Loi de comportement ENDO_HETEROGENE

Résumé :

Cette documentation présente l'écriture théorique et l'intégration numérique de la loi de comportement ENDO_HETEROGENE qui prend en compte l'effet de l'hétérogénéité de la roche sur sa probabilité de rupture. Ce modèle a été intégré comme une loi d'endommagement non local (à gradient de contrainte) basé sur un modèle à deux seuils.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Introduction – Domaine d'application....3
2 Quelques généralités sur les modèles probabilistes de formation de réseaux de fissures....3
3 Développement de la loi ENDO_HETEROGENE....4
3.1 Amorçage des fissures....5
3.2 Propagation des fissures....6
3.3 Coordination des seuils....8
4 Intégration numérique....9
4.1 Initialisation....9
4.2 Résolution du problème global....10
4.3 Implémentation de la loi de comportement....12
4.4 Paramètres matériaux nécessaires à la loi....15
4.4.1 Mots clés....15
4.4.2 Conseils d'identification....15
4.5 Description des variables internes....15
5 Fonctionnalités et vérification....16
6 Bibliographie....16
7 Description des versions du document....17

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction – Domaine d'application

La loi de comportement ENDO_HETEROGENE vise à modéliser l'endommagement de matériaux hétérogènes et a été développée spécifiquement pour des géomatériaux (par exemple l'argilite). Cette loi est basée sur un modèle probabiliste de fracturation des roches développé dans le cadre d'une collaboration entre le BRGM et le LMT-Cachan autour de la thèse de Nicolas Guy [bib1]. Ce modèle prend en compte l'effet de l'hétérogénéité de la roche sur sa probabilité de rupture. La répartition initiale de micro-défauts est en effet donnée en fonction de cette hétérogénéité à partir d'un modèle classique de Poisson-Weibull. Le modèle repose ensuite sur la considération de deux seuil : un seuil d'amorçage et un seuil de propagation basé sur le facteur d'intensité de contraintes régularisées.

La régularisation des contraintes nous permet :
- d'obtenir des résultats indépendants de la discrétisation spatiale
- d'évaluer les deux seuils à partir de la même grandeur, i.e., la contrainte régularisée
- de calculer le facteur d'intensité des contraintes « régularisées » sans raffinement du maillage et avec une bonne précision.

Finalement, ce modèle fournit explicitement un trajet de fissuration et tient compte de l'interaction des fissures les unes par rapport aux autres.

2 Quelques généralités sur les modèles probabilistes de formation de réseaux de fissures

En guise d'introduction, nous précisions ici le cadre dans lequel est développé ce modèle et rappelons quelques notions de base. Afin d'expliquer la formation de fissures, on suppose qu'elles s'amorcent toutes sur des défauts préexistants, modélisés par des fissures possédant une taille donnée. Autrement dit, le début de la propagation est considéré comme l'amorçage. Le modèle de Weibull est largement utilisé pour étudier la dégradation et la rupture des matériaux à comportement fragile [bib8] ou quasi fragile [bib3]. Lors de la rupture d'une éprouvette de roche, on peut considérer que c'est la rupture du défaut le plus critique, la rupture locale, qui entraîne la rupture de la structure, i.e., la rupture globale. Autrement dit, la rupture du maillon le plus faible entraîne la rupture de la chaîne (i.e., la structure). Dans le cadre de l'hypothèse du maillon le plus faible, la probabilité de rupture globale P_F d'un domaine Ω est reliée à la probabilité de rupture P_{F0} de chaque élément Ω_0 de surface S_0, par :

$$P_F = 1 - \exp\left[\frac{1}{S_0}\int_\Omega \ln\left(1-P_{F0}\right) d\,\Omega\right] \tag{2.1}$$

La probabilité cumulée de la rupture locale P_{F0} peut être écrite par exemple à partir d'une loi de Weibull [bib9] :

$$\ln\left(1-P_{F0}\right) = -\left(\frac{\left\langle \sigma_1 - \sigma_u \right\rangle}{\sigma_0}\right)^m \tag{2.2}$$

Ce formalisme de Weibull est largement développé dans la documentation [R7.02.06].

On rappelle juste que pour une fissure donnée de taille a et en mode I, l'expression du facteur d'intensité des contraintes peut être réécrite de la manière suivante :

$$K = Y\,\sigma\,\sqrt{a} \tag{2.3}$$

Si on regarde une application de type mécanique des roches, on peut démontrer qu'un réseau de fissures peut être formé dans un milieu géologique (autour d'une alvéole par exemple) suite à

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

l'application d'une pression interne, si une fissure peut s'amorcer [bib5]. Ceci est dû à la diminution du facteur d'intensité des contraintes quand la taille d'une fissure devient importante par rapport au diamètre de l'alvéole. Le calcul de facteur d'intensité des contraintes pour une fissure débouchante sur le bord intérieur d'un cylindre creux soumis à une pression interne p_{int} montre deux tendances différentes en fonction de la taille de la fissure [bib1]. Dans la première partie, l'effet de la taille de fissure par rapport au niveau de la contrainte appliquée est prépondérant et K augmente avec celle-ci. Par contre dans la deuxième partie, l'effet de la diminution du niveau de contrainte appliquée à la fissure devient plus important que l'effet de l'augmentation de sa taille et K diminue en fonction de la taille de fissure. Une fissure peut s'amorcer dès lors que K atteint la ténacité (K_{IC}). La fissure se propage en augmentant la pression interne. Quand la pression intérieure arrive à sa valeur maximale, la fissure continue à se propager et s'arrête lorsque la valeur de K devient inférieure à K_{IC} en négligeant les effets dynamiques.

Ces résultats montrent qu'une fissure isolée se propage jusqu'à une taille donnée pour laquelle la valeur du facteur d'intensité des contraintes devient inférieure à la ténacité de la roche. Quand une première fissure s'arrête, une autre peut s'amorcer sur un deuxième site d'amorçage. La seconde fissure s'arrêtera à la même longueur que la première, une troisième fissure peut s'amorcer et ainsi de suite. Cela signifie qu'un réseau de fissures peut se former.

Supposons que toutes les fissures s'amorcent à partir de défauts initiaux répartis de manière aléatoire dans le massif. Un processus ponctuel de Poisson est considéré pour décrire la répartition des sites d'amorçage. Parmi tous ces sites potentiels d'amorçage de fissure, seule une fraction va donner naissance à des fissures. Quand la valeur du facteur d'intensité des contraintes pour un défaut (une fissure) dépasse une valeur critique (K_{IC}), la fissure commence à se propager. Quand une fissure est initiée, la présence de cette fissure crée une zone de relaxation de contraintes autour de celle-ci. Pour expliquer l'amorçage d'une fissure, il faut modéliser l'interaction des zones (i.e., le volume, la surface ou la longueur) affectées par la diminution de contrainte et les autres sites qui peuvent créer des fissures. Si le site se trouve dans une zone de relaxation des contraintes, la contrainte microscopique est inférieure à la contrainte macroscopique appliquée. Dans ce cas, ce site ne peut pas donner naissance à une nouvelle fissure.

Dans cette approche, la zone d'obscurcissement (i.e., relaxation de contraintes) est la quantité clé pour décrire la formation d'un réseau de fissures. La zone d'obscurcissement est définie comme une zone dans laquelle le niveau de contrainte est inférieur à la contrainte appliquée. La forme et la taille de cette zone peuvent être définies à l'aide des simulations numériques. On dit que les défauts potentiels sont écrantés par les fissures voisines.

3 Développement de la loi ENDO_HETEROGENE

Nous avons fait le choix dans *Code_Aster* de représenter la formation et la propagation des fissures par un modèle d'endommagement isotrope intégré. La loi de couplage endommagement-élasticité étant donnée classiquement par :

$$\underline{\sigma}=(1-d)\underline{\underline{C}}\,\underline{\varepsilon} \tag{3.1}$$

Avec σ le tenseur des contraintes, ε le tenseur de déformation, $\underline{\underline{C}}$ le tenseur d'élasticité isotrope et d la variable d'endommagement.

On se place dans le cadre rappelé dans la section 2. La présence de fissures dans la structure est modélisée par des lignes d'éléments cassés (i.e. pour lesquels l'endommagement d est tel que $d=1$). Pour les éléments sains, $d=0$. La rupture des éléments pouvant être causée par deux phénomènes ici distincts ; à savoir l'amorçage d'une nouvelle fissure à partir de l'élément considéré ou la propagation à travers l'élément considéré d'une fissure ayant amorcée dans un autre élément. Ces deux types de rupture sont décrits par deux types de fonctions seuils différents dans cette approche.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Par ailleurs, pour des lois de comportement correspondant à des matériaux fragiles l'introduction d'une hétérogénéité du matériau projetée sur le maillage a pour effet d'introduire une dépendance à la taille de la zone (et ce même avec l'utilisation de modèles non-locaux classiques [bib1]). De plus, une loi d'endommagement locale ne peut pas décrire un comportement fragile de type maillon le plus faible.
Afin de remédier à ce problème, il est ici proposé de :

1) modifier la loi locale pour représenter une rupture fragile de type maillon le plus faible dans un matériau hétérogène
2) introduire un opérateur de régularisation basé sur le gradient des contraintes.

Il est montré qu'une description non-locale à gradient des contraintes est d'une part, très proche des modèles non-locaux à gradient de déformations et d'autre part nous permet de calculer correctement le facteur d'intensité des contraintes qui est le paramètre clé pour décrire la propagation des macro-fissures. On introduit une contrainte régularisée telle que

$$\bar{\sigma} - l_c^2 \Delta \bar{\sigma} = \sigma \tag{3.2}$$

Avec $\underline{\bar{\sigma}}$ le tenseur des contraintes régularisées et l_c la longueur caractéristique. On considérera les conditions aux limites de Neumann dites naturelles à savoir

$$(\nabla \bar{\sigma}).\boldsymbol{n} = 0 \tag{3.3}$$

avec $\boldsymbol{n}$ la normale sortante au bord considéré. On considère une loi de comportement parfaitement fragile du type :

$$d = H\left(\langle \bar{\sigma}_1 - \sigma_y(el) \rangle\right), \dot{d} \geq 0 \tag{3.4}$$

Où σ_y est une contrainte associée à la limite d'élasticité.

Les deux seuils seront donc écrits en fonction d'une contrainte régularisée sur une longueur caractéristique l_c qui sera grande devant la taille des éléments. On s'attachera dans la présente partie à justifier le choix des deux seuils ainsi que la manière dont ils se coordonnent.

3.1 Amorçage des fissures

Comme dit précédemment, l'amorçage de nouvelles macro-fissures est représenté par un modèle de Weibull. En vue de décrire de manière pertinente le pas de fissuration, une dispersion sur les paramètres du matériau (module de Weibull, paramètre d'échelle) propre à chaque élément fini est introduite. En réalisant au préalable un tirage au sort sur une distribution uniforme pour chaque élément fini afin d'en tirer une valeur de probabilité de rupture de chaque élément $P(el) \in [0\,;1]$, on peut décrire la contrainte pour laquelle une fissure amorcera dans un élément fini par l'équation suivante :

$$\sigma_a(el) = \frac{\sigma_0}{\left(\lambda_0 Z_{el}\right)^{1/m}} . \left[-\ln\left(1 - P(el)\right)\right]^{\frac{1}{m}} \tag{3.1.1}$$

Avec Z_{el} la taille (le volume ou la surface suivant la dimension) de l'élément fini, m le modume de Weibull et $\frac{\sigma_0^m}{\lambda_0}$ le paramètre d'échellle.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'utilisation d'un modèle de Weibull pour décrire l'amorçage de nouvelles fissures a un avantage certain en vue d'obtenir des résultats indépendants du maillage. Considérons deux partitions différentes du domaine Z_{do} chacune constituée de sous-domaines Z_{di}^1 et Z_{di}^2. On peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{n1} Z_{di}^1 = Z_{do} = \sum_{i=1}^{n2} Z_{di}^2 \tag{3.1.2}$$

où $n1$ et $n2$ signifient les nombres des sous-domaines dans les deux cas. La probabilité d'amorçage de la première fissure d'un sous-domaine pour une sollicitation σ s'écrit :

$$P_{asdi} = 1 - \exp\left[- Z_{sd} \lambda_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right] \tag{3.1.3}$$

où Z_{sd} est la taille (volume) d'un sous-domaine. La probabilité d'amorcer la première fissure sur l'ensemble des sous-domaines P_{aesd1} pour une sollicitation σ peut en être déduite :

$$P_{aesd1} = 1 - \prod_{i=1}^{n_{sd}} \left[1 - P_{asdi1} \right] = 1 - \exp\left[- \sum_{i=1}^{n_1} Z_{di}^1 \lambda_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right] = 1 - \exp\left[- \sum_{i=1}^{n_2} Z_{di}^2 \lambda_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right] = P_{aesd2} \tag{3.1.4}$$

Car :

$$\sum_{i=1}^{n_1} Z_{di}^1 = \sum_{i=1}^{n_2} Z_{di}^2 = Z_{do} \tag{3.1.5}$$

L'équation (3.1.1) nous permet de retrouver une probabilité d'amorçage de la première fissure sur un domaine de taille Z_{do} indépendante du découpage en sous-domaines.

Finalement on peut écrire la loi d'évolution de l'endommagement d liée à l'amorçage d'une nouvelle fissure dans un élément :

$$d = H\left(\langle \bar{\sigma}_1 - \sigma_a(el) \rangle \right), \dot{d} \geq 0 \tag{3.1.6}$$

où H est la fonction échelon de Heaviside et $\bar{\sigma}_1$ la contrainte régularisée principale maximale.

3.2 Propagation des fissures

Nous allons démontrer dans cette partie, que l'approche non-locale proposée nous permet de calculer correctement le facteur d'intensité des contraintes pour des fissures modélisées comme une série d'éléments cassés. En effet, il est possible de lier un critère en facteur d'intensité des contraintes, issus de la mécanique de la rupture à la contrainte régularisée. On peut considérer que la solution asymptotique de champ de contrainte en pointe de fissure est une bonne approximation des champs que l'on pourra trouver à la pointe d'une fissure en propagation. Le champ de contrainte donné par la solution de Westergaard peut s'écrire dans un repère en pointe de fissure tel que présenté sur la Figure 3.2-a comme une composition de champs élastiques (pour un problème plan) :

$$\underline{\sigma}(r,\theta) = K_I \underline{f_I}(r,\theta) + K_{II} \underline{f_{II}}(r,\theta) \tag{3.2.1}$$

Avec K_I, K_{II} les facteurs d'intensité de contraintes en mode I et II, et $\underline{f_I}, \underline{f_{II}}$ des fonctions poids associées (équation 3.2.2 et 3.2.3) en mode I et II.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\underline{\underline{f_I}}(r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) & \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} & 0\\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

$$\underline{\underline{f_{II}}}(r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\begin{bmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}\left(2-\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) & \cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) & 0\\ \cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) & \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

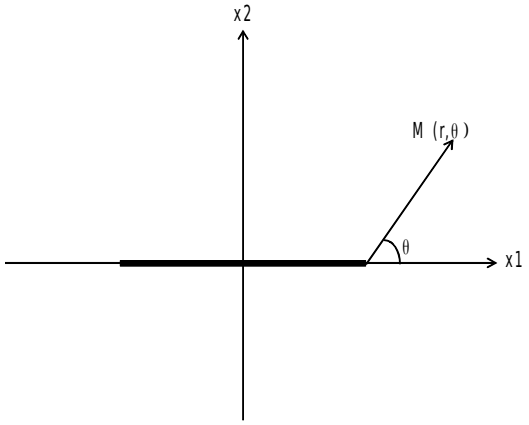


Figure 3.2-a: Définition d'un repère en pointe de fissure

La contrainte régularisée en pointe de fissure peut être estimée par

$$\underline{\underline{\bar{\sigma}_p}}(K_I,K_{II})=\sum_{i=1}^{II}\left[\frac{K_i}{\pi l_c^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\%l_c}\underline{\underline{f_i}}(r,\theta)\,r\,\partial r\,\partial\theta\right] \quad (3.2.4)$$

Qui peut finalement s'écrire sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\bar{\sigma}_p}}(K_I,K_{II})=\frac{\Gamma^2(3/4)}{5\pi\sqrt{\pi lc}}\begin{bmatrix}4K_I & 4K_{II} & 0\\ 4K_{II} & 6K_I & 0\\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_{33p}\end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

où $\bar{\sigma}_{33p}=-\nu(\bar{\sigma}_{11p}+\bar{\sigma}_{22p})$ en déformation plane et $\bar{\sigma}_{33p}=0$ en contraintes planes. Par ailleurs on rappelle que Γ est la fonction Gamma, telle que $\Gamma(a)=\gamma(a,\infty)$ et $\gamma(a,b)=\int_0^b t^{a-1}\exp(-t)\,dt$ fonction gamma incomplète. Concrètement $\Gamma(3/4)=1{,}225416$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Alors, en se basant sur l'expression de la contrainte régularisée en pointe de fissure, il est possible de proposer une loi d'évolution associée à la propagation d'une macro-fissure portant sur la contrainte principale maximale du type :

$$d = H\left(\left\langle \bar{\sigma}_I - \sigma_p(el)\right\rangle\right), \dot{d} \geq 0 \tag{3.2.6}$$

Avec :

$$\sigma_p(el) = \frac{6\Gamma^2(3/4)}{5\pi}\frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi l_c}} \tag{3.2.7}$$

$\sigma_p(el)$ est le seuil de rupture d'un élément par propagation d'une fissure à l'échelle macroscopique et K_{Ic} la ténacité du matériau. Pour une sollicitation en mode I pur, le seuil proposé correspond à un seuil du type facteur d'intensité de contrainte issu de la mécanique de la rupture. Le seuil proposé a notamment l'avantage d'être indépendant du fait que l'on se place en contraintes planes ou déformation planes pour un problème 2D et il se rapproche d'un critère en facteur d'intensité des contraintes en mode I pour un problème 3D. On note qu'en pratique le critère présenté est un critère en mode mixte, en effet, si on observe le seuil à rupture par propagation d'une fissure à l'échelle macroscopique sous une sollicitation composée par exemple de modes I et II en contraintes planes on obtient en pointe de fissure

$$\bar{\sigma}_{Ip} = \frac{6\Gamma^2(3/4)}{5\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi l_c}}\left[5K_I + \sqrt{K_I^2 + 16K_{II}^2}\right] \tag{3.2.8}$$

qui dépend également du niveau de sollicitation en mode II .

3.3 Coordination des seuils

Le modèle de Weibull à deux paramètres décrit l'amorçage des fissures avec un caractère très conservatif. En effet, utiliser un modèle de Weibull à deux paramètres équivaut à supposer l'existence d'une probabilité d'amorçage de fissure non nulle dès que la contrainte principale maximale devient positive. D'un autre coté, l'utilisation d'un critère de propagation des fissures en facteur d'intensité des contraintes sur une fissure à l'échelle microscopique équivaut à supposer l'existence d'un seuil d'amorçage non nul. Par exemple, considérons le cas d'une zone qui a une dimension de l'ordre de l_c et qui est comprise dans une zone plus grande sollicitée uniformément. Si on suppose l'existence d'un seuil d'amorçage de Weibull σ_a , on peut lui associer une longueur de fissure par un critère de mécanique de la rupture :

$$\sigma_a(el) = \frac{\sigma_0}{(\lambda_0 Z_{el})^{1/m}}\left[-\ln(1-P(el))\right]^{1/m} = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a(el)}} \tag{3.3.1}$$

Avec $a(el)$ la demi-longueur de la plus grande fissure dans la zone considérée. Par souci de cohérence avec le seuil de propagation σ_p , il convient de faire attention à ce que l'utilisation d'un modèle de Weibull pour décrire l'amorçage de fissure n'implique pas de supposer la présence dans une zone considérée d'une fissure plus grande que la taille de la zone considérée. De plus il paraît raisonnable de supposer qu'un élément donné sera plus facilement rompu par la propagation d'une macro-fissure que par amorçage d'une nouvelle fissure. De telle manière, nous garantirons également que les sites d'amorçage qui se trouvent au voisinage de la pointe d'une fissure seront ecrantés par celle-ci. Cette hypothèse revient à poser l'inégalité suivante :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\sigma_a(el) \geq \sigma_p(el) \tag{3.3.2}$$

qui équivaut à :

$$a(el) \leq \left(\frac{5\pi}{6\Gamma(3/4)} \right)^2 l_c \tag{3.3.3}$$

pour définir une valeur critique de taille de défaut initial. On peut interpréter l'inégalité précédente comme suit : on ne peut pas supposer qu'une fissure initiale de taille comparable à l'échelle macroscopique soit contenue dans une zone de taille comparable à l'échelle microscopique. En pratique, s'il existe des fissures initiales de demi-longueur supérieure à environ l_c elles ne pourront pas être prises en compte par le modèle d'amorçage proposé, on pourra par contre les représenter par une ligne d'éléments finis cassés. Le modèle de Weibull sera donc utilisé pour représenter l'amorçage de fissures à partir de défauts initiaux de taille inférieure à $2l_c$. La longueur caractéristique l_c apparaît comme une échelle de transition entre l'échelle microscopique de l'amorçage de fissures et l'échelle macroscopique de la propagation de fissures. La longueur caractéristique peut alors s'interpréter comme étant de l'ordre de grandeur des plus grandes fissures initialement présentes à l'échelle microscopique.

Par ailleurs on remarque que si chaque élément fini ne contient pas de défaut initial plus grands que lui même et que la longueur caractéristique l_c est plus grande que la taille des éléments finis, alors l'inégalité 3.3.2 est automatiquement vérifiée.

Pour réaliser une coordination des seuils, un repérage des éléments est nécessaire. Pour ce faire, un critère portant sur le voisinage d'un élément fini a été mis au point. Dans ce cadre, le critère de propagation ne sera vérifié que sur des éléments qui se trouvent en voisinage direct d'une fissure déjà amorcée. Ce modèle nécessité donc la connaissance des voisins d'un élément. Les détails de ce repérage sont expliquées dans le chapitre suivant.

4 Intégration numérique

4.1 Initialisation

Afin d'effectuer un calcul utilisant les deux seuils d'endommagement, il est nécessaire de définir préalablement un jeu de paramètres. Les paramètres caractérisant le matériau sont les suivants : le module de Young E, le coefficient de Poisson ν, la ténacité K_{Ic}, le module de Weibull m, la longueur caractéristique l_c et une contrainte nominale d'amorçage à l'échelle de la longueur caractéristique. La contrainte nominale d'amorçage à l'échelle de la longueur caractéristique est introduite à la place du facteur d'échelle. On peut l'exprimer par :

$$\sigma_{l_c} = \frac{\sigma_0^m}{(\lambda_0 l_c^3)^{1/m}} \tag{4.1.1}$$

Avec σ_0^m/λ_0 le facteur d'échelle et m le module de Weibull. La contrainte nominale d'amorçage à l'échelle de la longueur caractéristique σ_{l_c} nous donne une idée de l'ordre de grandeur de la contrainte d'amorçage d'un domaine d'une taille de l_c^3 qui est éventuellement constitué de plusieurs éléments finis durant un calcul. Plus précisément la probabilité d'amorçage correspondant à une sollicitation de σ_{l_c} est d'environ 0,63. En plus des paramètres caractérisant le matériau, on précise l'épaisseur de la structure modélisée E_{ps}. Il est possible d'utiliser une variante du modèle de Weibull surfacique au lieu de volumique, pour laquelle l'unité du facteur d'échelle est le MPa^{m}m² au lieu du MPa^{m}m^3. Dans ce cas, il faut préciser que la structure a une épaisseur de $E_{ps} = l_c$ Durant la phase

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

d'initialisation on calcule pour chaque élément la valeur du seuil d'amorçage (stockée dans comme variable interne). Comme montré sur la Figure 4.1-a, le calcul du seuil d'amorçage σ_a est réalisé pour chaque élément fini et est constitué de plusieurs étapes.

- Pour chaque élément fini, on commence par calculer la taille des éléments Z_{el} en fonction de la position des nœuds et de l'épaisseur E_{ps} . Puis, on calcule le seuil de propagation par l'équation 3.2.7.
- Le seuil d'amorçage (lui aussi variable interne) est ensuite calculé (équation 3.2.1) avec $P(el) \in [0\,;1]$ un chiffre tiré au sort sur une densité de probabilité uniforme. Si la condition de cohérence des deux seuils (équation 3.3.2) n'est pas vérifiée, on recommence après avoir tiré au sort une autre valeur pour $P(el)$. Afin de rendre les deux seuils cohérents, on réalise ici une troncature de la distribution de Weibull. D'autre choix auraient pu être envisagé, on réalise ici une troncature par souci de simplicité. On remarque le choix de réaliser une troncature sur la distribution de Weibull oblige à choisir une longueur caractéristique réaliste. En effet, si la longueur caractéristique choisie est incohérente (*i.e.,* faible) avec les paramètres de Weibull utilisés, on peut tronquer la majeure partie de la distribution de Weibull. Dans ce cas, la description de l'amorçage n'est pas fidèle aux paramètres de Weibull considérés.

On se référera à la section 4.4.2 pour le choix des paramètres.

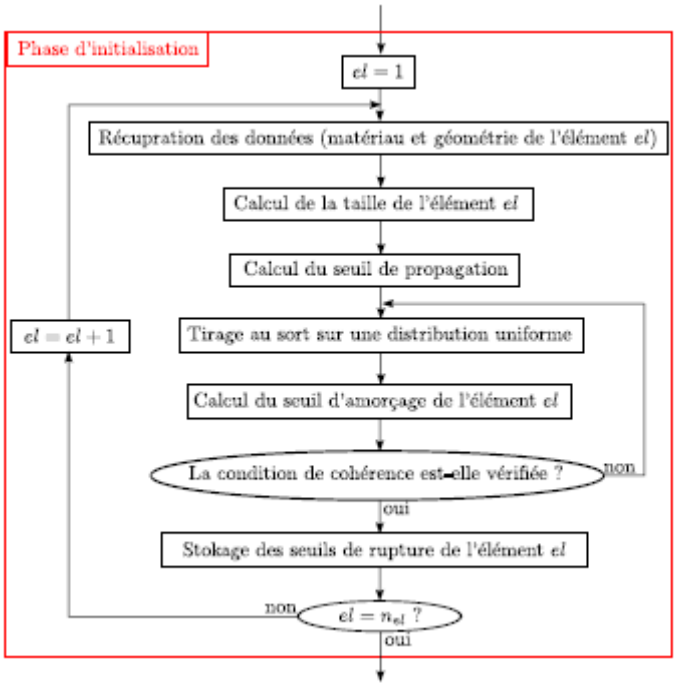


Figure 4.1-a: Schéma d'initialisation du calcul

4.2 Résolution du problème global

Le problème global porte sur le calcul des déplacements et des contraintes régularisées. La loi de comportement qui permet de calculer à chaque itération de Newton la contrainte et l'endommagement est implémentée selon un schéma implicite. Le problème est discrétisé à l'aide des nouveaux éléments finis particuliers introduits dans le Code_Aster comme décrit sur la figure 4.2-a.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

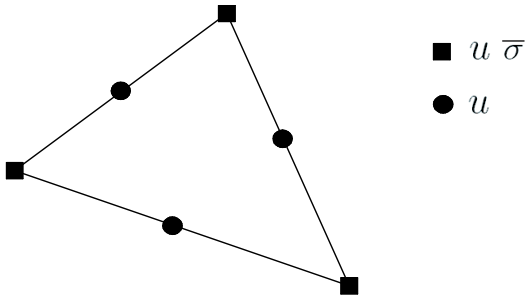


Figure 4.2-a: Inconnues nodales d'un élément triangle

Les éléments finis utilisés sont quadratiques en déplacement et linéaires en contraintes régularisés, ils comportent donc 21 degrés de liberté pour un élément triangle pour un problème plan (28 pour un quadrangle). Deux jeux de fonctions de formes et fonctions de formes dérivées sont associées aux déplacements $(N_u et\ B_u)$ et aux contraintes régularisées $(N_{\bar{\sigma}} et\ B_{\bar{\sigma}})$.

Deux équations gouvernent le problème global, l'une correspond à l'équilibre classique; l'autre correspond au calcul des contraintes régularisées (pour plus de détails sur le développement des problèmes non locaux à gradient, on se référera par exemple à [R5.04.01]). La formulation intégrale du problème est :

$$\forall u^* \in V_{ad} \int_\Omega \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}(u^*)\, d\Omega = \int_G u^* . T_G dG + \int_\Omega u^* . f_V\, d\Omega \qquad (4.2.1)$$

Avec V_{ad} l'espace des déplacements admissibles, T_G les forces imposées sur le bord G, f_V les forces volumiques et :

$$\forall \underline{s^*} \in [H^1(\Omega)]^6 \int_\Omega (\underline{s^*} . \underline{\bar{\sigma}} + \nabla \underline{s^*} . l_c^2 \underline{\bar{\sigma}})\, d\Omega = \int_\Omega \underline{s^*} . \underline{\sigma}\, d\Omega \qquad (4.2.2)$$

On notera dans la partie qui suit $\sigma, \varepsilon et \bar{\sigma}$, l'écriture sous forme de vecteurs des tenseurs des contraintes, déformations et contraintes régularisées ; on note u le vecteur déplacement. La résolution globale se résume à l'annulation d'un résidu portant sur les déplacements qui peut s'écrire pour chacun des éléments (pour plus de détails, on se référera à [R5.03.01]) :

$$F^u = F_{int} + D^T \lambda - F_{ext} \qquad (4.2.3)$$

Avec $F_{int} = \int_\Omega B_u^T \sigma\, d\Omega$, $F_{ext} = \int_\Gamma N_u^T T_g\, dG$ le chargement extérieur en efforts avec T_G les réactions nodales. D est tel que $Du = u^d$ avec u^d les déplacements imposés et λ les multiplcateurs de Lagrange pour des conditions aux limites de Dirichlet. On minimise aussi un résidu portant sur les contraintes régularisées :

$$F^{\bar{\sigma}} = K^{\bar{\sigma}\sigma} \bar{\sigma} - F^\sigma \qquad (4.2.4)$$

Avec $F^\sigma = \int_\Omega N_{\bar{\sigma}}^T \sigma\, d\Omega\ et\ K^{\bar{\sigma}\sigma} = \int_\Omega (N_{\bar{\sigma}}^T N_{\bar{\sigma}} + l_c^2 B_{\bar{\sigma}}^T B_{\bar{\sigma}})\, d\Omega$. Afin de minimiser les résidus présentés on utilise la matrice tangente suivante :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$K=\begin{bmatrix}\frac{\partial F^u}{\partial u} & \frac{\partial F^u}{\partial \bar{\sigma}}\\ \frac{\partial F^{\bar{\sigma}}}{\partial u} & \frac{\partial F^{\bar{\sigma}}}{\partial \bar{\sigma}}\end{bmatrix} \tag{4.2.5}$$

Avec :

$$\frac{\partial F^u}{\partial u}=\int_\Omega B_u^T \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} B_u d\Omega \tag{4.2.6}$$

$$\frac{\partial F^u}{\partial \bar{\sigma}}=\int_\Omega B_u^T \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\sigma}} N_{\bar{\sigma}} d\Omega \tag{4.2.7}$$

$$\frac{\partial F^{\bar{\sigma}}}{\partial \bar{\sigma}}=\int_\Omega \left(N_{\bar{\sigma}}^T N_{\bar{\sigma}}+l_c^2 B_{\bar{\sigma}}^T B_{\bar{\sigma}}\right) d\Omega \tag{4.2.8}$$

$$\frac{\partial F^{\bar{\sigma}}}{\partial u}=\int_\Omega -N_{\bar{\sigma}}^T \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} B_u d\Omega \tag{4.2.9}$$

4.3 Implémentation de la loi de comportement

Les éléments finis sains (*i.e.,* pour lesquels $d=0$) peuvent se trouver dans différentes situations. Soit ils sont à la pointe d'une fissure, auquel cas ils sont soumis au seuil de propagation, soit ils ne se trouvent pas à la pointe d'une fissure, auquel cas ils sont soumis au seuil d'amorçage. Ainsi la position des pointes de fissures et leurs éléments attitrés sont mémorisés durant le calcul. La Figure 4.3-a représente l'évolution de l'état des éléments finis durant l'amorçage et la propagation d'une fissure. Initialement, si tous les éléments finis sont sains, ils sont tous soumis à leur seuil de rupture par amorçage. S'il y a amorçage d'une fissure dans un élément donné, l'élément considéré est rompu (*i.e., d=1*) et il pointe si possible deux éléments voisins comme montré sur la Figure 4.3-a (a). A l'itération de Newton suivante, les éléments finis pointés ne sont plus soumis à leur seuil de rupture par amorçage mais au seuil de rupture par propagation.

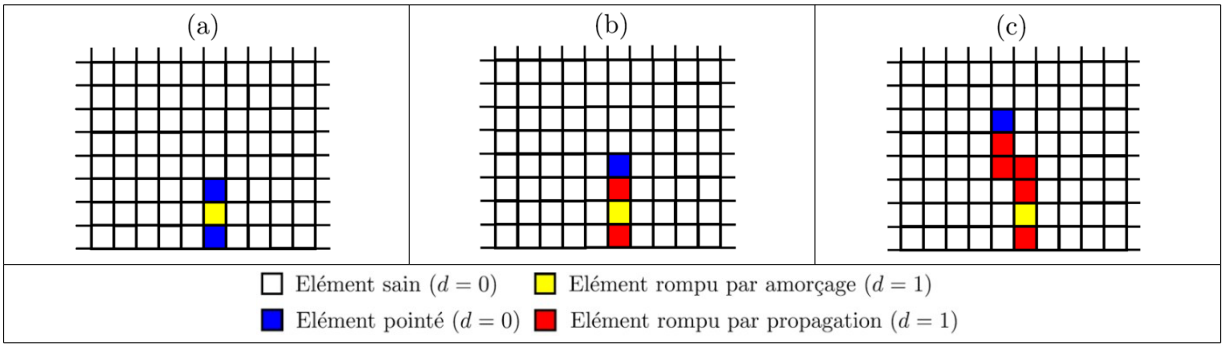


Figure 4.3-a: Etats des éléments finis

Si les éléments finis pointés subissent une sollicitation telle qu'ils rompent, chacun d'entre eux va alors si possible pointer un élément fini voisin qui sera ensuite soumis au seuil de rupture par propagation. Comme montré sur la Figure 4.3-a b, si un élément fini de bord ne trouve pas d'éléments voisin approprié à pointer, alors rien ne se passe. Ensuite, la propagation de la fissure amorcée peut se poursuivre selon le niveau et l'orientation des sollicitations.

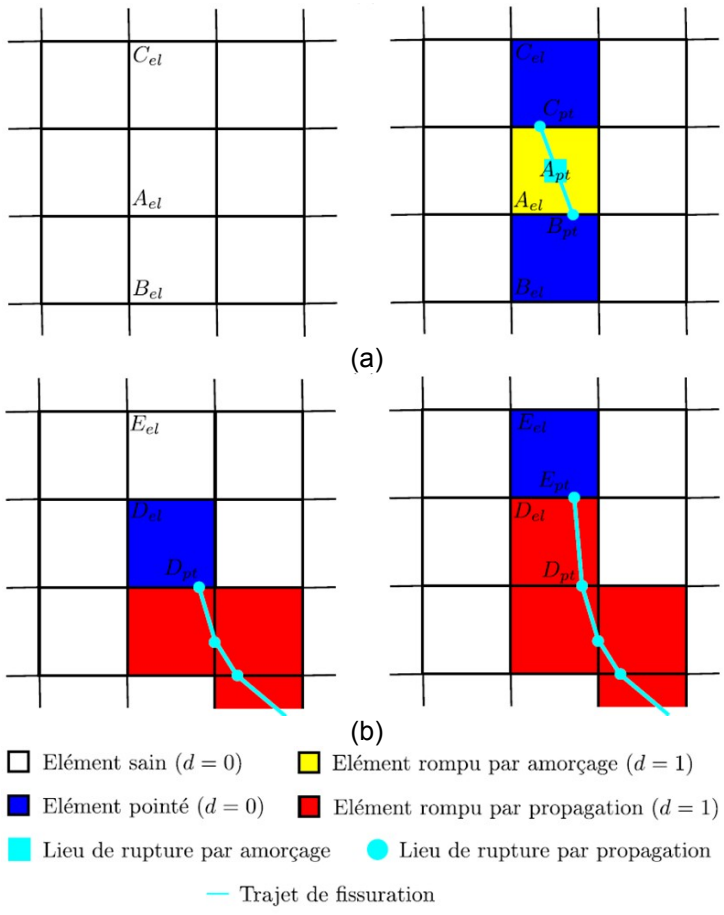
La figure 4.3-b permet d'observer plus précisément la méthode de pointage des éléments voisins durant la phase d'amorçage (figure 4.3-b(a)) et durant la phase de propagation (figure 4.3-b (b)). Si

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

dans un calcul de structure le niveau de sollicitation atteint est suffisant pour générer l'amorçage d'une fissure dans l'élément fini A_{el} , alors on fait l'hypothèse que la fissure considérée amorce au centre de l'élément et l'endommagement de l'élément fini considéré vaut $d=1$. On définit alors deux pointes de fissures B_{pt} et C_{pt} qui sont les intersections d'une droite $\Delta_{A_{el}}$ et des bords de l'élément fini considéré. On définit la droite $\Delta_{A_{el}}$ comme passant par le point A_{pt} et étant perpendiculaire au vecteur $\vec{n}_{IA_{pt}}$ qui correspond à la direction associée à la contrainte régularisée principale maximale au point A_{pt} lors de la rupture $\sigma_{IA_{pt}}$. Chacune des pointes de fissure est alors prise en charge par un élément fini voisin de l'élément fini A_{el} à savoir les éléments B_{el} et C_{el} . Les éléments B_{el} et C_{el} étant alors soumis au seuil de rupture par propagation.

Comme montré sur la figure 4.3-b (b), si on atteint le seuil de propagation au niveau d'une pointe de fissure D_{pt} prise en charge par un élément D_{el} , alors l'endommagement de l'élément D_{el} passe à $d=1$. On déplace alors la pointe de fissure selon une droite $\Delta_{D_{el}}$ définie comme passant par D_{pt} et étant perpendiculaire à $\vec{n}_{ID_{pt}}$ la direction associée à la contrainte régularisée principale maximale au point D_{pt} lors de la rupture $\sigma_{ID_{pt}}$. La pointe de fissure est alors positionné au point E_{pt} et prise en charge par l'élément fini E_{el} . La méthode de gestion du voisinage mise au point permet de gérer plusieurs fissures simultanément. Elle permet également à chacune des fissures définies de bifurquer selon le problème de structure ainsi que selon d'éventuelles interactions avec d'autres fissures d'une même structure.

L'intégration dans *Code_Aster* du système décrit est résumé sur la figure 4.3-c. Par ailleurs, les variables internes utilisées sont décrites en section 4.5.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Figure 4.3-b: Repérage des éléments voisins

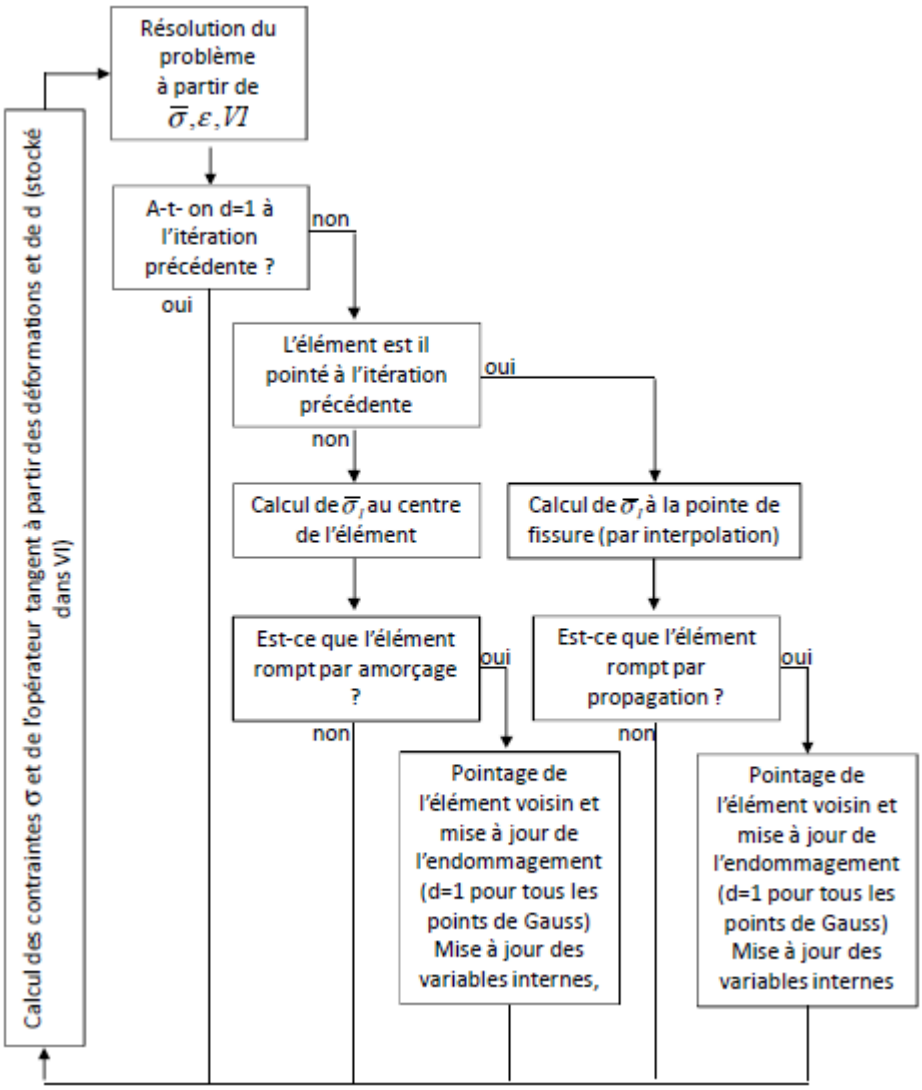


Figure 4.3-c: Intégration des seuils d'amorçage et de propagation dans *Code_Aster*

La méthode d'intégration du système de gestion du voisinage présenté ne considère qu'un élément fini comme étant pointé que s'il a été pointé durant l'itération de Newton précédente. De ce fait chaque pointe de fissure peut mener à la rupture par propagation d'un élément par itération de Newton. Par ailleurs, l'implémentation du comportement du matériau est analytique, ce qui garanti la stabilité des états convergés. En effet, durant un pas de chargement, chaque pointe de fissure peut mener à la rupture par propagation d'autant d'élément qu'il est nécessaire pour arriver à l'équilibre. De ce fait, le modèle présenté permet de représenter la propagation de macro-fissures même en phase instable. Considérons le cas d'une structure soumise à un incrément de chargement contenant n_{pf} pointes de fissures numérotées de 1 à n_{pf}. Si durant le pas de chargement aucune nouvelle fissure n'amorce mais que chaque pointe de fissure *i* doit rompre n_{elt} éléments pour que l'on atteigne un état stable, alors le nombre d'itérations globales de Newton requis pour résoudre le problème sur l'incrément de chargement est de $n_{it}=max\left(n_{eli}\right)$. On peut en déduire que la durée des simulations ne dépend que peu du nombre de fissures présentes dans la structure.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.4 Paramètres matériaux nécessaires à la loi

4.4.1 Mots clés

En résumé, 5 paramètres matériaux sont nécessaires à la loi à définir dans le mot clé ENDO_HETEROGENE de DEFI_MATERIAU :

1) WEIBULL : paramètre m du modèle de Weibull,
2) SY : contrainte nominale d'amorçage,
3) KI : facteur d'intensité de contrainte K_i,
4) EPAI : épaisseur E_{ps}
5) GR: Graine du tirage aléatoire définissant les défauts initiaux

La longueur caractéristique est rentrée sous le mot clé LONG_CARA de DEFI_MATERIAU.

4.4.2 Conseils d'identification

Le modèle de Weibull classique est basé sur l'hypothèse du maillon faible : la rupture globale de la structure correspond à la rupture locale, et donc directement aux hétérogénéités. Les paramètres de la distribution de Weibull sont retrouvés expérimentalement avec des essais de fendage, caractérisés par une propagation instable du premier défaut qui emmène l'éprouvette soudainement à la rupture. L'hypothèse du maillon le plus faible est donc valable dans ce cas. Comme nous l'avons vu, le modèle ENDO_HETEROGENE considère des types de fissurations plus complexes, avec la formation d'un réseau de fissures. Pour cette raison on introduit le concept d'amorçage, en le distinguant de la propagation ; l'hypothèse du maillon faible et l'application du modèle de Weibull s'arrêtent en effet à l'élément fini. Toutefois, la procédure de calage expérimental des paramètres de Weibull par des essais de fendage est encore valide parce qu'il s'agit d'une procédure complètement expérimentale et qu'elle s'applique à un cas où l'hypothèse du maillon faible est valide ; par contre, cela correspond seulement à l'amorçage de la fissuration pour ENDO_HETEROGENE.

Une étape plus compliquée concerne le détermination des paramètres restants : la ténacité en mode I et la longueur caractéristique. Les deux paramètres sont utilisés par le modèle ENDO_HETEROGENE pour le calcul du seuil de propagation. La loi de mécanique de la rupture utilisée est non linéaire justement à cause de la présence de l_c. Au contraire, dans les essais expérimentaux la propagation est associée à la ténacité seule, lorsqu'on se réfère à un modèle de mécanique de la rupture linéaire. Les deux concepts de ténacité utilisés ne semblent donc pas coïncider, parce qu'ils ne sont pas associés au même modèle théorique. Il faut donc prendre avec précaution les valeurs de ténacité issues des tests classiques.

Pour ce qui concerne la longueur caractéristique seule, on peut voir cette valeur comme une clé pour le passage entre la petite échelle, celle des micro défauts, à la grande échelle, celle des macro-fissures. Une règle empirique pour la choisir consiste à prendre une longueur comprise entre la longueur du plus petit défaut et celle d'une macro-fissure. On pourrait donc faire un choix a priori de la longueur caractéristique, et choisir ensuite la ténacité en conséquence.

4.5 Description des variables internes

Le modèle possède 12 variables internes qui nécessitent d'être stockées au temps précédent :

1) $VI(1)$: endommagement d,
2) $VI(2)$: indicateur (0 élément sain, 1 élément pointé, 2 rompu par amorçage, 3 rompu par propagation),
3) $VI(3)$: contrainte d'amorçage σ_a,
4) $VI(4)$: contrainte de propagation σ_p,
5) $VI(5)$: numéro de l'élément pointé numéro 1,
6) $VI(6)$: numéro de l'élément pointé numéro 1 si amorçage,

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7) $VI(7)$: itération de Newton de rupture,
8) $VI(8)$: itération de Newton courante,
9) $VI(9)$: coordonnée X de la pointe de fissure (après rupture par propagation),
10) $VI(10)$: coordonnée Y de la pointe de fissure (après rupture par propagation),
11) $VI(11)$: coordonnée X de la pointe de fissure 2 lors de l'amorçage,
12) $VI(12)$: coordonnée Y de la pointe de fissure 2 lors de l'amorçage,

5 Fonctionnalités et vérification

La loi de comportement est indissociable de la modélisation D_PLAN_GRAD_SIGM. On ne peut donc faire que de la modélisation plane. La description des paramètres ainsi que les conseils d'identification sont donnés en section 4.4.

La loi de comportement ENDO_HETEROGENE ainsi que la modélisation D_PLAN_GRAD_SIGM sont vérifiées par les cas tests suivants :

SSNV147	Modélisation de l'amorçage de fissure avec le modèle ENDO_HETEROGENE	[V6.03.147]
SSNV148	Calcul du facteur d'intensité de contraintes par la régularisation des contraintes avec ENDO_HETEROGENE	[V6.03.148]

Remarque :

En calcul parallèle, l orsqu'on effectue un calcul sur plusieurs processeurs avec la loi ENDO_HETEROGENE , rien ne garantit l'unicité de la solution à cause des seuils d'amorçage générés de manière aléatoire. On peut avoir une sensibilité machine de l'ordre de 1.E-3 %. Dans certains cas, il peut y avoir des problèmes numériques de non-convergence. C'est pourquoi il est conseillé de désactiver la distribution des données avec AFFE_MODELE/DISTRIBUTION= ' CENTRALISE '.

6 Bibliographie

[1] Guy, N. (2010): Modélisation probabiliste de l'endommagement des roches : application au stockage géologique du CO2. Thèse LMT.

[2] Hild, F., F., Billardon, R. et Marquis, D., (1992). Hétérogénéité des contraintes et rupture des matériaux fragiles. C. R. Acad. Sci. Paris **t. 315** (Série II): 1293-1298.

[3] Hild, F., Domergue, J.-M., Evans, A. G. et Leckie, F. A., (1994).Tensile and Flexural Ultimate Strength of Fiber-Reinforced Ceramic-Matrix Composites. Int. J. Solids Struct. 31(7): 1035-1045.

[4] Hild, F., (2001). The Weibull law: a model of wide applicability. Physical Aspects of Fracture. E. Bouchaud, D. Jeulin, C. Prioul and S. Roux (Eds.), Kluwer Academic Publishers **:** 35-46.

[5] Seyedi,D . et Hild, F., (2007). Vers un modèle probabiliste de formation de réseaux de fissures dans les roche lors de l'injection de CO2. Revue Française de Géotechnique 119: 73-82.

[6] Seyedi, D. : Modélisation probabiliste d'endommagement des barrières géologiques du stockage profond de déchets nucléaires – projet ENDOSTON (note interne H-T64-2010-01265-FR)

[7] Seyedi, D. : Modélisation de l'endommagement des milieux poreux par un chaînage hydromécanique. Rapport final du BRGM dans le cadre de la collaboration ENDOSTON II – projet ENDOSTON (note interne H-T64-2012-01746-FR – Granet)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

[8] Weibull, W. (1939)A Statistical Theory of the Strength of Materials 151 Roy. Swed. Inst. Eng. Res.

[9] Weibull, W. (1951) A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. ASME J. Appl. Mech. **18** (3): 293-297

7 Description des versions du document

Indice document	Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
A	10/02/14	S. Granet EDF-R&D/AMA D. Seyedi BRGM	Texte initial

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)