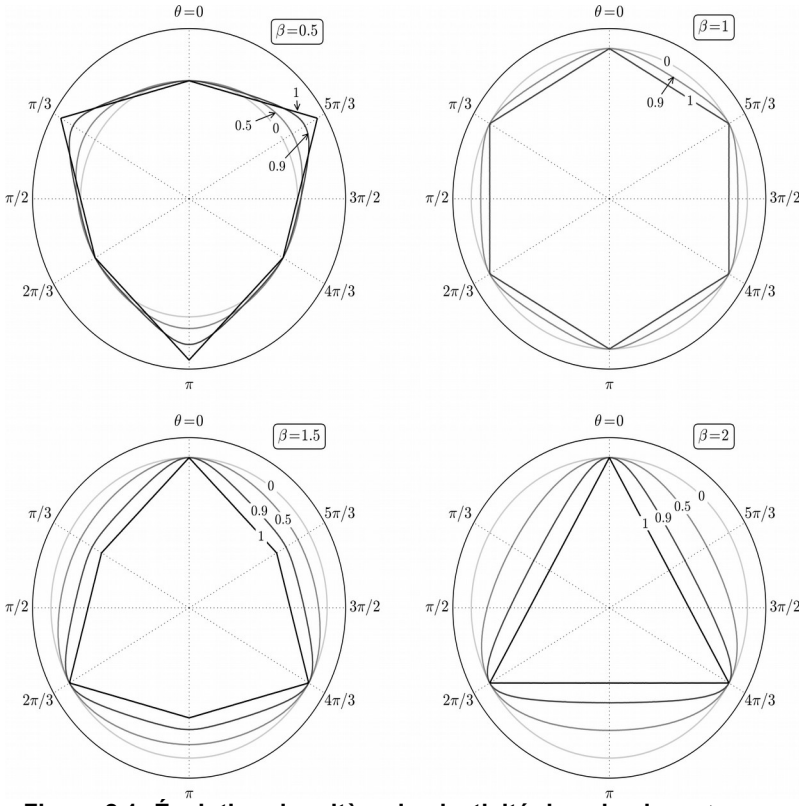


Figure 2.1: Évolution du critère de plasticité dans le plan π pour $\beta\in\{0,5;1;1,5;2\}$ et $\gamma\in\{0;0,5;0,9;1\}$

2.3.2 Paramètres d'écrouissage

Les paramètres d'écrouissage a^p, s^p et m^p sont définis comme des fonctions de la variable d'écrouissage du mécanisme plastique, que nous noterons ξ^p, et de la température T. L'expression de ξ^p sera détaillée dans le paragraphe §2.5. Les valeurs prises par ces fonctions traduisent l'évolution du domaine d'élasticité entre les différents seuils présentés sur les figures 1.4 et 1.6. Cependant, par rapport au cas mécanique, ces seuils ne sont plus statiques; ils évoluent en fonction de la température.

Nous distinguerons trois phases. La première phase correspond à un écrouissage positif du domaine d'élasticité entre la limite d'élasticité initiale et le seuil de pic (figure 1.4). Les deuxième et troisième phases correspondent à un écrouissage négatif entre (1) le seuil de pic et le seuil intermédiaire et (2) le seuil intermédiaire et le seuil résiduel (figure 1.6).

Nous utiliserons le terme de *surface plastique* ou *surface du mécanisme plastique* pour désigner la frontière du domaine d'élasticité *actuel* du mécanisme plastique.

2.3.2.1 Entre la limite d'élasticité initiale et le seuil de pic

Le domaine d'élasticité évolue dans un premier temps entre la limite d'élasticité initiale, ou seuil d'endommagement, et le seuil de pic (numéro 2 sur figure 2.2).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

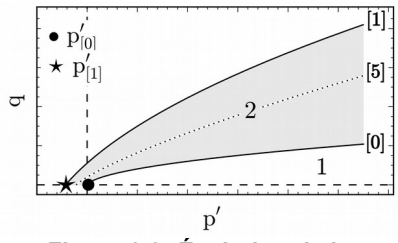


Figure 2.2: Évolution de la surface plastique entre la limite d'élasticité initiale (seuil d'endommagement), et le seuil de pic (de résistance maximale)

Entre ces deux seuils, les paramètres d'écrouissage évoluent comme suit :

$$\begin{cases} a^p(\xi^p,T)=0{,}5 \\ s^p(\xi^p,T)=s_{[1]}-(s_{[1]}-s_{[0]})\left(1-\dfrac{\xi^p}{\xi_{[1]}}\right)^{\nu_1} \\ m^p(\xi^p,T)=m_{[1]}-(m_{[1]}-m_{[0]})\left(1-\dfrac{\xi^p}{\xi_{[1]}}\right)^{\nu_1} \end{cases} \tag{7}$$

Les indices $[0]$ et $[1]$ désignent respectivement les valeurs prises par les paramètres ξ^p, s^p et m^p sur les seuils d'endommagement et de pic.

La résistance maximale des géomatériaux diminuent non-linéairement avec la température. Cette évolution est prise en compte en faisant dépendre $s_{[1]}$ et $m_{[1]}$ de T :

$$\begin{cases} m_{[1]}=m^0_{[1]}e^{r^m(T-T_0)^2} \\ s_{[1]}=e^{r^s(T-T_0)^2} \end{cases} \tag{8}$$

Les coefficients $m^0_{[1]}$ (**M_1**), r^m (R_M) et r^s (R_S) sont des paramètres matériau, T_0 est une température de référence et T est la température à un instant t. Les paramètres r^m et r^s traduisent l'influence de la température sur la résistance maximale. Ces constantes doivent être strictement négatives (R_M et R_S doivent être strictement positifs) et respecter la condition $r^s \leq r^m$. La figure 2.3 présente l'évolution des paramètres $s_{[1]}$ et $m_{[1]}$ et du seuil de pic en fonction la température.

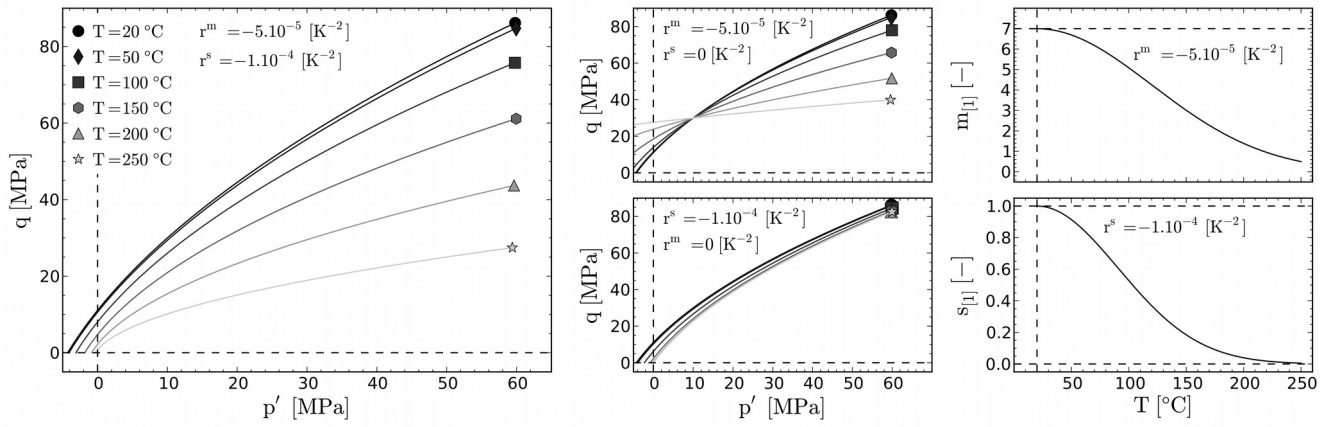


Figure 2.3: Influence de la température sur les paramètres $s_{[1]}$ et $m_{[1]}$ et sur le seuil de pic dans le plan des invariants du tenseur des contraintes (p',q).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Conformément au cadre fixé par [2], on a $s_{[1]}^0=1$; le terme de cohésion est maximal sur le seuil de pic à température ambiante.

Peu de données expérimentales existent concernant l'influence de la température sur la position et la forme de la limite d'élasticité initiale. On fait l'hypothèse qu'elle évolue de la même manière que le seuil de résistance maximale :

$$m_{[0]}=m_{[0]}^0 e^{r^m(T-T_0)^2} \tag{9}$$

Le coefficient $m_{[0]}^0$ (**M_0**) est un paramètre matériau. Le paramètre $s_{[0]}$ est déterminé de manière analytique en supposant que le rapport entre les limites d'élasticité initiales en compression et en traction est égal à 10 (voir équation (10)). Cette valeur est couramment utilisée comme rapport entre les résistances maximales en compression et en traction des roches et des bétons. Par simplification, elle est ici extrapolée au cas de la limite d'élasticité initiale :

$$s_{[0]}=\left(\frac{m_{[0]}\zeta}{1-\zeta^2}\right)^2 \text{ avec } \zeta=0,1 \tag{10}$$

Le paramètre $s_{[0]}$ varie également avec la température via $m_{[0]}$. Le paramètre $\xi_{[1]}$ de l'équation (7) contrôle l'abscisse du pic de résistance dans le plan $\{\varepsilon_{ax},q\}$ où ε_{ax} représente la déformation axiale d'un échantillon lors d'un essai de compression triaxiale. La température peut influencer la position du pic de résistance. Inspirés des travaux de [18] , on propose de faire évoluer $\xi_{[1]}$ avec la température comme suit :

$$\xi_{[1]}=\xi_{[1]}^0 e^{r_{[1]}^x(T-T_0)} \tag{11}$$

Le coefficient $\xi_{[1]}^0$ (**XI_1**) est un paramètre matériau qui contrôle l'abscisse du pic de résistance à température ambiante et $r_{[1]}^x$ (**R_X1**) est un paramètre matériau strictement positif qui traduit l'évolution de cet abscisse en fonction de la température. Enfin, v_1 (**V_1**) est un paramètre matériau strictement supérieur à 1 qui influence la vitesse d'écrouissage de la surface du mécanisme plastique entre les seuils d'endommagement et de pic (voir figure 2.4).

L es paramètres matériau introduits par les relations d'écrouissage entre les seuils d'endommagement et de pic sont les suivants :

Paramètre matériau	Intervalle de définition
$m_{[0]}^0$	$\mathbb{R}^+$
$m_{[1]}^0$	$\left[m_{[0]}^0,+\infty\right[$
r^m	$[r^s,0]$
r^s	$\left]-\infty,r^m\right]$
$\xi_{[1]}^0$	$\mathbb{R}^+$
$r_{[1]}^x$	$\mathbb{R}^+$
v_1	$\left]1,+\infty\right[$

Tous ces paramètres peuvent être déterminés relativement facilement à partir de résultats d'essais de compression triaxiale à températures ambiante et élevée :

- Le paramètre $m_{[1]}^0$ s'obtient en ajustant le seuil de pic sur les résistances maximales obtenues pour plusieurs pressions de confinement à température ambiante.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Les paramètres r^s et r^m sont déterminés en ajustant le seuil de pic sur l'ensemble des résistances maximales obtenues pour plusieurs pressions de confinement et plusieurs températures.
- $\xi^0_{[1]}$ s'obtient en déterminant les abscisses des pics de résistance dans le plan $\{\varepsilon_{ax}, q\}$ pour plusieurs pressions de confinement à température ambiante.
- $r^x_{[1]}$ peut être déterminé en ajustant les abscisses des pics de résistance dans le plan $\{\varepsilon_{ax}, q\}$ pour plusieurs pressions de confinement et plusieurs températures.
- ν_1 peut être déterminé en ajustant la partie pré-pic des courbes contrainte-déformation axiale à température ambiante.
- $m^0_{[0]}$ peut être déterminé en identifiant le niveau de contrainte pour lequel des déformations irréversibles apparaissent. Par manque de données expérimentales, [2] et [19] proposent de fixer la limite d'élasticité à confinement nul à 30% de la résistance à la compression simple. Ici, cette hypothèse implique directement que $m^0_{[0]} \approx 3$. Cette valeur semble correcte pour des roches dures mais trop élevée pour des roches tendres et des sols.

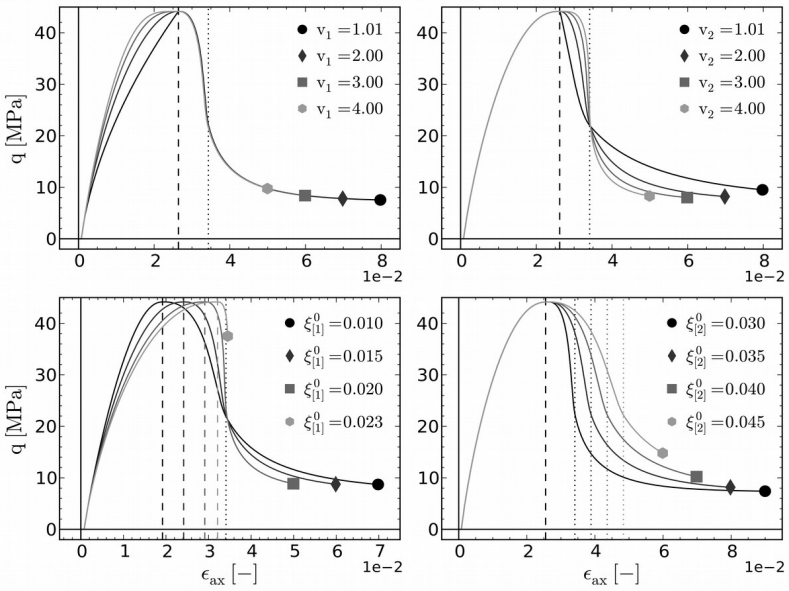


Figure 2.4: Influence des paramètres $\xi^0_{[1]}$, $\xi^0_{[2]}$, ν_1 et ν_2 sur la position et la forme des courbes contrainte-déformation. Les lignes tiretées correspondent à un état de contrainte qui se trouve sur le seuil de pic. Les lignes en pointillés correspondent à un état de contrainte qui se trouve sur le seuil intermédiaire.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.3.2.2 Entre le seuil de pic et le seuil intermédiaire

Le domaine d'élasticité du mécanisme plastique s'écrouit ensuite négativement entre le seuil de pic et le seuil intermédiaire (numéro 3 sur la figure 2.5).

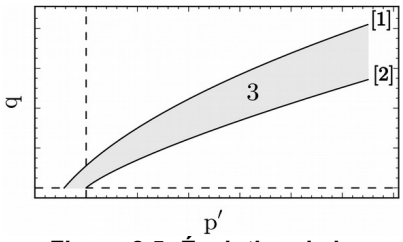


Figure 2.5: Évolution de la surface plastique entre le seuil de pic, indicé et le seuil intermédiaire, indicé.

Entre ces deux seuils, les paramètres d'écrouissage évoluent comme suit :

$$\begin{cases} a^p(\xi^p,T)=\dfrac{1}{2}+\left(a_{[2]}-\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{\xi^p-\xi_{[1]}}{\xi_{[2]}-\xi_{[1]}}\right)^{v_2} \\ s^p(\xi^p,T)=s_{[1]}\left(1-\left(\dfrac{\xi^p-\xi_{[1]}}{\xi_{[2]}-\xi_{[1]}}\right)^{v_2}\left(1+\dfrac{v_2\left(\xi_{[2]}-\xi^p\right)}{\xi_{[2]}-\xi_{[1]}}\right)\right) \\ m^p(\xi^p,T)=m_{[1]}\left(\dfrac{f_i^{1/a^p}-s^p}{f_i^2-s_{[2]}}\right) \text{ avec } fi=\dfrac{q_i}{\sigma_c} \end{cases} \quad (12)$$

Les indices $[1]$ et $[2]$ désignent respectivement les valeurs prises par les paramètres a^p, s^p, m^p et ξ^p sur les seuils de pic et intermédiaire. Le paramètre m^p est déduit des expressions de a^p et s^p en notant $\{p_i,q_i\}$ le point d'intersection entre les seuils de pic, intermédiaire et résiduel dans le plan $\{p',q\}$ (figure 2.6) et en écrivant que ce point appartient à la fois au seuil de pic et à toute surface entre le seuil de pic et le seuil intermédiaire (pour $\theta=0$).

p_i correspond à ce que nous appelons *pression de transition entre des comportements fragile et ductile*. q_i est l'ordonnée correspondante. Dans de nombreux modèles basés sur un formalisme de type Cam Clay, la pression de transition, assimilée à la moitié de la pression de préconsolidation initiale, est un paramètre matériau. Ce paramètre est couramment déterminé à partir de résultats d'essais oedométriques. Ici, nous pouvons définir de manière équivalente p_i ou q_i comme paramètre du modèle car il existe une relation analytique entre ces deux quantités (pour $\theta=0$) :

$$\left(\frac{p_i}{\sigma_c}\right)=\frac{1}{m_{[1]}}\left(\left(\frac{q_i}{\sigma_c}\right)^2+\frac{m_{[1]}}{3}\left(\frac{q_i}{\sigma_c}\right)-s_{[1]}\right) \quad (13)$$

On a choisi de fixer q_i .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

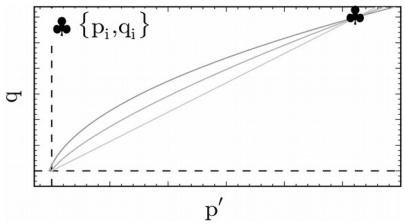


Figure 2.6: Localisation du point d'intersection entre les seuils de pic, intermédiaire et résiduel.

La pression de préconsolidation, et donc la pression de transition entre des comportements fragile et ductile, diminue significativement avec la température. Pour reproduire ce phénomène, q_i, qui intervient dans l'expression de la fonction m^p (équation 12), doit dépendre de la température. En s'inspirant des travaux réalisés par [20] et [21], on propose l'expression suivante :

$$q_i = q_i^0 \left(1 - r^q \log\left(\frac{T}{T_0} \right) \right) \tag{14}$$

Les coefficients q_i^0 (**Q_I**) et r^q (**R_Q**) sont des paramètres matériau strictement positifs. La figure 2.7 présente l'évolution de p_i et q_i en fonction de la température.

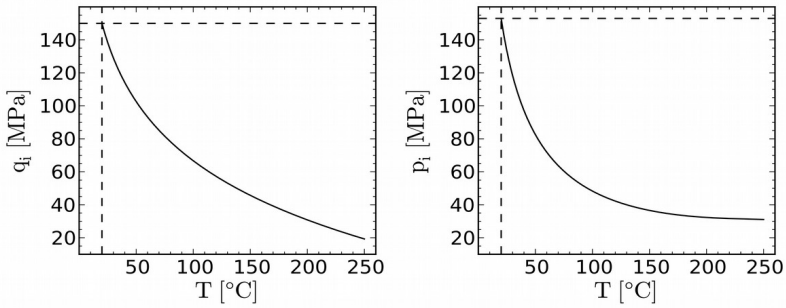


Figure 2.7: Évolution des grandeurs p_i et q_i en fonction de la température.

La surface du mécanisme plastique coïncide avec le seuil intermédiaire lorsque $\xi^p = \xi_{[2]}$ (équation 12). Le paramètre $\xi_{[2]}$ contrôle en quelque sorte la *quantité d'écrouissage produit* entre le seuil de pic et le seuil intermédiaire. Une augmentation de $\xi_{[2]}$ à $\xi_{[1]}$ constant stabilise la chute de résistance en régime post-pic (figure 2.4).

Par analogie avec les effets qu'induisent une augmentation de la pression de confinement, une augmentation de température stabilise le comportement post-pic. Nous pensons que ce phénomène peut partiellement être reproduit par l'évolution du paramètre q_i (équation 14). Cependant, si le paramètre $\xi_{[1]}$ est autorisé à croître avec la température (équation 11), $\xi_{[2]}$ doit obligatoirement suivre la même évolution à la même vitesse ou plus rapidement. Dans le cas contraire, la chute de résistance devient de plus en plus brutale au fur et à mesure que $\xi_{[1]}$ augmente avec la température. La même loi d'évolution que pour le paramètre $\xi_{[1]}$ est donc proposée pour $\xi_{[2]}$:

$$\xi_{[2]} = \xi_{[2]}^0 e^{r_{[2]}^x (T - T_0)} \tag{15}$$

Les coefficients $\xi_{[2]}^0$ (**XI_2**) et $r_{[2]}^x$ (**R_X2**) sont des paramètres matériau strictement positifs. Le paramètre $a_{[2]}$ (A_2) de l'équation (12), strictement compris entre $0{,}5$ et 1, contrôle la courbure du seuil intermédiaire. Si $a_{[2]} = 1$, le seuil intermédiaire est confondu avec le seuil résiduel. Ce paramètre intervient également dans l'expression du seuil viscoplastique maximal (§2.4.2). Enfin, le paramètre v_2 (**V_2**)de l'équation (12), strictement supérieur à 1, contrôle la cinétique d'écrouissage entre le seuil de pic et le seuil résiduel (figure.2.4).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La fonction s^p s'annule pour $\xi^p=\xi_{[2]}$. Cette évolution est en accord avec le cadre physique proposé par [2] rappelé dans le paragraphe §1. La valeur $s^p=0$ correspond physiquement à une cohésion nulle et donc à la formation d'une ou plusieurs structure(s) de cisaillement au sein d'un échantillon.

Les paramètres matériau introduits par les relations d'écrouissage entre les seuils de pic et intermédiaire sont les suivants :

Paramètre matériau	Intervalle de définition
q_i^0	$\mathbb{R}^+$
r^q	$\mathbb{R}^+$
$\xi_{[2]}^0$	$\left[\xi_{[1]}^0,+\infty\right[$
$r_{[2]}^x$	$\mathbb{R}^+$
$a_{[2]}$	$\left[\frac{1}{2},1\right]$
v_2	$\left]1,+\infty\right[$

Tous ces paramètres peuvent être déterminés à partir d'essais de compression triaxiale à différentes températures et pressions de confinement :

- Le coefficient q_i^0 est obtenu en estimant la pente du seuil résiduel à température ambiante. En effet, en écrivant que le point de coordonnées $\left(p_i^0,q_i^0\right)$ appartient à la fois au seuil de pic et au seuil résiduel, nous obtenons la relation suivante :

$$q_i^0=\frac{\sigma_v}{2}\left(\frac{m_{[1]}^0}{m_{[3]}^0}+\sqrt{\left(\frac{m_{[1]}^0}{m_{[3]}^0}\right)^2+4}\right) \tag{16}$$

  La pente du seuil résiduel à température ambiante dans le plan des contraintes principales, $m_{[3]}^0$ s'exprime en fonction de l'angle de frottement résiduel [2] :

$$m_{[3]}^0=\frac{2\sin\phi_{[3]}^0}{1-\sin\phi_{[3]}^0} \tag{17}$$

  Le paramètre $\phi_{[3]}^0$, ou de manière équivalente $m_{[3]}^0$, peut être déterminé par identification des résistances résiduelles obtenues pour plusieurs pressions de confinement à température ambiante. En admettant que $m_{[1]}^0$ et σ_c soient préalablement déterminés en ajustant le seuil de pic à température ambiante, il est possible de remonter jusqu'à q_i^0 (équation 16). Pour les roches dures, la détermination de l'angle de frottement résiduel peut se révéler difficile car la rupture est souvent brutale, y compris pour des pressions de confinement élevées. Cependant, pour ce type de matériaux, de nombreuses références existent dans la littérature (voir [2]) . Pour un granite par exemple, $\phi_{[3]}^0$ est souvent pris égal à $30°-33°$. En se référant aux tableaux proposés par [22] permettant d'estimer $\sigma_c=250\,MPa$ et $m_{[1]}^0=33$ pour un granite, nous obtenons $q_i^0\approx 4\,GPa$.
- Le paramètre r^q s'obtient en estimant l'évolution de la pente du seuil résiduel en fonction de la température.
- $\xi_{[2]}$ et v_2 sont déterminés à partir des courbes contrainte-déformation axiale obtenues à différentes pressions de confinement à température ambiante.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- $r_{[2]}^{x}$ est déterminé à partir des courbes contrainte-déformation axiale obtenues à différentes températures et pressions de confinement.
- Puisque le paramètre $a_{[2]}$ intervient également dans la définition du seuil viscoplastique maximal, ou de manière équivalente du seuil caractéristique, il peut être déterminé soit à partir d'essais de compression triaxiale à température ambiante, soit à partir d'essais de fluage à température ambiante. Ce point particulier sera traité dans le paragraphe §2.4.2.

2.3.2.3 Entre le seuil intermédiaire et le seuil résiduel

La surface du mécanisme plastique évolue ensuite entre le seuil intermédiaire et le seuil résiduel (numéro 4 sur la figure 2.8). Entre ces deux seuils, les paramètres a^p, s^p et m^p évoluent de la manière suivante :

$$\begin{cases} a^p(\xi^p,T)=1-(1-a_{[2]})\exp\left(-\dfrac{v_2}{2}\left(\dfrac{2a_{[2]}-1}{1-a_{[2]}}\right)\left(\dfrac{\xi^p-\xi_{[2]}}{\xi_{[2]}-\xi_{[1]}}\right)\right) \\ s^p(\xi^p,T)=0 \\ m^p(\xi^p,T)=\dfrac{m_{[1]}f_i^{1/a^p}}{f_i^2-s_{[2]}} \end{cases} \tag{18}$$

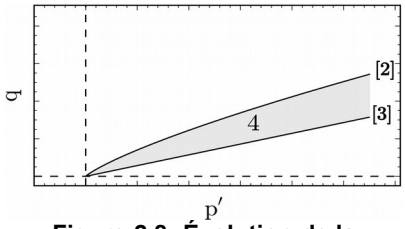


Figure 2.8: Évolution de la surface plastique entre le seuil intermédiaire et le seuil résiduel.

Ces relations n'introduisent aucun paramètre matériau supplémentaire. Le seuil résiduel est atteint de manière asymptotique lorsque $\xi^p \to \infty$. $a^p=1$ sur le seuil résiduel (droite d'état critique, comportement purement frottant) et $s^p=0$ entre les seuils intermédiaire et résiduel (la cohésion d'un matériau est supposée nulle entre ces deux seuils).

L'expression du paramètre m^p est obtenue en écrivant que le point de coordonnées $\{p_i,q_i\}$ se trouve à la fois sur le seuil intermédiaire et sur toute surface entre les seuils intermédiaire et résiduel (pour $\theta=0$). La pente du seuil résiduel est obtenue par passage à la limite lorsque $\xi^p \to \infty$:

$$m_{[3]}=\lim_{\xi^p\to\infty}\left(\frac{f_i^{1/a^p}m_{[1]}}{f_i^2-s_{[1]}}\right)=\frac{q_i m_{[1]}\sigma_c}{q_i^2-s_{[1]}\sigma_c^2} \tag{19}$$

Le paramètre $m_{[3]}$ est la pente du seuil résiduel dans le plan des contraintes principales $\{\sigma_{min},\sigma_{max}\}$ (σ_{min} est la contrainte principale mineure et σ_{max} est la contrainte principale majeure) et non dans le plan des invariants du tenseur des contraintes $\{p',q\}$. Nous verrons dans le paragraphe §2.7 qu'il y a une correspondance directe entre ces deux plans. L'expression du seuil résiduel dans le plan $\{p',q\}$ s'obtient en écrivant $F^p=0$ avec $a^p=1$, $s^p=0$ et $m^p=m_{[3]}$:

$$q=\frac{H_0^c}{H(\theta)}\left(\frac{3m_{[3]}}{3+m_{[3]}}\right)p' \tag{20}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La pente du seuil résiduel dans le plan $\left\{p',q\right\}$ au cours d'un essai de compression triaxiale ($\theta=0$) est donc égale à $\left(\frac{3m_{[3]}}{3+m_{[3]}}\right)$. La relation (19) indique que $m_{[3]}$ dépend naturellement de la température via $m_{[1]}$, $s_{[1]}$ et q_i. Or, la résistance résiduelle des roches tendres et dures diminue avec la température [3] . La figure 2.9 présente l'évolution de la pente du seuil résiduel dans le plan $\left\{p',q\right\}$ en fonction de la température. Cette évolution est cohérente avec ce qui est observé expérimentalement.

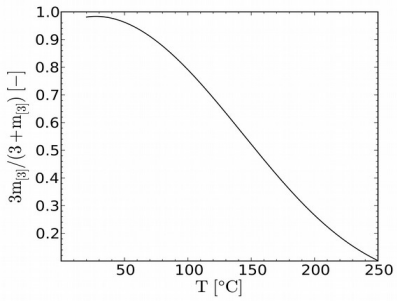


Figure 2.9: Évolution de la pente du seuil résiduel dans le plan $\left\{p',q\right\}$ en fonction de la température.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.4 Mécanisme viscoplastique

2.4.1 Expression du critère de viscoplasticité

Nous rappelons que le mécanisme viscoplastique du modèle *L&K* est basé sur un formalisme de type Perzyna [23] . L'expression du critère de viscoplasticité, que nous noterons F^{vp} , est identique, dans sa forme, à celle du critère du mécanisme plastique :

$$F^{vp}\left(\sigma',a^{vp},s^{vp},m^{vp}\right)\equiv\frac{q\,H(\theta)}{\sigma_c\,H_0^c}-\left(\frac{m^{vp}}{\sigma_c}\left(p'-\frac{qH(\theta)}{3\,H_0^c}\right)+s^{vp}\right)^{a^{vp}}=0 \tag{21}$$

Les quantités a^{vp} , s^{vp} et m^{vp} sont les paramètres d'écrouissage du mécanisme viscoplastique. Pour des raisons similaires à celles évoquées en introduction du paragraphe §2.3.2, ces paramètres sont des fonctions de la variable d'écrouissage du mécanisme viscoplastique, que nous noterons ξ^{vp} , et de la température, T . L'expression de ξ^{vp} est détaillée dans le paragraphe §2.5. Les autres grandeurs intervenant dans l'équation (21) ont les mêmes expressions et significations que dans le paragraphe §2.3. Nous utiliserons également le terme de *surface viscoplastique*, ou *surface du mécanisme viscoplastique*, pour désigner la frontière du domaine d'élasticité du mécanisme viscoplastique.

2.4.2 Paramètres d'écrouissage

Le domaine d'élasticité du mécanisme viscoplastique s'écrouit entre la limite d'élasticité initiale, ou seuil d'endommagement, et le seuil viscoplastique maximal, ou seuil de résistance à long terme (figure 2.10). La vision conceptuelle présentée sur la figure 1.7 doit être légèrement ajustée pour permettre une intégration numérique robuste et relativement simple. En d'autres termes, le seuil viscoplastique maximal, qui coïncide avec le seuil caractéristique, ne peut pas être défini comme l'union de la limite d'élasticité et du seuil intermédiaire pour des raisons de convexité et de continuité.

L'idée est donc de définir le seuil viscoplastique maximal comme une surface qui soit à la fois proche du seuil intermédiaire pour des confinements modérés à élevés et proche de la limite d'élasticité initiale pour des confinements faibles. Pour ce faire, on décide d'imposer deux conditions. La première est que le seuil viscoplastique maximal passe par le point de coordonnées $\left(p_i,q_i\right)$ (pour $\theta=0$). La seconde est que l'intersection entre le seuil viscoplastique maximal et l'axe p' ($p'_{[5]}$ sur la figure 2.10) ne soit par trop éloignée de celle de la limite d'élasticité initiale ($p'_{[0]}$ sur la figure 2.2). Les valeurs prises par les paramètres a^{vp} , s^{vp} et m^{vp} sur le seuil viscoplastique maximal sont indicées par un $[5]$.

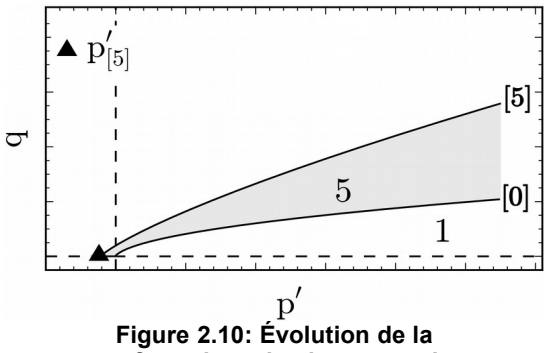


Figure 2.10: Évolution de la surface viscoplastique entre la limite d'élasticité initiale et le seuil viscoplastique maximal.

Il y a donc deux conditions et trois inconnues qui sont les paramètres $a_{[5]}$, $s_{[5]}$ et $m_{[5]}$. On décide de fixer $a_{[5]}=a_{[2]}$. La seconde condition permet d'obtenir une relation linéaire entre $m_{[5]}$ et $s_{[5]}$ en écrivant que la distance entre $p'_{[0]}$ et $p'_{[5]}$ correspond à un pourcentage de la distance entre $p'_{[0]}$ et $p'_{[1]}$ ($p'_{[1]}$ est l'intersection entre le seuil de pic et l'axe p') :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{s_{[5]}}{m_{[5]}}=\frac{s_{[0]}}{m_{[0]}}(1-f_p)+f_p\frac{s_{[1]}}{m_{[1]}}=\vartheta(f_p) \tag{22}$$

La quantité f_p (**F_P**) est un paramètre qui permet de contrôler la distance entre $p'_{[0]}$ et $p'_{[5]}$ (figure 2.11). Si $f_p=0$, $p'_{[0]}$ et $p'_{[5]}$ sont confondus. Si $f_p=1$, $p'_{[1]}$ et $p'_{[5]}$ sont confondus. f_p doit être le plus faible possible puisque le seuil viscoplastique maximal doit être le plus proche possible de la limite d'élasticité initiale à confinements faibles. La plupart du temps, f_p ne peut cependant pas être nul car dans ce cas là, la limite d'élasticité initiale et le seuil viscoplastique maximal s'interceptent. f_p n'est pas un paramètre matériau. Il peut être déterminé en procédant de proche en proche en traçant la limite d'élasticité initiale et le seuil viscoplastique maximal et en cherchant la plus petite valeur pour laquelle ces deux seuils ne s'interceptent pas. Une valeur par défaut est fixée à $0{,}1$.

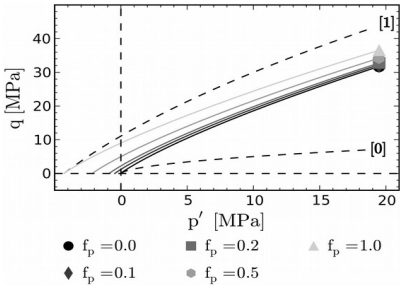


Figure 2.11: Évolution de $p'_{[5]}$ en fonction de f_p.

La première condition permet d'obtenir l'expression de $s_{[5]}$ en utilisant la relation (22) :

$$s_{[5]}=\frac{\vartheta(f_p)\,m_{[1]}f_i^{1/a_{[2]}}}{f_i^2-s_{[1]}+m_{[1]}\vartheta(f_p)} \tag{23}$$

Cette démarche permet de limiter le nombre de paramètres matériau introduits moyennant certaines hypothèses. Entre la limite d'élasticité initiale et le seuil viscoplastique maximal, les paramètres a^{vp}, s^{vp} et m^{vp} prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} a^{vp}(\xi^{vp},T)=a_{[2]}-\left(a_{[2]}-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{\xi^p}{\xi_{[5]}}\right)^{v_1} \\ s^{vp}(\xi^{vp},T)=s_{[5]}-\left(s_{[5]}-s_{[0]}\right)\left(1-\frac{\xi^p}{\xi_{[5]}}\right)^{v_1} \\ m^{vp}(\xi^{vp},T)=m_{[5]}-\left(m_{[5]}-m_{[0]}\right)\left(1-\frac{\xi^p}{\xi_{[5]}}\right)^{v_1} \end{cases} \tag{24}$$

Le seul paramètre introduit par ces équations est $\xi_{[5]}$. Ce paramètre contrôle l'amplitude des déformations différées lors d'un essai de fluage (figure 2.13).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

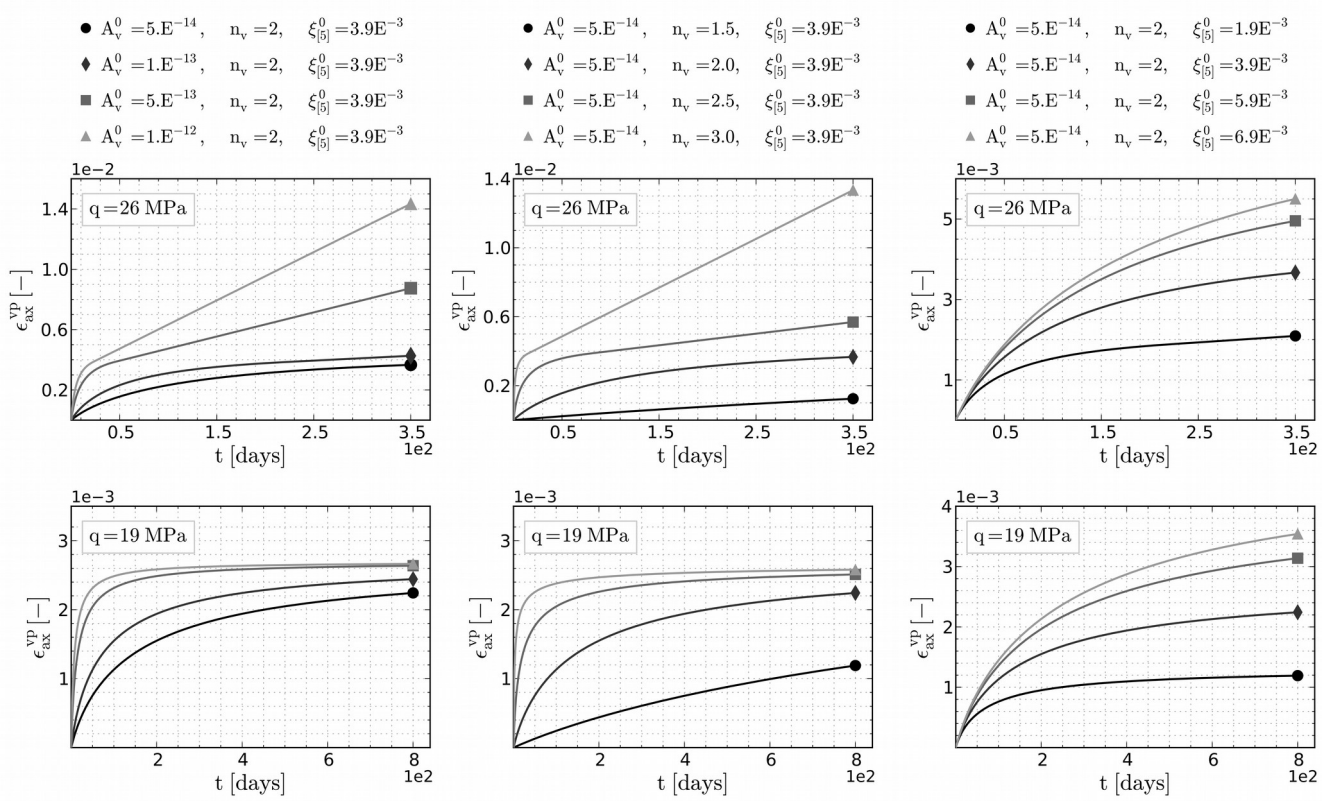


Figure 2.12: Influence des paramètres A_v^0 (en $\left[s^{-1}\right]$), n_v et $\xi_{[5]}^0$ sur les courbes obtenues lors d'essais de fluage dans le plan $\left(t,\varepsilon_{ax}^{vp}\right)$. t est le temps et ε_{ax}^{vp} est la déformation axiale différée d'un échantillon soumis à des déviateurs de 19 MPa (fluage stable, déviateur appliqué en dessous du seuil viscoplastique maximal) et 26 MPa (fluage instable, déviateur appliqué au-dessus du seuil viscoplastique maximal). Ces courbes sont obtenues à température ambiante.

Une augmentation de température a pour effet d'augmenter l'amplitude des déformations différées observées lors d'essais de fluage. Ce phénomène est reproduit en faisant dépendre $\xi_{[5]}$ de la température :

$$\xi_{[5]}=\xi_{[5]}^0 \mathrm{e}^{r_{[5]}^x(T-T_0)} \tag{25}$$

Les quantités $\xi_{[5]}^0$ (**XI_5**) et $r_{[5]}^x$ (**R_X5**) sont des paramètres matériau strictement positifs. $\xi_{[5]}^0$ peut être déterminé en ajustant les courbes déformation axiale-temps obtenues lors d'essais de fluage à différents déviateurs et à température ambiante. $r_{[5]}^x$ est déterminé en ajustant les mêmes courbes obtenues à différentes températures.

Comme évoqué dans le paragraphe §2.3.2.2, le paramètre $a_{[2]}$ (**A_2**), qui contrôle la courbure du seuil intermédiaire et celle du seuil viscoplastique maximal, peut être déterminé de deux manières différentes en fonction des données expérimentales disponibles. Nous rappelons également que le seuil viscoplastique maximal est confondu avec le seuil caractéristique qui marque une limite entre des comportements volumiques contractant et dilatant. Si l'évolution des déformations volumiques lors d'un essai de compression triaxiale est une donnée disponible, les courbes déviateur-déformations volumiques, obtenues à différentes pressions de confinement et à température ambiante, peuvent être utilisées pour déterminer $a_{[2]}$. Les niveaux de déviateur correspondant aux transitions contractance/dilatance peuvent être déterminés à partir de ces courbes et reportés dans le plan $\left(p',q\right)$ en supposant que le chemin suivi lors d'un essai de compression triaxiale (drainé ou sec) est tel que $q=3p'$. Le seuil caractéristique, ou de manière équivalente le seuil viscoplastique maximal, constitue également une limite entre des comportements à long terme stable et instable. $a_{[2]}$ peut donc être déterminé à partir d'essais de fluage à température ambiante en identifiant les niveaux de déviateur correspondant à la transition entre fluages stable et instable pour plusieurs pressions de confinement.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les paramètres $s_{[5]}$ et $m_{[5]}$ dépendent naturellement de la température via $m_{[1]}$, $s_{[1]}$, q_i, $m_{[0]}$ et $s_{[0]}$. Le seuil caractéristique dépend donc naturellement de la température. Or, le niveau de déviateur de transition entre des comportements contractant et dilatant a tendance à diminuer avec la température ; le niveau de déviateur correspondant à la transition entre des comportements à long terme stable et instable suit également la même évolution. Ces deux phénomènes semblent naturellement reproduits par le cadre proposé par [3] (figure 2.13).

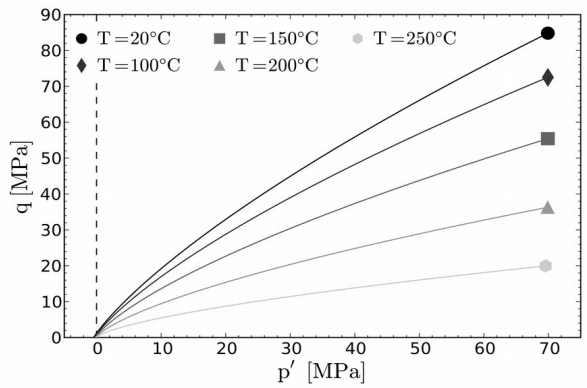


Figure 2.13: Évolution du seuil caractéristique, ou de manière équivalente du seuil viscoplastique maximal, en fonction de la température.

2.5 Couplage entre les deux mécanismes

Les mécanismes plastique et viscoplastique sont couplés à travers leurs variables internes d'écrouissage. Ce couplage permet, entre autre, de reproduire la dépendance de la résistance maximale des géomatériaux à la vitesse de sollicitation, et donc au temps. Le couplage entre les deux mécanismes s'enclenche dès que l'état de contrainte se trouve au-dessus du seuil caractéristique [2]. L'écrouissage de la surface viscoplastique influence celui de la surface plastique. Tant que l'état de contrainte est en dessous du seuil caractéristique, l'incrément de la variable d'écrouissage du mécanisme plastique, $\dot{\xi}^p$, coïncide avec l'incrément de déformation plastique équivalente, ou distorsion plastique, $\dot{\gamma}^p$:

$$\dot{\xi}^p = \dot{\gamma}^p = \sqrt{\frac{2}{3}\tilde{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p : \tilde{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p} \text{ avec } \tilde{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \mathrm{dev}\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\right) \tag{26}$$

Lorsque l'état de contrainte se trouve au-dessus du seuil caractéristique, $\dot{\xi}^p$ est la somme de l'incrément de distorsion plastique $\dot{\gamma}^p$ et de l'incrément de distorsion viscoplastique, $\dot{\gamma}^{vp}$:

$$\dot{\xi}^p = \dot{\gamma}^p + \dot{\gamma}^{vp} \text{ avec } \dot{\gamma}^{vp} = \sqrt{\frac{2}{3}\tilde{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp} : \tilde{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp}} \tag{27}$$

L'incrément de la variable d'écrouissage du mécanisme viscoplastique est égal à l'incrément de distorsion viscoplastique, peu importe l'état de contrainte :

$$\dot{\xi}^{vp} = \min\left\{\dot{\gamma}^{vp} ; \langle \xi_{[5]} - \xi^{vp} \rangle\right\} \tag{28}$$

2.6 Lois d'écoulement

Il est communément admis que la direction des écoulements (visco)plastiques dérive d'une fonction $g^{(v)p}$ appelée potentiel (visco)plastique. Si ce potentiel coïncide avec la fonction $F^{(v)p}$, la loi d'écoulement est dite *normale* ou *associée*, dans un sens où elle est *associée* au critère de (visco)plasticité $F^{(v)p}$. Une loi d'écoulement dérivant d'un potentiel distinct de $F^{(v)p}$ (plus précisément tel que $\frac{\partial g^{(v)p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ n'est pas proportionnel à

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\frac{\partial F^{(v)p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ est dite *non associée*. Les matériaux obéissant à la loi de normalité sont généralement qualifiés de *standards généralisés*.

La notion de matériau standard est pratique puisque elle permet de décrire le comportement plastique d'un matériau à partir d'une seule fonction [24]. Néanmoins, les hypothèses qui sont à la base de la théorie de la plasticité associée ne sont pas représentatives du comportement réel des roches, des sols et des bétons [25].

La notion de (visco)plasticité non associée nécessite la définition d'une grandeur appelée *angle de dilatance*, que nous noterons ψ, qui permet de contrôler les variations de volume (visco)plastique [24].

Le cadre défini par [2] , et repris par [3] , est inspiré des travaux réalisés par [26] et [27]. Ce cadre permet de définir de manière explicite l'évolution de l'angle de dilatance, donc l'évolution des variations de volume (visco)plastique, sans passer par la détermination d'un potentiel (visco)plastique. L'hypothèse soutenue par [27] stipule que (on note Σ l'espace des contraintes) :

$$\exists \boldsymbol{n} \in \Sigma \text{ avec } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(v)p} : \boldsymbol{n} = 0 \tag{29}$$

Le tenseur $\boldsymbol{n}$ d'ordre deux est déterminé par une condition cinématique liant les déformations volumiques (visco)plastiques et les déformations (visco)plastiques de cisaillement. Cette condition cinématique permet de décrire la transition entre des comportements volumiques contractant et dilatant. Inspirés des travaux réalisés par [28], nous proposons la relation linéaire suivante :

$$\dot{\varepsilon}_V^{(v)p} = -\beta \frac{\boldsymbol{s} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(v)p}}{s_{II}} \tag{30}$$

Le coefficient β est un scalaire qui dépend de l'angle de dilatance (équation 39). Les tenseurs $\boldsymbol{n}$ et $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(v)p}$ peuvent se décomposer en une partie sphérique, $n_1 \boldsymbol{\delta}$ et $\left(\frac{\dot{\varepsilon}_V^{(v)p}}{3}\right)\boldsymbol{\delta}$ (on rappelle que $\boldsymbol{\delta}$ est le tenseur identité d'ordre deux), et en une partie déviatorique, $n_2 \boldsymbol{s}$ et $\dot{\varepsilon}^{(v)p}$. En combinant les équations (29) et (30), on obtient :

$$\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(v)p} - \beta \frac{\boldsymbol{s} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(v)p}}{3 s_{II}} \boldsymbol{\delta}\right) : \left(n_2 \boldsymbol{s} + n_1 \boldsymbol{\delta}\right) = \left(n_2 - \frac{\beta}{s_{II}} n_1\right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(v)p} : \boldsymbol{s} = 0 \tag{31}$$

En supposant de plus que $\boldsymbol{n}$ est de norme unitaire, nous obtenons finalement :

$$\boldsymbol{n} = \frac{\beta \frac{\boldsymbol{s}}{s_{II}} - \boldsymbol{\delta}}{\sqrt{\beta^2 + 3}} \text{ avec } \boldsymbol{n} : \boldsymbol{n} = 1 \tag{32}$$

Nous rappelons que l'expression de $\dot{\varepsilon}^{(v)p}$ doit respecter la condition (29). Pour ce faire, [28] propose de prendre la projection de $\dot{\varepsilon}^{(v)p}$ sur l'hypersurface de déformation de normale $\boldsymbol{n}$, soit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(v)p} = \dot{\lambda}^{(v)p} \boldsymbol{G}^{(v)p} \text{ avec } \boldsymbol{G}^{(v)p} = \frac{\partial F^{(v)p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} - \left(\frac{\partial F^{(v)p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \boldsymbol{n}\right) \boldsymbol{n} \tag{33}$$

Le multiplicateur (visco-)plastique, $\dot{\lambda}^{(v)p}$, ou plus simplement $\dot{\lambda}$, est obtenu en appliquant les conditions complémentaires de Kuhn-Tucker et la condition de cohérence :

$$\begin{cases} \dot{\lambda} \geq 0 \\ F^p(\boldsymbol{\sigma}', \xi^p, T) \leq 0 \\ \dot{\lambda} F^p(\boldsymbol{\sigma}', \xi^p, T) = 0 \end{cases} \tag{34}$$

Avec :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \dot{F}^p = \dfrac{\partial F^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \dfrac{\partial F^p}{\partial \xi^p}\dot{\xi}^p + \dfrac{\partial F^p}{\partial T}\dot{T} = 0 \\ \dot{\lambda} = \dfrac{\dfrac{\partial F^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \boldsymbol{A} : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\dot{vp}}\right) + \left(-\dfrac{\alpha_V}{3}\dfrac{\partial F^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \boldsymbol{A} : \boldsymbol{\gamma} + \Theta^p\right)\dot{T} + \dot{\gamma}^{vp}\dfrac{\partial F^p}{\partial \xi^p}}{\dfrac{\partial F^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \boldsymbol{A} : \boldsymbol{G}^p + \Xi^p} \end{cases} \quad (35)$$

Et :

$$\begin{cases} \Theta^p = \dfrac{\partial F^p}{\partial T} \\ \Xi^p = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\dfrac{\partial F^p}{\partial \xi^p} g_{II}^p \end{cases} \quad (36)$$

On a noté g_{II}^p la norme du déviatorique de $\boldsymbol{G}^p$. Nous remarquons que les variations de température $\dot{T}$ influencent directement l'amplitude des déformations plastiques. La relation (35) est écrite dans le cas où il y a couplage entre les deux mécanismes (état de contrainte au-dessus du seuil caractéristique). S'il n'y a pas couplage, le terme $\dot{\gamma}^{vp}\frac{\partial F^p}{\partial \xi^p}$ au numérateur de l'Équation (35) est nul.

L'incrément de déformation viscoplastique est défini par la notion de *surcontrainte* introduite par [23] :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \langle \phi \rangle \boldsymbol{G}^{vp} \text{ avec } \boldsymbol{G}^{vp} = \frac{\partial F^{vp}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} - \left(\frac{\partial F^{vp}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n} \quad (37)$$

Où $\langle \phi \rangle$ est une fonction positive de F^{vp} :

$$\langle \phi \rangle = A_v \left(\frac{\langle F^{vp} \rangle}{P_a}\right)^{n_v} \text{ avec } A_v = A_v^0 \left(e^{\frac{-Z}{RT}\left(1-\frac{T}{T_0}\right)}\right) \quad (38)$$

Le paramètre A_v est un coefficient inversement proportionnel à la viscosité du matériau. Il est communément admis que ce paramètre évolue en fonction de la température selon une loi de type Arrhenius [18] ; la température a un effet catalyseur sur la cinétique du comportement à long terme (notion de phénomène thermoactivé). A_v^0 (paramètre **A** dans **DEFI_MATERIAU**) est la valeur prise par A_v à température ambiante, Z (paramètre **Z** dans **DEFI_MATERIAU**) est l'énergie d'activation, $R = 8{,}31441\, kJ/mol/K$ est la constante universelle des gaz parfaits et n_v (paramètre **N** dans **DEFI_MATERIAU**) est un paramètre strictement positif qui contrôle également la cinétique du comportement à long terme (Figure 2.12). On pourra se référer à cette figure pour constater les effets qu'ont les paramètres A_v^0 et n_v sur les courbes typiquement obtenues lors d'essais de fluage.

2.7 Lois de dilatance

Inspirés des travaux réalisés par [29], *[2]* proposa la relation suivante pour le paramètre β :

$$\beta = \frac{-2\sqrt{6}\sin\psi}{3-\sin\psi} \quad (39)$$

Dans le cadre considéré par [2] , l'angle de dilatance évolue en fonction de l'état de contrainte et des variables internes d'écrouissage. Deux approches sont proposées. La première approche permet de décrire l'évolution de l'angle de dilatance pour la partie pré-pic du mécanisme plastique et pour le mécanisme viscoplastique. Cette approche est basée sur la notion d'état caractéristique. Tant que l'état de contrainte est en dessous du seuil caractéristique, l'angle de dilatance est négatif et le comportement volumique (visco)plastique est contractant. Lorsque l'état de contrainte se trouve au-dessus du seuil caractéristique, l'angle de dilatance est

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

positif et le comportement volumique (visco)plastique est dilatant. La seconde approche permet de décrire l'évolution de l'angle de dilatance pour le régime post-pic du mécanisme plastique.

Dans la première approche, nous devons être en mesure de pouvoir déterminer la position de l'état de contrainte par rapport au seuil caractéristique. À cause de la non linéarité des fonctions F^p (équation 5) et F^{vp} (équation 21), le niveau de déviateur q sur le seuil caractéristique ne peut pas être directement évalué à partir de la contrainte moyenne effective p'. Il est nécessaire d'effectuer un changement de repère. Ce changement de repère permet d'exprimer les quantités q et p' en fonction des contraintes principales majeure σ'_{max} et mineure σ'_{min}. Pour obtenir les relations de changement de repère, il suffit d'écrire le critère de (visco)plasticité dans ces deux plans :

$$\begin{cases} F^*(p',q,a^*,s^*,m^*) \equiv \dfrac{qH(\theta)}{\sigma_c H_0^c} - \left(\dfrac{m^*}{\sigma_c}\left(p' - \dfrac{qH(\theta)}{3H_0^c} \right) + s^* \right)^{a^*} = 0 \\ F^*(\sigma'_{min},\sigma'_{max},a^*,s^*,m^*) \equiv \left(\dfrac{\sigma'_{max}-\sigma'_{min}}{\sigma_c} \right) - \left(\dfrac{m^*}{\sigma_c}\sigma'_{min} + s^* \right)^{a^*} = 0 \end{cases} \quad (40)$$

Par analogie entre les relations de l'équation (40), nous obtenons :

$$\sigma'_{min} = p' - \frac{qH(\theta)}{3H_0^c} \text{ et } \sigma'_{max} = p' + \frac{2qH(\theta)}{3H_0^c} \quad (41)$$

Pour la première approche, [2] propose la relation suivante pour $\sin\psi$:

$$\sin\psi = \rho_1 \left(\frac{\sigma'_{max}-\sigma'_{char}}{\rho_2\sigma'_{max}+\sigma'_{char}} \right) \quad (42)$$

Les paramètres ρ_1 (**RHO_1**) et ρ_2 (**RHO_2**) sont des constantes matériau strictement positives et σ'_{char} est la valeur de σ'_{max} sur le seuil caractéristique :

$$\sigma'_{char} = \sigma'_{min} + \sigma_c \left(\frac{m_{[5]}\sigma'_{min}}{\sigma_c} + s_{[5]} \right)^{a_{[2]}} \quad (43)$$

À partir de la relation (42), nous voyons que l'angle de dilatance est négatif lorsque $\sigma'_{max} \leq \sigma'_{char}$ et positif dans le cas contraire. La figure 2.14 présente l'évolution de l'angle de dilatance et des déformations volumiques au cours d'essais de compression triaxiale pour différentes valeurs du paramètre ρ_2.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

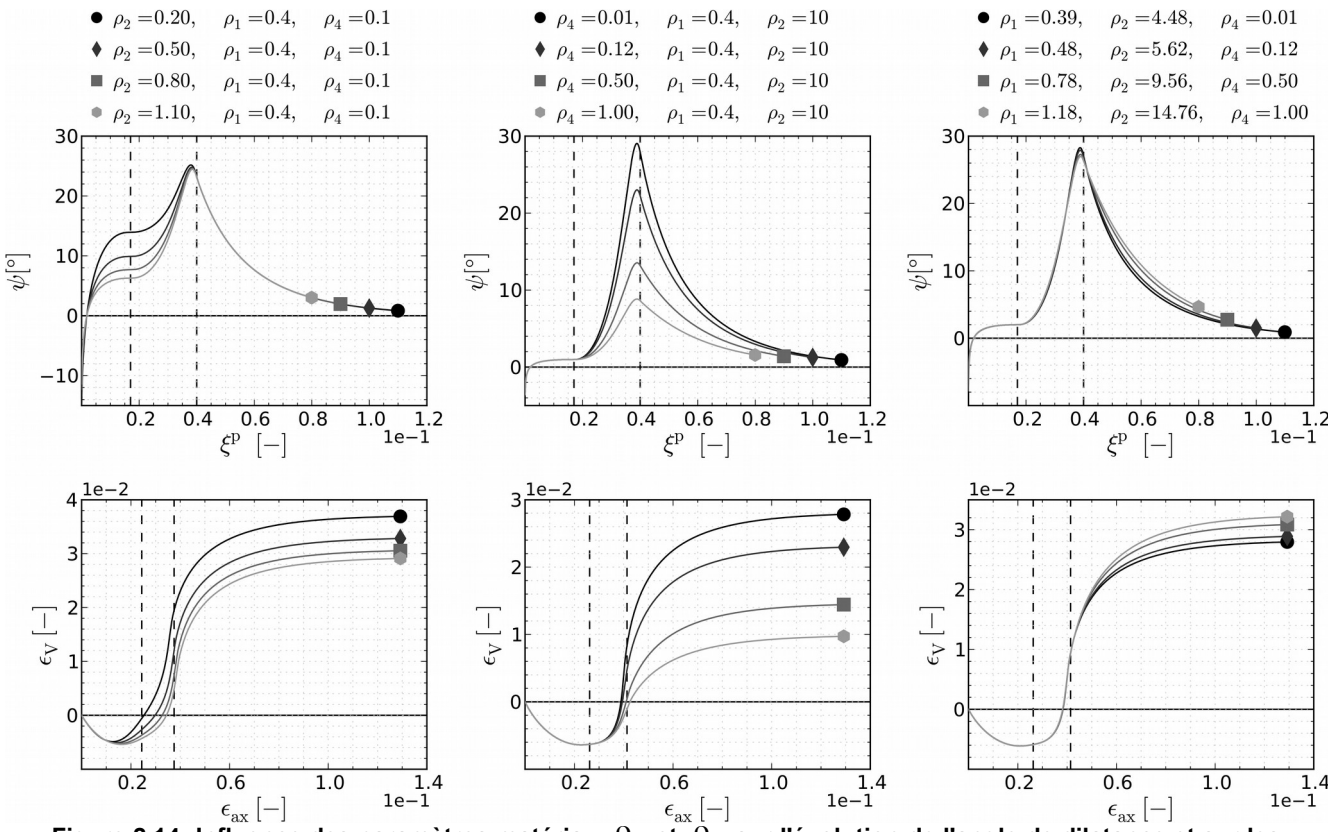


Figure 2.14: Influence des paramètres matériau ρ_2 et ρ_4 sur l'évolution de l'angle de dilatance et sur les courbes déformation volumique-déformation axiale typiquement obtenues lors d'essais de compression triaxiale. Les deux lignes en pointillés représentent les valeurs prises par ξ^p et ε_{ax} sur les seuils de pic et intermédiaire. Ces courbes sont obtenues en négligeant le couplage entre les deux mécanismes.

Le paramètre ρ_2 contrôle la pente des courbes déformation volumique-déformation axiale au niveau du seuil de pic. Une valeur élevée du paramètre ρ_2 retarde la transition vers un comportement dilatant *absolu*. Les paramètres ρ_1 et ρ_2 interviennent également dans l'expression du *sinus* de l'angle de dilatance pour le régime post-pic du mécanisme plastique. La loi d'évolution proposée pour le régime post-pic est inspirée des travaux de [30] :

$$\sin\psi = \rho_1 \left(\frac{\langle \sigma'_{max} - \sigma'_{char} \rangle}{\rho_2 \sigma'_{max} + \sigma'_{char}} + \left(1 - \frac{\widetilde{\sigma}}{\widetilde{\sigma}_{[1]}}\right) \frac{\alpha - \alpha_{res}}{\rho_4 \alpha + \alpha_{res}} \right) \tag{44}$$

La partie de gauche de la relation (44) permet d'assurer la continuité d'évolution de l'angle de dilatance entre les régimes pré-pic et post-pic du mécanisme plastique (continuité de la direction des incréments de déformation plastique). La partie de droite permet de décrire l'évolution de l'angle de dilatance en régime post-pic. Le coefficient ρ_4 (**RHO_4**) est un paramètre matériau strictement positif qui contrôle la valeur maximale de l'angle de dilatance atteinte lors d'un essai de compression triaxiale (figure 2.14). Cette valeur maximale est directement reliée à la pente des courbes déformation volumique-déformation axiale (figure 2.14). Le paramètre ρ_1 influence l'évolution de la valeur maximale de ψ en fonction du confinement (figure 2.14). Les quantité s $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\sigma}_{[1]}$, α et α_{res} s'expriment en fonction de l'état de contrainte et des paramètres d'écrouissage du mécanisme plastique. Le coefficient α_{res} s'exprime en fonction de la pente du seuil résiduel :

$$\alpha_{res} = \left(\frac{\sigma'_{max}}{\sigma'_{min}} \right)_{res} = 1 + \lim_{\xi^p \to \infty} m^p = 1 + \frac{m_{[1]} f_i}{f_i^2 - s_{[1]}} = 1 + m_{[3]} \tag{45}$$

La relation (44) est une extension aux matériaux cohérents de l'expression proposée par [30] pour les sols pulvérulents. [30] exprime la quantité α en fonction des contraintes principales mineure et majeure. Pour tenir compte de l'effet inhibiteur de la cohésion sur le développement de la dilatance, [2] proposa l'expression suivante :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\alpha = \frac{\sigma'_{max} + \tilde{\sigma}}{\sigma'_{min} + \tilde{\sigma}} \tag{46}$$

Où le coefficient $\tilde{\sigma}$ est un terme de cohésion défini par :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\tilde{C}}{\tan\tilde{\phi}} \text{ avec } \begin{cases} \tilde{C} = \dfrac{\sigma_c \left(s^p\right)^{a^p}}{2\sqrt{N_\phi}} \\ N_\phi = \left(\dfrac{\partial \sigma'_{max}}{\partial \sigma'_{min}}\right)_{\sigma'_{min} \equiv 0} = 1 + a^p m^p \left(s^p\right)^{a^p - 1} \\ \tilde{\phi} = 2\arctan\left(\sqrt{N_\phi}\right) - \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{47}$$

Le paramètre $\tilde{\sigma}_{[1]}$ est la valeur prise par $\tilde{\sigma}$ sur le seuil de pic. Puisque le paramètre s^p décroît progressivement entre le seuil de pic et le seuil intermédiaire et s'annule sur le seuil intermédiaire (12), $\tilde{\sigma}$ suit la même évolution. Au-delà du seuil intermédiaire, la quantité $\tilde{\sigma}$ est donc nulle. Nous retrouvons l'expression proposée par [30] pour un matériau granulaire dépourvu de cohésion. Lorsque $\xi^p \to \infty$, α se rapproche progressivement de α_{res} et $\sin\psi$ se rapproche de 0. La déformation d'un échantillon de roche ou de sol se fait, dans ce cas là, de manière isochore (figure 2.14).
Les paramètres matériau introduits par les lois d'écoulement et de dilatance sont les suivants :

Paramètre matériau	Intervalle de définition	DEFI_MATERIAU
A_v^0	$\mathbb{R}^+$	A
Z	$\mathbb{R}^+$	Z
n_v	$\mathbb{R}^+$	N
ρ_1	$\mathbb{R}^+$ tel que $-1 \le \sin\psi \le 1$	RHO_1
ρ_2	$\mathbb{R}^+$ tel que $-1 \le \sin\psi \le 1$	RHO_2
ρ_4	$\mathbb{R}^+$ tel que $-1 \le \sin\psi \le 1$	RHO_4

Tous ces paramètres peuvent être déterminés à partir d'essais de compression triaxiale ou d'essais de fluage :

- Les paramètres A_v^0 et n_v peuvent être déterminés à partir d'essais de fluage à température ambiante ;
- Le paramètre Z peut être déterminé à partir d'essais de fluage à différentes températures ;
- Les paramètres ρ_1, ρ_2 et ρ_4 peuvent être déterminés en ajustant les courbes déformation volumique-déformation axiale issues d'essais de compression triaxiale à température ambiante. Sur les figures 2.14 et 2.15, nous remarquons que le maximum atteint par ψ se trouve proche du seuil intermédiaire, ce qui est en accord avec le cadre fixé par [2] . Ce maximum est en réalité atteint lorsque l'état de contrainte se trouve entre le seuil caractéristique et le seuil intermédiaire. La partie de gauche de l'équation (44) s'annule sur le seuil caractéristique tandis que la partie de droite de cette même équation est maximale sur le seuil intermédiaire. Plus le seuil caractéristique et le seuil intermédiaire sont proches, c'est-à-dire plus le paramètre f_p (équation 22) est faible, plus ce maximum se rapproche du seuil intermédiaire. La proximité entre ces deux seuils peut d'ailleurs être utilisée pour évaluer les paramètres ρ_1, ρ_2 et ρ_4 si les données expérimentales sont peu abondantes ou inexistantes. En supposant que les seuils caractéristique et intermédiaire sont confondus, il est possible d'approcher la valeur de ψ sur le seuil intermédiaire à température ambiante $\psi_{[2]}^0$, pour une pression de confinement donnée (non nulle) CP :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\sin\psi_{[2]}^0 \approx \rho_1 \left(\frac{CP\, m_{[3]}^0 + \sigma_c \left(m_{[2]}^0 \frac{CP}{\sigma_c} \right)^{a_{[2]}}}{CP\left(2 + m_{[3]}^0\right) + \rho_4 \sigma_c \left(m_{[2]}^0 \frac{CP}{\sigma_c} \right)^{a_{[2]}}} \right) \quad \text{avec} \quad m_{[2]}^0 = \frac{m_{[1]}^0 f_i^{1/a_{[2]}}}{f_i^2 - 1} \tag{48}$$

Le paramètre $m_{[3]}^0$ est donné par l'équation (19) écrite à température ambiante. Moyennant une hypothèse sur la valeur de $\psi_{[2]}^0$ et sur ρ_1 ou $rhô_4$, il est possible d'évaluer le paramètre manquant. En faisant les mêmes hypothèses, l'angle de dilatance sur le seuil de pic à température ambiante $\psi_{[1]}^0$, , pour une pression de confinement donnée, s'exprime également de manière analytique :

$$\sin\psi_{[1]}^0 \approx \rho_1 \left(\frac{\sigma_c \left(\sqrt{m_{[1]}^0 \frac{CP}{\sigma_c} + 1} - \sqrt{m_{[5]}^0 \frac{CP}{\sigma_c} + s_{[5]}^0} \right)}{CP\left(1 + \rho_2\right) + \sigma_c \left(\rho_2 \sqrt{m_{[1]}^0 \frac{CP}{\sigma_c} + 1} + \sqrt{m_{[5]}^0 \frac{CP}{\sigma_c} + s_{[5]}^0} \right)} \right) \tag{49}$$

Les paramètres $m_{[5]}^0$ et $s_{[5]}^0$ sont déterminés à partir des relations (22) et (23) écrites à température ambiante. Cette méthode analytique a notamment permis de tracer certaines courbes sur les figures 2.14 et 2.15. Pour les courbes de droite sur la figure 2.14 et pour les courbe à $5\,MPa$ de confinement sur la figure 2.15. Dans [3], on a fixé $\psi_{[1]}^0 = 2°C$ et $\psi_{[2]}^0 = 25°C$.

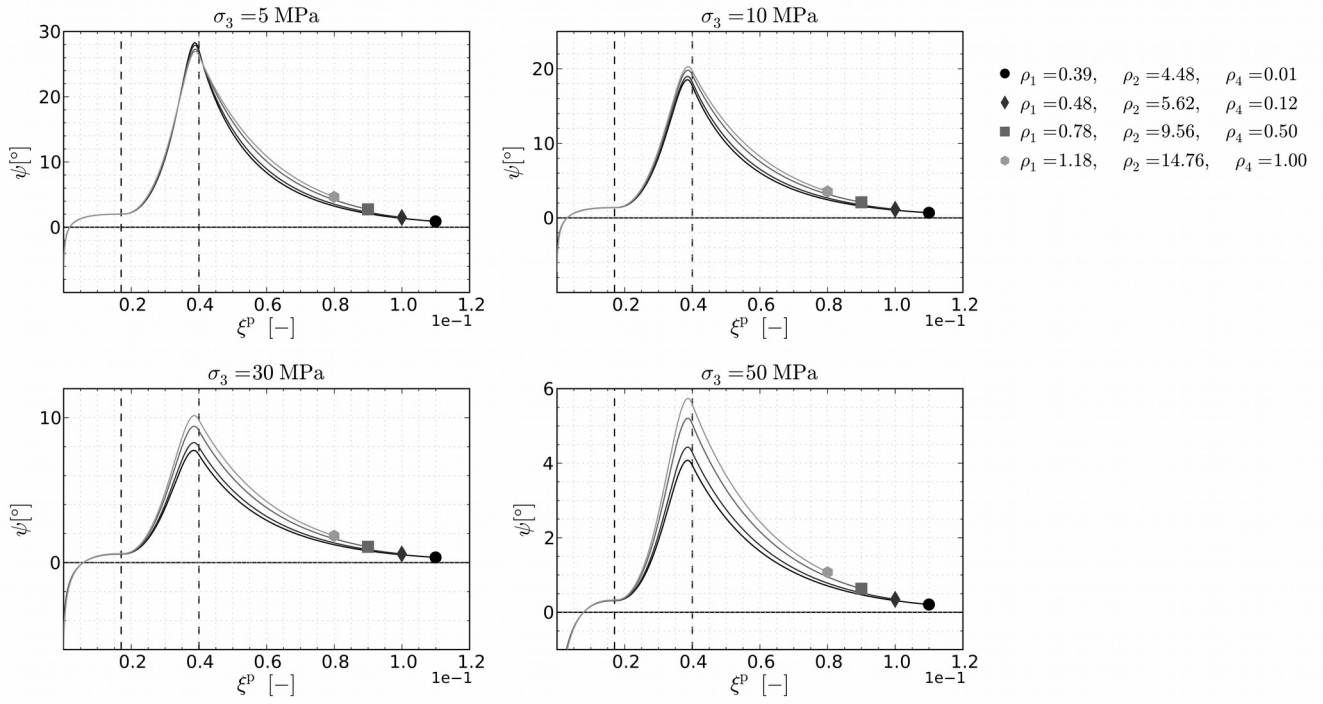


Figure 2.15: Influence du paramètre ρ_1 sur l'évolution de l'angle de dilatance au cours d'essais de compression triaxial réalisés à différentes pressions de confinement, σ_3 .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Intégration numérique

Dans ce paragraphe, nous revenons brièvement sur l'intégration numérique du modèle thermomécanique proposé. Le modèle a été intégré selon deux schémas : un schéma explicite et un schéma implicite. Nous donnons uniquement les grandes lignes de ces deux schémas sans nécessairement détailler toutes les quantités mises en jeu. Dans ce qui suit, nous utiliserons exceptionnellement la notation $\boldsymbol{\sigma}$ pour désigner le tenseur des contraintes effectives. Ceci permet de ne pas alourdir les notations. Nous ne détaillerons pas l'expression des dérivées qui interviennent dans l'ensemble des équations.

3.1 Schéma d'intégration explicite

Le schéma d'intégration explicite (**ALGO_INTE='SPECIFIQUE'**) consiste en une phase classique de prédiction élastique suivie d'une phase de correction (visco)plastique si l'un des deux, ou les deux, mécanisme(s) est/sont activé(s) pendant ce *tir élastique* . Les variables d'entrée de l'algorithme de résolution sont :

- t : temps à l'instant « + » ;
- t^- : temps à l'instant « - » ;
- T : température à l'instant « + » ;
- T^- : température à l'instant « - » ;
- T_0 : température de référence ;
- $\boldsymbol{\sigma}^-$: tenseur des contraintes effectives à l'instant « - » ;
- ξ^{vp-} : variable d'écrouissage du mécanisme viscoplastique à l'instant « - » ;
- ξ^{p-} : variable d'écrouissage du mécanisme plastique à l'instant « - » ;
- $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$: incrément de déformation totale.

Les variables de sortie sont :

- $\boldsymbol{\sigma}$: tenseur des contraintes effectives à l'instant « + » ;
- ξ^{vp} : variable d'écrouissage du mécanisme viscoplastique à l'instant « + » ;
- ξ^{p} : variable d'écrouissage du mécanisme plastique à l'instant « + » ;
- $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{ij}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}}$: opérateur tangent.

À partir des données d'entrée, nous procédons de la manière suivante :

- Prédiction élastique : $\boldsymbol{\sigma}^e = \boldsymbol{\sigma}^- + \boldsymbol{A} : \left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\alpha_V}{3} \Delta T . \boldsymbol{\delta} \right)$
- Mécanisme viscoplastique actif?
  - Calcul de $F^{vp}\left(\boldsymbol{\sigma}^e, \xi^{vp-}, T\right)$
  - Si $F^{vp}\left(\boldsymbol{\sigma}^e, \xi^{vp-}, T\right) < 0$, on est élastique :
    - $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{vp} = 0$
    - $\Delta\xi^{vp} = \Delta\gamma^{vp} = 0$
    - $\xi^{vp} = \xi^{vp-}$
    - $\gamma^{vp} = \gamma^{vp-}$
  - Si $F^{vp}\left(\boldsymbol{\sigma}^e, \xi^{vp-}, T\right) \geq 0$, on est viscoplastique :
    - $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{vp} = A_v^T \left(\frac{\left\langle F^{vp}\left(\boldsymbol{\sigma}^e, xi^{vp}, T\right) \right\rangle}{P_a} \right)^{n_v} \boldsymbol{G}^{vp-} \Delta t$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- $\Delta\gamma^{vp}=\sqrt{\frac{2}{3}\Delta\boldsymbol{e}^{vp}:\Delta\boldsymbol{e}^{vp}}$ avec $\Delta\boldsymbol{e}^{vp}=\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}-Tr\frac{\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}\right)}{3}\boldsymbol{\delta}$
- $\Delta\xi^{vp}=min\left(\Delta\gamma^{vp},\xi_{[5]}-\xi^{vp-}\right)$
- $\xi^{vp}=\xi^{vp-}+\Delta\xi^{vp}$
- $\gamma^{vp}=\gamma^{vp-}+\Delta\gamma^{vp}$
- $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}=\boldsymbol{\varepsilon}^{vp-}+\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$

- Mécanisme plastique actif?
  - Position de l'état de contrainte par rapport au seuil caractéristique :
    - Si $F^{vp}\left(\boldsymbol{\sigma}^{e},\xi_{[5]},T\right)\geq 0$,il y a couplage entre les deux mécanismes
    - Sinon, il n'y pas de couplage entre les deux mécanismes
  - Calcul de $F^{p}\left(\boldsymbol{\sigma}^{e},\xi^{p-},T\right)$
  - Si $F^{p}\left(\boldsymbol{\sigma}^{e},\xi^{p-},T\right)<0$, on est élastique :
    - $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p}=0$
    - $\Delta\gamma^{p}=0$
    - $\gamma^{p}=\gamma^{p-}$
    - $\xi^{p}=\xi^{p-}+\Delta\xi^{p}$ avec :
      - $\Delta\xi^{p}=0$ s'il n'y a pas couplage entre les deux mécanismes
      - $\Delta\xi^{p}=\Delta\gamma^{vp}$ s'il y a couplage entre les deux mécanismes
    - Mise à jour des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^{-}+\boldsymbol{A}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}-\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}-\frac{\alpha_{V}}{3}\Delta T\,\boldsymbol{\delta}\right)$$

  - Si $F^{p}\left(\boldsymbol{\sigma}^{e},\xi^{p-},T\right)\geq 0$, on est plastique :
    - Calcul de $\Delta\lambda$ (équation 56)
    - $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}=\Delta\lambda\boldsymbol{G}^{p-}$
    - $\Delta\gamma^{p}=\sqrt{\frac{2}{3}\Delta\boldsymbol{e}^{p}:\Delta\boldsymbol{e}^{p}}$ avec $\Delta\boldsymbol{e}^{p}=\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p}-Tr\frac{\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p}\right)}{3}\boldsymbol{\delta}$
    - $\Delta\xi^{p}=\Delta\gamma^{p}$ s'il n'y a pas couplage entre les deux mécanismes
    - $\Delta\xi^{p}=\Delta\gamma^{p}+\Delta\gamma^{vp}$ s'il y a couplage entre les deux mécanismes
    - $\xi^{p}=\xi^{p-}+\Delta\xi^{p}$
    - Mise à jour des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^{-}+\boldsymbol{A}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}-\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}-\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p}-\frac{\alpha_{V}}{3}\Delta T\,\boldsymbol{\delta}\right)$$

- Calcul de l'opérateur tangent $\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{ij}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}}$ (voir §3.1.2)

3.1.1 Détermination de l'incrément du multiplicateur plastique

L'incrément du multiplicateur plastique $\Delta\lambda$ est déterminé en appliquant la condition de Kuhn-Tucker, c'est-à-dire appliquer la condition suivante :

$$F^{p}\left(\boldsymbol{\sigma},\xi^{p},T\right)=0 \tag{50}$$

Soit sous forme incrémentale :

$$F^{p}\left(\sigma_{ij}^{-}+A_{ijkl}:\left(\Delta\varepsilon_{kl}-\Delta\lambda G_{kl}^{p-}-\langle\phi\rangle G_{kl}^{vp-}\Delta t-\frac{\alpha_{V}}{3}\Delta T\,\delta_{kl}\right),\xi^{p-}+\Delta\xi^{p},T^{-}+\Delta T\right)=0 \tag{51}$$

Nous choisissons de faire une résolution explicite par développement d'Euler :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$F^p\left(\sigma_{ij}^- + A_{ijkl}:\left(\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\lambda\, G_{kl}^{p-} - \langle\phi\rangle G_{kl}^{vp-}\Delta t - \frac{\alpha_V}{3}\Delta T\,\delta_{kl}\right), \xi^{p-}, T^-\right) -$$
$$\Delta\lambda\left(\frac{\partial F^p}{\partial\sigma_{ij}}\right)_{\sigma_{ij}^-}:\left(A_{ijkl}:G_{kl}^{p-}\right) + \Delta\xi^p\left(\frac{\partial F^p}{\partial\xi^p}\right)_{\xi^{p-}} + \Delta T\left(\frac{\partial F^p}{\partial T}\right)_{T^-} = 0 \quad (52)$$

Nous notons :

$$\left(\frac{\partial F^p}{\partial\sigma_{ij}}\right)_{\sigma_{ij}^-} = \left(\frac{\partial F^p}{\partial\sigma_{ij}^-}\right) \;;\; \left(\frac{\partial F^p}{\partial\xi^p}\right)_{\xi^{p-}} = \left(\frac{\partial F^p}{\partial\xi^{p-}}\right) \;;\; \left(\frac{\partial F^p}{\partial T}\right)_{T^-} = \left(\frac{\partial F^p}{\partial T^-}\right) \quad (53)$$

Deux cas sont à distinguer.

S'il y a couplage entre les mécanismes plastique et viscoplastique (état de contrainte au-dessus du seuil caractéristique). On a $\Delta\xi^p = \Delta\gamma^p + \Delta\gamma^{vp}$, et donc :

$$F^p\left(\sigma_{ij}^- + A_{ijkl}:\left(\Delta\varepsilon_{kl} - \langle\phi\rangle G_{kl}^{vp-}\Delta t - \frac{\alpha_V}{3}\Delta T\,\delta_{kl}\right), \xi^{p-}, T^-\right) -$$
$$\Delta\lambda\left(\frac{\partial F^p}{\partial\sigma_{ij}^-}\right):\left(A_{ijkl}:G_{kl}^{p-}\right) + \left(\Delta\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\,g_{II}^{p-} + \Delta\gamma^{vp}\right)\frac{\partial F^p}{\partial\xi^{p-}} + \Delta T\left(\frac{\partial F^p}{\partial T^-}\right) = 0 \quad (54)$$

Et :

$$F^p\left(\sigma_{ij}^- + A_{ijkl}:\left(\Delta\varepsilon_{kl} - \langle\phi\rangle G_{kl}^{vp-}\Delta t - \frac{\alpha_V}{3}\Delta T\,\delta_{kl}\right), \xi^{p-}, T^-\right) =$$
$$F^p\left(\sigma_{ij}^-, \xi^{p-}, T^-\right) + \frac{\partial F^p}{\partial\sigma_{ij}^-}:\left(A_{ijkl}:\left(\Delta\varepsilon_{kl} - \langle\phi\rangle G_{kl}^{vp-}\Delta t - \frac{\alpha_V}{3}\Delta T\,\delta_{kl}\right)\right) \quad (55)$$

D'où l'expression du multiplicateur plastique :

$$\Delta\lambda = \frac{F^p\left(\sigma_{ij}^-, \xi^{p-}, T^-\right) + \frac{\partial F^p}{\partial\sigma_{ij}^-}:\left(A_{ijkl}:\left(\Delta\varepsilon_{kl} - \langle\phi\rangle G_{kl}^{vp-}\Delta t\right)\right) + \Delta\gamma^{vp}\frac{\partial F^p}{\partial\xi^{p-}}}{\left(\frac{\partial F^p}{\partial\sigma_{ij}^-}\right):\left(A_{ijkl}:G_{kl}^{p-}\right) - \sqrt{\frac{2}{3}}\,g_{II}^{p-}\frac{\partial F^p}{\partial\xi^{p-}}} +$$
$$\frac{\left(\frac{\partial F^p}{\partial T^-} - K\,\alpha_V\frac{\partial F^p}{\partial\sigma_{ij}^-}:\delta_{ij}\right)\Delta T}{\frac{\partial F^p}{\partial\sigma_{ij}^-}:\left(A_{ijkl}:G_{kl}^{p-}\right) - \sqrt{\frac{2}{3}}\,g_{II}^{p-}\frac{\partial F^p}{\partial\xi^{p-}}} \quad (56)$$

Avec :

$$\langle\phi\rangle = A_v^T\left(\frac{\left\langle F^{vp}\left(\boldsymbol{\sigma}^e, \xi^{vp-}\right)\right\rangle}{P_a}\right)^{n_v} = A_v^T\left(\frac{\left\langle F^{vp}\left(\sigma^- + A_{ijkl}:\left(\Delta\varepsilon_{kl} - \frac{\alpha_V}{3}\Delta T\,\delta_{kl}\right), \xi^{vp-}\right)\right\rangle}{P_a}\right)^{n_v} \quad (57)$$

La quantité A_v^T représente la quantité A_v calculée à la température T (instant « + »).

S'il n'y a pas de couplage entre les deux mécanismes (état de contrainte en dessous du seuil caractéristique), on a donc $\Delta\xi^p = \Delta\gamma^p$, on a l'expression suivante du multiplicateur plastique :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\Delta\lambda=\frac{F^p\left(\sigma_{ij}^-,\xi^{p-},T^-\right)+\frac{\partial F^p}{\partial\sigma_{ij}^-}:\left(A_{ijkl}:\left(\Delta\varepsilon_{kl}-\langle\phi\rangle G_{kl}^{vp-}\Delta t\right)\right)}{\left(\frac{\partial F^p}{\partial\sigma_{ij}^-}\right):\left(A_{ijkl}:G_{kl}^{p-}\right)-\sqrt{\frac{2}{3}}g_{II}^{p-}\frac{\partial F^p}{\partial\xi^{p-}}}+\frac{\left(\frac{\partial F^p}{\partial T^-}-K\alpha_V\frac{\partial F^p}{\partial\sigma_{ij}^-}:\delta_{ij}\right)\Delta T}{\frac{\partial F^p}{\partial\sigma_{ij}^-}:\left(A_{ijkl}:G_{kl}^{p-}\right)-\sqrt{\frac{2}{3}}g_{II}^{p-}\frac{\partial F^p}{\partial\xi^{p-}}} \tag{58}$$

3.1.2 Opérateur tangent

L'expression du tenseur des contraintes à l'instant « + » est :

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^-+A_{ijkl}:\left(\Delta\varepsilon_{kl}-\Delta\lambda G_{kl}^{p-}-\langle\phi\rangle G_{kl}^{vp-}\Delta t-\frac{\alpha_V}{3}\Delta T\,\delta_{kl}\right) \tag{59}$$

L'opérateur tangent est défini par :

$$\frac{\partial\Delta\sigma_{ij}}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}=A_{ijkl}-\left(A_{ijmn}:G_{mn}^{p-}\right)\otimes\frac{\partial\Delta\lambda}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}-\left(A_{ijmn}:G_{mn}^{vp-}\right)\otimes\frac{\partial\langle\phi\rangle}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}\Delta t \tag{60}$$

Les deux mêmes cas sont à distinguer. Quand il n'y a pas de couplage entre les deux mécanismes, on a donc $\Delta\xi^p=\Delta\gamma^p$. Le premier terme vaut, à partir de (58) :

$$\frac{\partial\Delta\lambda}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}=\frac{\frac{\partial F^p}{\partial\sigma_{ij}^-}:\left(A_{ijkl}-\left(A_{ijmn}:G_{mn}^{vp-}\right)\otimes\frac{\partial\langle\phi\rangle}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}\Delta t\right)}{\frac{\partial F^p}{\partial\sigma_{ij}^-}:\left(A_{ijkl}:G_{kl}^{p-}\right)-\sqrt{\frac{2}{3}}g_{II}^{p-}\frac{\partial F^p}{\partial\xi^{p-}}} \tag{61}$$

Et le second terme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\langle\phi\rangle}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}&=\frac{A_v^T n_v}{P_a}\left(\frac{\left\langle F^{vp}\left(\sigma^e,\xi^{vp-},T\right)\right\rangle}{P_a}\right)^{n_v-1}\frac{\partial F^{vp}}{\partial\sigma_{ij}^e}:\frac{\partial\sigma_{ij}^e}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}\\ \frac{\partial\langle\phi\rangle}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}&=\frac{A_v^T n_v}{P_a}\left(\frac{\left\langle F^{vp}\left(\sigma^e,\xi^{vp-},T\right)\right\rangle}{P_a}\right)^{n_v-1}\frac{\partial F^{vp}}{\partial\sigma_{ij}^e}:A_{ijkl}\end{aligned} \tag{62}$$

La matrice tangente résultante vaut donc :

$$\frac{\partial\Delta\sigma_{ij}}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}=A_{ijkl}-\left(A_{ijmn}:G_{mn}^{p-}\right)\otimes\frac{\frac{\partial F^p}{\partial\sigma_{ij}^-}:\left(A_{ijkl}-\left(A_{ijmn}:G_{mn}^{vp-}\right)\otimes\frac{\partial\langle\phi\rangle}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}\Delta t\right)}{\frac{\partial F^p}{\partial\sigma_{ij}^-}:\left(A_{ijkl}:G_{kl}^{p-}\right)-\sqrt{\frac{2}{3}}g_{II}^{p-}\frac{\partial F^p}{\partial\xi^{p-}}}-\frac{A_v^T n_v}{P_a}\left(\frac{\left\langle F^{vp}\left(\sigma^e,\xi^{vp-},T\right)\right\rangle}{P_a}\right)^{n_v-1}\left(A_{ijmn}:G_{mn}^{vp-}\right)\otimes\left(\frac{\partial F^{vp}}{\partial\sigma_{ij}^e}:A_{ijkl}\right)\Delta t \tag{63}$$

Quand il y a couplage entre les deux mécanismes, on a donc $\Delta\xi^p=\Delta\gamma^p+\Delta\gamma^{vp}$. Le premier terme vaut, à partir de (58) :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \Delta\varepsilon_{kl}}=\frac{\frac{\partial F^p}{\partial \sigma_{ij}^-}:\left(A_{ijkl}-\left(A_{ijmn}:G_{mn}^{vp-}\right)\otimes\frac{\partial\langle\phi\rangle}{\partial \Delta\varepsilon_{kl}}\Delta t\right)+\frac{\partial F^p}{\partial \xi^{p-}}\frac{\partial \Delta\gamma^{vp}}{\partial \Delta\varepsilon_{kl}^{vp}}:\frac{\partial \Delta\varepsilon_{kl}^{vp}}{\partial \sigma_{ij}^e}:A_{ijkl}}{\frac{\partial F^p}{\partial \sigma_{ij}^-}:\left(A_{ijkl}:G_{kl}^{p-}\right)-\sqrt{\frac{2}{3}}g_{II}^{p-}\frac{\partial F^p}{\partial \xi^{p-}}} \tag{64}$$

Avec les deux termes suivants :

$$\frac{\partial \Delta\gamma^{vp}}{\partial \Delta\varepsilon_{kl}^{vp}}=\frac{2}{3}\frac{\Delta e_{ij}^{vp}}{\Delta\gamma^{vp}}:\left(\delta_{ik}\otimes\delta_{jl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\otimes\delta_{kl}\right) \tag{65}$$

Et :

$$\frac{\partial \Delta\varepsilon_{kl}^{vp}}{\partial \sigma_{ij}^e}=\frac{A_v^T n_v}{P_a}\left(\frac{\left\langle F^{vp}\left(\sigma^e,\xi^{vp-},T\right)\right\rangle}{P_a}\right)^{n_v-1}\frac{\partial F^{vp}}{\partial \sigma_{ij}^e}\otimes G_{mn}^{vp-}\Delta t \tag{66}$$

3.2 Schéma d'intégration implicite

L e schéma est sélectionné lorsque **ALGO_INTE = ' NEWTON '** .

3.2.1 Phase de prédiction élastique

Cette étape est identique à celle du paragraphe §3.1.

3.2.2 Phase de correction : équations non linéaires à résoudre

Cette étape consiste à résoudre le système d'équations non linéaires établi sur la base des mécanismes viscoplastique et/ou plastique. Les inconnues du système d'équations non linéaires sont les contraintes effectives à l'instant « + », $\boldsymbol{\sigma}$, le multiplicateur plastique $\Delta\lambda$, la variable d'écrouissage du mécanisme plastique à l'instant « + », ξ^p, et la variable d'écrouissage du mécanisme viscoplastique à l'instant « + », ξ^{vp}. Le vecteur des inconnues est donc, au maximum, de taille neuf (3D). Les équations non linéaires à résoudre sont :

- L'équation d'état incrémentale :

$$E_1:\quad \boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^-\boldsymbol{A}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}-\Delta\lambda\boldsymbol{G}^p-\left\langle\phi\left(F^{vp}\right)\right\rangle\boldsymbol{G}^{vp}-\frac{\alpha_V}{3}\Delta T\,\boldsymbol{\delta}\right)=0 \tag{67}$$

- La condition de Kuhn-Tucker :

$$E_2:\quad \begin{cases}\text{Si } F^p<0 \text{ alors } \Delta\lambda=0\\ \text{Si } F^p=0 \text{ alors } \Delta\lambda>0\end{cases} \tag{68}$$

- L'évolution incrémentale de la variable d'écrouissage du mécanisme plastique :

$$E_3:\quad \xi^p-\xi^{p-}-\Delta\xi^p=0 \tag{69}$$

- L'évolution incrémentale de la variable d'écrouissage du mécanisme viscoplastique :

$$E_4:\quad \xi^{vp}-\xi^{vp-}-\Delta\xi^{vp}=0 \tag{70}$$

Ces inconnues forment un système carré, $R(\Delta\boldsymbol{Y})$ où $\Delta\boldsymbol{Y}=\left(\Delta\boldsymbol{\sigma},\Delta\lambda,\Delta\xi^p,\Delta\xi^{vp}\right)$. À l'itération k de la boucle de correction locale de Newton, l'équation matricielle suivante, d'inconnue $\delta\left(\Delta\boldsymbol{Y}^{k+1}\right)$ est résolue :

$$\frac{dR\left(\Delta\boldsymbol{Y}^k\right)}{d\left(\Delta\boldsymbol{Y}^k\right)}\delta\left(\Delta\boldsymbol{Y}^{k+1}\right)=-R\left(\Delta\boldsymbol{Y}^k\right) \tag{71}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La matrice jacobienne $\frac{dR(\Delta \boldsymbol{Y}^k)}{d(\Delta \boldsymbol{Y}^k)}$, non symétrique, se construit de la manière suivante :

$$\frac{dR(\Delta \boldsymbol{Y}^k)}{d(\Delta \boldsymbol{Y}^k)}=\begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial(\sigma_{ij})^k} & \frac{\partial E_1}{\partial(\Delta\lambda)^k} & \frac{\partial E_1}{\partial(\xi^p)^k} & \frac{\partial E_1}{\partial(\xi^{vp})^k} \\ \frac{\partial E_2}{\partial(\sigma_{ij})^k} & \frac{\partial E_2}{\partial(\Delta\lambda)^k} & \frac{\partial E_2}{\partial(\xi^p)^k} & \frac{\partial E_2}{\partial(\xi^{vp})^k} \\ \frac{\partial E_3}{\partial(\sigma_{ij})^k} & \frac{\partial E_3}{\partial(\Delta\lambda)^k} & \frac{\partial E_3}{\partial(\xi^p)^k} & \frac{\partial E_3}{\partial(\xi^{vp})^k} \\ \frac{\partial E_4}{\partial(\sigma_{ij})^k} & \frac{\partial E_4}{\partial(\Delta\lambda)^k} & \frac{\partial E_4}{\partial(\xi^p)^k} & \frac{\partial E_4}{\partial(\xi^{vp})^k} \end{pmatrix} \tag{72}$$

Les termes dérivés associés à R_1 , correspondant à la première ligne de $\frac{dR(\Delta \boldsymbol{Y}^k)}{d(\Delta \boldsymbol{Y}^k)}$ sont :

$$\begin{aligned}\frac{d(R_1)_{ij}}{d(\Delta Y_1)_{mn}}=I_{ijmn}-\frac{\partial A_{ijkl}}{\partial \sigma_{mn}}:\left(\Delta\varepsilon_{kl}-\Delta\lambda G^p_{kl}-\left\langle\phi\left(F^{vp}\right)\right\rangle^+ G^{vp}_{kl}-\frac{\alpha_v}{3}\Delta T\,\delta_{kl}\right)+\\ \Delta\lambda\, A_{ijkl}:\frac{\partial G^p_{kl}}{\partial \sigma_{mn}}+A_{ijkl}:\left(G^{vp}_{kl}\otimes\frac{\partial\left\langle\phi\left(F^p\right)\right\rangle^+}{\partial \sigma_{mn}}\Delta t\right)+\\ \left\langle\phi\left(F^p\right)\right\rangle^+\Delta t\, A_{ijkl}:\frac{\partial G^{vp}_{kl}}{\partial \sigma_{mn}}\end{aligned} \tag{73}$$

$$\frac{d(R_1)_{ij}}{d(\Delta Y_2)_{mn}}=A_{ijkl}:G^p_{kl} \tag{74}$$

$$\frac{d(R_1)_{ij}}{d(\Delta Y_3)_{mn}}=\Delta\lambda\, A_{ijkl}:\frac{\partial G^p_{kl}}{\partial \xi^p} \tag{75}$$

$$\frac{d(R_1)_{ij}}{d(\Delta Y_4)_{mn}}=\Delta\lambda\, A_{ijkl}:\left(\frac{\partial\left\langle\Phi(F^{vp})\right\rangle^+}{\partial \xi^{vp}}G^{vp}_{kl}+\frac{\partial G^{vp}_{kl}}{\partial \xi^{vp}}\left\langle\Phi\left(F^{vp}\right)\right\rangle^+\right)\Delta t \tag{76}$$

Les termes dérivés associés à R_2 , correspondant à la deuxième ligne de $\frac{dR(\Delta \boldsymbol{Y}^k)}{d(\Delta \boldsymbol{Y}^k)}$ sont, en élasticité ($R_2\equiv\Delta\lambda$) :

$$\frac{d(R_2)}{d(\Delta Y_1)_{ij}}=0_{ij}\ ;\ \frac{d(R_2)}{d(\Delta Y_2)}=1\ ;\ \frac{d(R_2)}{d(\Delta Y_3)}=0\ ;\ \frac{d(R_2)}{d(\Delta Y_4)}=0 \tag{77}$$

Et en plasticité ($R_2\equiv F^p$) :

$$\frac{d(R_2)}{d(\Delta Y_1)_{ij}}=\frac{\partial F^p}{\partial \sigma_{ij}}\ ;\ \frac{d(R_2)}{d(\Delta Y_2)}=0\ ;\ \frac{d(R_2)}{d(\Delta Y_3)}=\frac{\partial F^p}{\partial \xi^p}\ ;\ \frac{d(R_2)}{d(\Delta Y_4)}=0 \tag{78}$$

Les termes dérivés associés à R_3 , correspondant à la troisième ligne de $\frac{dR(\Delta \boldsymbol{Y}^k)}{d(\Delta \boldsymbol{Y}^k)}$ sont :

$$\frac{d(R_3)}{d(\Delta Y_1)_{ij}}=\begin{cases}-\Delta\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\partial g^p_{II}}{\partial \sigma_{ij}}\ \text{dans le cas contractant}\\ -\Delta\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\partial g^p_{II}}{\partial \sigma_{ij}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta t\left(g^{vp}_{II}\frac{\partial\left\langle\phi\left(F^{vp}\right)\right\rangle^+}{\partial \sigma_{ij}}+\frac{\partial g^{vp}_{II}}{\partial \sigma_{ij}}\left\langle\phi\left(F^{vp}\right)\right\rangle^+\right)\ \text{dans le cas dilatant}\end{cases} \tag{79}$$

$$\frac{d(R_3)}{d(\Delta Y_2)}=-\sqrt{\frac{2}{3}}g^p_{II} \tag{80}$$

$$\frac{d(R_3)}{d(\Delta Y_3)}=1-\Delta\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\partial g^p_{II}}{\partial \xi^p} \tag{81}$$

$$\frac{d(R_3)}{d(\Delta Y_4)}=\begin{cases}0\ \text{dans le cas contractant}\\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta t\left(g^{vp}_{II}\frac{\partial\left\langle\phi\left(F^{vp}\right)\right\rangle^+}{\partial \sigma_{ij}}+\frac{\partial g^{vp}_{II}}{\partial \sigma_{ij}}\left\langle\phi\left(F^{vp}\right)\right\rangle^+\right)\ \text{dans le cas dilatant}\end{cases} \tag{82}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les termes dérivés associés à R_4 , correspondant à la quatrième ligne de $\frac{dR(\Delta \boldsymbol{Y}^k)}{d(\Delta \boldsymbol{Y}^k)}$ sont :

$$\frac{d(R_4)}{d(\Delta Y_1)_{ij}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta t\left(g_{II}^{vp}\frac{\partial\left\langle\phi(F^{vp})\right\rangle^+}{\partial\sigma_{ij}} + \frac{\partial g_{II}^{vp}}{\partial\sigma_{ij}}\left\langle\phi\left(F^{vp}\right)\right\rangle^+\right) \text{ si } \dot{\gamma}^{vp} \leq \xi_{[5]} - \xi^{vp-} \tag{83}$$

$$\frac{d(R_4)}{d(\Delta Y_2)} = 0 \tag{84}$$

$$\frac{d(R_4)}{d(\Delta Y_3)} = 0 \tag{85}$$

$$\frac{d(R_4)}{d(\Delta Y_4)} = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta t\left(g_{II}^{vp}\frac{\partial\left\langle\phi(F^{vp})\right\rangle^+}{\partial\sigma_{ij}} + \frac{\partial g_{II}^{vp}}{\partial\sigma_{ij}}\left\langle\phi\left(F^{vp}\right)\right\rangle^+\right) \tag{86}$$

On ne détaillera pas la totalité des termes dans ce document.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Description des paramètres du modèle

Paramètre matériau	DEFI_MATERIAU	Valeur par défaut
P_a	PA	
n_{elas}	NELAS	0
σ_c	SIGMA_C	
β	BETA	1,5
γ	GAMMA	0
v_1	V_1	
v_2	V_2	
$a_{[2]}$	A_2	
$m^0_{[0]}$	M_0	
$m^0_{[1]}$	M_1	
q^0_i	Q_I	
$\xi^0_{[1]}$	XI_1	
$\xi^0_{[2]}$	XI_2	
$\xi^0_{[5]}$	XI_5	
f_p	F_P	0,1
A^0_v	A	
n_v	N	
ρ_1	RHO_1	
ρ_2	RHO_2	
ρ_4	RHO_4	
r^q	R_Q	0
$-r^m$	R_M	0
$-r^s$	R_S	0
$r^x_{[1]}$	R_X1	0
$r^x_{[2]}$	R_X2	0
$r^x_{[5]}$	R_X5	0
Z	Z	0
	COUPLAGE_P_VP	1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Remarques :

- *Les paramètres du modèle à renseigner sous le mot-clé facteur* ***LKR*** *de la commande* ***DEFI_MATERIAU****.*
- *L e paramètre* ***COUPLAGE_P_VP*** *permet d'activer (1) ou non (0) le couplage entre les mécanismes plastique et viscoplastique.*
- *Les paramètres ayant une valeur par défaut sont facultatifs.*
- *L e module de Young (* ***E*** *) et le coefficient de Poisson (* ***NU*** *) sont à renseigner sous le mot-clé facteur* ***ELAS*** *.*

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Variables internes

Les variables internes du modèle,définies dans c*ode_aster* sont :

Index	Nom	Description	
V1	XIP	variable d'écrouissage du mécanisme plastique	ξ^p
V2	GAMMAP	déformation plastique équivalente	γ^p
V3	XIVP	variable d'écrouissage du mécanisme visco plastique	ξ^{vp}
V4	GAMMAVP	déformation viscoplastique équivalente	γ^{vp}
V5	INDICDIL	indicateur de dilatance 0 si contractant 1 si dilatant	
V6	INDIVISC	indicateur de viscoplasticité 1 si viscoplasticité 0 sinon	
V7	INDIPLAS	indicateur de plasticité 1 si plasticité 0 sinon	
V8	EPSVOLME	partie mécanique de la déformation volumique élastique	$tr\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m,e}\right)$
V9	EPSVOLTH	partie thermique de la déformation volumique élastique	$tr\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{T,e}\right)$
V10	EPSPVOL	déformation plastique volumique	$tr\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{p}\right)$
V11	EPSVOLVP	déformation viscoplastique volumique	$tr\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}\right)$
V12	DOMAINE	domaine 0 si élastique 1 si plastique pré-pic 2 si plastique post-pic entre les seuils de pic et intermédiaire 3 si plastique post-pic entre les seuils intermédiaire et résiduel	

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Bibliographie

[1] **Laigle, F.** (**2004**). *Modèle conceptuel pour le développement de lois de comportement adaptées à la conception des ouvrages souterrains*, thèse de doctorat, École Centrale Lyon.

[2] **Kleine, A.** (**2007**). *Modélisation numérique du comportement des ouvrages souterrains par une approche viscoplastique*, thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine.

[3] **Raude, S.** (**2015**). *Prise en compte des sollicitations thermiques sur les comportements instantané et différé des géomatériaux*, thèse de doctorat, Université de Lorraine.

[4] **Hoxha, D.** (**2005**). *Modélisation des géomatériaux et des ouvrages dans les massifs rocheux*, thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine.

[5] **Haïed, A.** (**1995**). *Étude expérimentale de la rupture en mode de déformation localisé dans un grès*, thèse de doctorat, Université de Lille 1.

[6] **Luong, M.** (**1980**). *Phénomènes cycliques dans les sols pulvérulents*, Revue Française de Géotechnique 10, pp. 39-53.

[7] **Ibsen, L. and Lade, P.** (**1999**). *Effects of nonuniform stresses and strains on measured characteristic states*, AAU Geotechnical Engineering Papers: Soil Mechanics Paper , pp. 897-904.

[8] **Diederichs, M.; Carvalho, J. and Carter, T.** (**2007**). *A modified approach for prediction of strength and post yield beahviour for high GSI rock masses in strong, brittle ground*. In: Eberhardt, E.; Stead, D. & Morrison, T. (Ed.), *Rock Mechanics: Meeting Society's Challenges and Demands*, Taylor and Francis.

[9] **Diederichs, M. and Martin, C.** (**2010**). *Measurement of spalling parameters from laboratory testing*. In: Zhao, J.; Labiouse, V.; Dudt, J.-P. & Mathier, J.-F. (Ed.), *ISRM International Symposium - EUROCK*, , International Society for Rock Mechanics.

[10] **Pellegrino, A.** (**1996**). *Comportement fragile des roches : dégradation des propriétés élastiques et anisotropie induite par les contraintes*, thèse de doctorat, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.

[11] **Zhao, X. and Cai, M.** (**2010**). *A mobilized dilation angle model for rocks*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 47, pp. 368-384.

[12] **Armand, G.; Noiret, A.; Zghondi, J. and Seyedi, D.** (**2013**). *Short- and long-term behaviors of drifts in the Callovo-Oxfordian claystone at the Meuse/Haute-Marne Underground Research Laboratory*, Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering 5, pp. 221-230.

[13] **Hoxha, D.** (**2003**). *Essais de fluage sur l'Argilite de l'Est*, Institut National Polytechnique de Lorraine, Rapport interne .

[14] **Coussy, O.**, (**2004**). *Poromechanics*. John Wiley and Sons.

[15] **Biot, M.** (**1973**). *Nonlinear and semilinear rheology of porous solids*, Journal of Geophysical Research 78, pp. 4924-4937.

[16] **Hoek, E.; Carranza-Torres, C. and Corkum, B.** (**2002**). *Hoek-Brown failure criterion*, In: *NARMS-TAC Conference, Toronto*.

[17] **Bigoni, D. and Piccolroaz, A.** (**2004**). *Yield criteria for quasibrittle and frictional materials*, International Journal of Solids and Structures 41, pp. 2855-2878.

[18] **Zhou, H.; Hu, D.; Zhang, F. and Shao, J.** (**2011**). *A thermo-plastic/viscoplastic damage model for geomaterials*, Acta Mechanica Solida Sinica 24, pp. 195-208.

[19] **Cai, M.; Kaiser, P.; Tasaka, Y.; Maejima, T.; Morioka, H. and Minami, M.** (**2004**). *Generalized crack initiation and crack damage stress thresholds of brittle rock masses near underground excavations*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 41, pp. 833-847.

[20] **François, B.** (**2008**). *Thermo-plasticity of soils at various saturation state: application to nuclear waste disposal*, thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.

[21] **Laloui, L. and Cekerevac, C.** (**2008**). *Numerical simulation of the non-isothermal mechanical behaviour of soils*, Computers and Geotechnics 35, pp. 729-745.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

[22] **Hoek, E.; Marinos, P. and Benissi, M.** (**1998**). *Applicability of the geological strength index (GSI) classification for very weak and sheared rock masses. The case of the Athens Schist Formation*, Bulletin of Engineering Geology and the Environment 57, pp. 151-160.

[23] **Perzyna, P.**, (**1971**). *Thermodynamic theory of viscoplasticity*. Academic Press.

[24] **Alejano, L. and Alonso, E.** (**2005**). *Considerations of the dilatancy angle in rocks and rock masses*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 42, pp. 481-507.

[25] **Vermeer, P. and de Borst, R.** (**1984**). *Non-Associated Plasticity for Soils, Concrete and Rock*, HERON 29, pp. 1-64.

[26] **Kanatani, K.** (**1982**). *Mechanical foundation of the plastic deformation of granular materials. IUTAM conf. on defor. and failure of gran. mater.*. In: Alejano, R.; Perucho, A.; Olalla, C. & Jimenez, R. (Ed.), *ISRM International Symposium - EUROCK*, , International Society for Rock Mechanics.

[27] **Kanatani, K.** (**1983**). *Macroscopic and microscopic descriptions of the mechanics of granular materials. Advances in the mechanics and flow of granular materials*. In: Shahinpoor, M. (Ed.), *Advances in the mechanics and the flow of granular materials*, Trans Tech Publications.

[28] **Elamrani, K.** (**1992**). *Contribution a la validation du modèle C. J. S. pour les matériaux granulaires*, thèse de doctorat, École Centrale de Lyon.

[29] **Maleki, M.; Dubujet, P. and Cambou, B.** (**2000**). *Modélisation hiérarchisée du comportement des sols*, Revue Française de Génie Civil 4, pp. 895-928.

[30] **Biarez, J. and Hicher, P.-Y.**, (**1994**). *Elementary Mechanics of Soil Behaviour: Saturated Remoulded Soils*. Balkema.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)