# Loi de Mohr-Coulomb

**Résumé :**

Ce document présente la méthode de résolution de la loi de Mohr-Coulomb dans *Code_Aster*.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# Table des Matières

1 Notations....3
1.1 Données générales....3
1.2 Convention sur les notations tensorielles....3
2 Formulation en termes de contraintes principales....6
3 Intégration locale de la loi de Mohr-Coulomb....7
3.1 Cas où un seul mécanisme est actif....7
3.2 Cas où deux mécanismes sont actifs....8
3.2.1 Formulation de la solution....8
3.2.2 Choix du deuxième mécanisme....11
3.3 Cas de la projection au sommet du cône....12
4 Expression de la matrice tangente consistante dans la base principale....14
4.1 Cas où un seul mécanisme est actif....14
4.2 Cas où deux mécanismes sont actifs....14
4.3 Cas de la projection au sommet du cône....14
5 Expression de la matrice tangente consistante dans la base globale....15
5.1 Quelques résultats sur les tenseurs symétriques isotropes d'ordre deux....15
5.2 Dérivée d'une fonction tensorielle isotrope d'ordre deux....15
5.2.1 Cas bidimensionnel de type contraintes planes (C_PLAN)....16
5.2.2 Cas bidimensionnel de type déformations planes (D_PLAN) et axisymétrique (AXIS)....17
5.2.3 Cas tridimensionnel....17
5.2.4 Application au cas de Mohr-Coulomb....19
6 Bibliographie....21



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Notations

## 1.1 Données générales

| | |
|---|---|
| $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ | Contraintes principales (dans cet ordre) |
| $E$ | Module d'Young |
| $\nu$ | Coefficient de Poisson |
| $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ | Module de compressibilité élastique |
| $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ | Module de cisaillement élastique |
| $\varphi$ | Angle de frottement interne du matériau |
| $\psi$ | Angle de dilatance du matériau |
| $c$ | Cohésion du matériau |
| $s = \sin(\varphi)$ | |
| $t = \sin(\psi)$ | |
| $p = \frac{I_1}{3} = \frac{trace(\boldsymbol{\sigma})}{3}$ | Contrainte moyenne |
| $p < 0$ | Convention de signe pour la contrainte en compression |
| $\boldsymbol{\sigma}^e$ | Tenseur de prédiction élastique des contraintes |
| $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ | Tenseurs des déformations totale, élastique et incrément de déformation plastique |
| $d\varepsilon_v^p = trace(d\boldsymbol{\varepsilon}^p)$ | Incrément de la déformation plastique volumique |
| $d\boldsymbol{e}^p = d\boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{d\varepsilon_v^p}{3}\mathbf{1}$ | Incrément de la déformation plastique déviatorique |
| $de^p = \|d\boldsymbol{e}^p\| = \sqrt{\frac{3}{2} d\boldsymbol{e}^p . d\boldsymbol{e}^p}$ | Norme de l'incrément de déformation plastique déviatorique, ou incrément de déformation équivalente |

## 1.2 Convention sur les notations tensorielles

Les vecteurs des déformations et des contraintes dans la base principale $(\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3)$ sont notés :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Le tenseur d'élasticité $\boldsymbol{C}$ permettant de relier $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ dans la base principale, tel que $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} . \boldsymbol{\varepsilon}$ s'écrit :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} K+\frac{4}{3}G & K-\frac{2}{3}G & K-\frac{2}{3}G \\ K-\frac{2}{3}G & K+\frac{4}{3}G & K-\frac{2}{3}G \\ K-\frac{2}{3}G & K-\frac{2}{3}G & K+\frac{4}{3}G \end{bmatrix} \quad (2)$$

Avec $K$ le module de compressibilité élastique et $G$ le module de cisaillement élastique. Les déformations et les contraintes sont des tenseurs symétriques d'ordre deux. On exploite généralement cette symétrie (six composantes indépendantes) en les représentant par des vecteurs de dimension six résultants de la projection de ces tenseurs dans des bases appropriées.
Les déformations et les contraintes données en entrée et produites en sortie de la résolution de la loi de comportement sont exprimées dans la base orthonormée des tenseurs symétriques d'ordre deux, notée $\bar{\boldsymbol{b}}$ :

$$\bar{\boldsymbol{b}}=\begin{Bmatrix} \boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z \\ \frac{\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_x}{\sqrt{2}} \\ \frac{\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_z+\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_x}{\sqrt{2}} \\ \frac{\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_z+\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Où $\left(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z\right)$ représentent les vecteurs unitaires de la base orthonormée cartésienne globale, supposée fixe. L'expression condensée des tenseurs des déformations et des contraintes projetés dans la base $\bar{\boldsymbol{b}}$ s'écrit :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}=\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \sqrt{2}\,\varepsilon_{xy} \\ \sqrt{2}\,\varepsilon_{yz} \\ \sqrt{2}\,\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \text{ et } \bar{\boldsymbol{\sigma}}=\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sqrt{2}\,\sigma_{xy} \\ \sqrt{2}\,\sigma_{yz} \\ \sqrt{2}\,\sigma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Cette écriture fait apparaître un terme en $\sqrt{2}$ devant les composantes croisées. Elle permet de :

- Exprimer le tenseur d'élasticité d'ordre quatre de $81$ composantes par un tenseur d'ordre deux de $36$ composantes ;
- Symétriser ce tenseur d'élasticité.

En effet, en notant $\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ , sa forme projetée dans la base $\bar{\boldsymbol{b}}$ devient $\bar{\sigma}_i=\bar{C}_{ij}\bar{\varepsilon}_j$ , où on a l'expression suivante pour $\bar{\boldsymbol{C}}$ :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\bar{\boldsymbol{C}}=\begin{bmatrix} C_{xxxx} & C_{xxyy} & C_{xxzz} & \sqrt{2}C_{xxxy} & \sqrt{2}C_{xxxz} & \sqrt{2}C_{xxyz} \\ C_{xxyy} & C_{yyyy} & C_{yyzz} & \sqrt{2}C_{yyxy} & \sqrt{2}C_{yyxz} & \sqrt{2}C_{yyyz} \\ C_{zzxx} & C_{zzyy} & C_{zzzz} & \sqrt{2}C_{zzxy} & \sqrt{2}C_{zzxz} & \sqrt{2}C_{zzyz} \\ \sqrt{2}C_{xyxx} & \sqrt{2}C_{xyyy} & \sqrt{2}C_{xyzz} & 2C_{xyxy} & 2C_{xyxz} & 2C_{xyyz} \\ \sqrt{2}C_{xzxx} & \sqrt{2}C_{xzyy} & \sqrt{2}C_{xzzz} & 2C_{xzxy} & 2C_{xzxz} & 2C_{xzyz} \\ \sqrt{2}C_{yzxx} & \sqrt{2}C_{yzyy} & \sqrt{2}C_{yzzz} & 2C_{yzxy} & 2C_{yzxz} & 2C_{yzyz} \end{bmatrix} \quad (5)$$

La forme condensée (**5**) n'est pas commode à utiliser à cause de la nécessité de manipuler les termes en $\sqrt{2}$ lors des opérations matricielles. On lui préfère une autre écriture, basée sur la projection dans la base dite de Voigt, notée $\tilde{\boldsymbol{b}}$ et ayant l'expression suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{b}}=\begin{Bmatrix} \boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_z \end{Bmatrix} \quad (6)$$

L'expression condensée des tenseurs des déformations et des contraintes projetés dans la base de Voigt $\tilde{\boldsymbol{b}}$ s'écrit :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \text{ et } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Cette écriture permet de s'affranchir des termes en $\sqrt{2}$ devant les composantes croisées, et est plus commode à utiliser au cours de la résolution numérique de la loi de comportement.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Formulation en termes de contraintes principales

Cette formulation n'est valable que sous l'hypothèse d'une isotropie du matériau [**79**, **82**]. En effet, cette condition est nécessaire pour garantir que la méthode de retour radial préserve les directions principales. Son intérêt réside dans le fait qu'elle simplifie l'écriture des équations et autorise de ce fait des méthodes de résolution très performantes (car quasi-analytiques).

Le comportement élastique est purement linéaire.

La surface de charge est caractérisée par six plans dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Chacun de ces plans est caractérisé par une équation du type :

$$F_{13}(\sigma_1, \sigma_3) = \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3)\sin\varphi - 2c\cos\varphi = 0 \quad (8)$$

Où $\varphi$ et $c$ sont des données matériau et caractérisent respectivement l'angle de frottement interne et la cohésion du matériau.

La loi est non associée et le potentiel d'écoulement plastique $G_{13}$ associé à la surface de charge $F_{13}$ s'écrit de la même façon :

$$G_{13}(\sigma_1, \sigma_3) = \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3)\sin\psi - 2c\cos\psi \quad (9)$$

Où $\psi$ est une donnée matériau et caractérise l'angle de dilatance du matériau.

Lorsque $\psi = \varphi$, la loi d'écoulement plastique devient associée.

Une représentation graphique de la surface de charge de Mohr-Coulomb dans l'espace des contraintes principales se trouve sur la figure 2-1 et dans le plan $\pi$ sur la figure 2-2.

On observe que les six plans s'intersectent deux à deux suivant une arête anguleuse, et se rejoignant au sommet du cône caractérisé par l'équation :

$$p = c\cot(\varphi) \quad (10)$$

Ces arêtes, au nombre de six, ainsi que le sommet du cône, forment des singularités qui posent des problèmes d'intégration numérique, car les dérivées de la surface de charge ne sont pas définies à ces endroits. On discutera plus loin des méthodes permettant de résoudre cette difficulté.

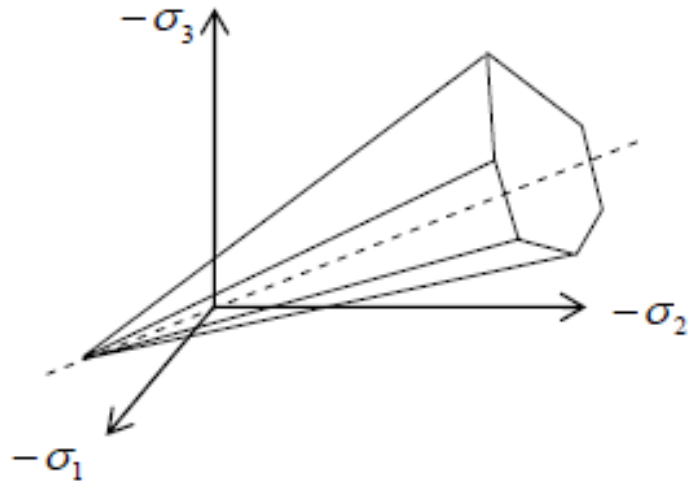



**Figure 2-1: Représentation de la surface de charge de Mohr-Coulomb dans l'espace tridimensionnelle des contraintes principales**

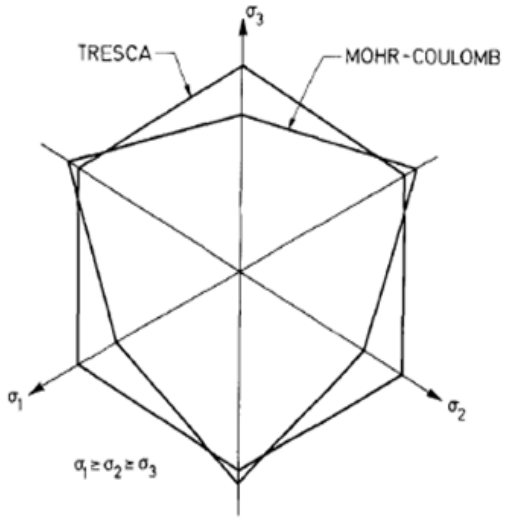



**Figure 2-2: Représentation de la surface de charge de Mohr-Coulomb dans le plan $\pi$ des déviateurs des contraintes (tout vecteur représenté dans ce plan correspond à une contrainte déviatorique).**



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Intégration locale de la loi de Mohr-Coulomb

Le taux de déformation plastique est donné à l'aide de la formule de Koiter :

$$d\,\boldsymbol{\varepsilon}^{p}=\sum_{j=1}^{m} d\,\lambda_{j}\frac{\partial G_{j}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\sum_{j=1}^{m} d\,\lambda_{j}\boldsymbol{n}_{Gj} \tag{11}$$

Où $m$ caractérise le nombre de mécanismes actifs, égal à un, deux ou six suivant les situations suivantes :

- la contrainte finale se situe à l'intérieur de la surface de charge, le point est régulier et $m=1$ ;
- la contrainte finale se situe sur une arête du cône, le point est singulier et $m=2$ ;
- la contrainte finale ne se situe ni à l'intérieur de la surface de charge ni sur une arête. Elle est alors projetée au sommet du cône, le point est singulier et $m=6$ ;

La contrainte finale $\boldsymbol{\sigma}^{+}$ est calculée à partir d'une prédiction élastique notée $\boldsymbol{\sigma}^{e}$ et d'une correction $\boldsymbol{\sigma}^{c}=\boldsymbol{C}\,.\,d\,\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ de sorte que :

$$\boldsymbol{\sigma}^{+}=\boldsymbol{\sigma}^{e}-d\,\boldsymbol{\sigma}^{c}=\boldsymbol{\sigma}^{e}-\boldsymbol{C}\,.\,d\,\boldsymbol{\varepsilon}^{p}=\boldsymbol{\sigma}^{e}-\sum_{j=1}^{m} d\,\lambda_{j}\boldsymbol{C}\,.\,\boldsymbol{n}_{Gj} \tag{12}$$

Les multiplicateurs plastiques $d\,\lambda_{j}$ sont calculés en injectant l'équation (**12**) dans l'équation (**8**), ce qui donne :

$$\sum_{j=1}^{m} d\,\lambda_{j}\left[\left(\boldsymbol{C}\,.\,\boldsymbol{n}_{Gj}\right)_{1}-\left(\boldsymbol{C}\,.\,\boldsymbol{n}_{Gj}\right)_{3}+\left(\left(\boldsymbol{C}\,.\,\boldsymbol{n}_{Gj}\right)_{1}+\left(\boldsymbol{C}\,.\,\boldsymbol{n}_{Gj}\right)_{3}\right)s\right]=\sigma_{1}^{e}-\sigma_{3}^{e}+\left(\sigma_{1}^{e}+\sigma_{3}^{e}\right)s-2c\cos\phi \tag{13}$$

Dans ce qui suit, on détaille les expressions correspondant aux différentes situations mentionnées plus haut. La procédure de résolution est rappelée dans le synoptique de la figure 3.3-1.

## 3.1 Cas où un seul mécanisme est actif

On détecte que la prédiction active un critère quand :

$$F_{13}\left(\boldsymbol{\sigma}^{e}\right)=\sigma_{1}^{e}-\sigma_{3}^{e}+\left(\sigma_{1}^{e}+\sigma_{3}^{e}\right)s-2c\cos\varphi\geq 0 \tag{14}$$

On a l'expression suivante pour la normale :

$$\boldsymbol{n}_{G}=\left\langle t+1 \quad 0 \quad t-1\right\rangle \tag{15}$$

Et donc :

$$\boldsymbol{C}\,.\,\boldsymbol{n}_{G}=2\left\langle\left(K+\frac{G}{3}\right)t+G \quad \left(K-\frac{2}{3}G\right)t \quad \left(K+\frac{G}{3}\right)t-G\right\rangle \tag{16}$$

Que l'on introduit dans l'équation (**13**), qui devient :

$$4\,d\,\lambda\left[G+\left(K+\frac{G}{3}\right)t\,s\right]=\sigma_{1}^{e}-\sigma_{3}^{e}+\left(\sigma_{1}^{e}+\sigma_{3}^{e}\right)s-2c\cos\varphi \tag{17}$$

D'où on déduit le multiplicateur plastique :

$$d\,\lambda=\frac{\left\langle F_{13}\left(\boldsymbol{\sigma}^{e}\right)\right\rangle_{+}}{4\left[G+\left(K+\frac{G}{3}\right)t\,s\right]} \tag{18}$$

Où $\langle\rangle_{+}$ désigne la partie positive d'une grandeur. On obtient finalement :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1^+\\ \sigma_2^+\\ \sigma_3^+\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1^e\\ \sigma_2^e\\ \sigma_3^e\end{Bmatrix}-\frac{\left\langle F_{13}\left(\boldsymbol{\sigma}^e\right)\right\rangle_+}{2G+2\left(K+\frac{G}{3}\right)ts}\begin{Bmatrix}\left(K+\frac{G}{3}\right)t+G\\ \left(K-\frac{2}{3}G\right)t\\ \left(K+\frac{G}{3}\right)t-G\end{Bmatrix} \quad (19)$$

Si on décompose le taux de déformation plastique en une partie déviatorique $d\varepsilon_v^p=trace\left(d\boldsymbol{\varepsilon}^p\right)$ et une partie sphérique $d\boldsymbol{e}^p=d\boldsymbol{\varepsilon}^p-\frac{d\varepsilon_v^p}{3}\mathbf{1}$, on a :

$$\begin{cases}d\varepsilon_v^p=2t\,d\lambda\\ d\boldsymbol{e}^p=d\lambda\left\langle\frac{t}{3}+1 \quad \frac{-2t}{3} \quad \frac{t}{3}-1\right\rangle\end{cases} \quad (20)$$

Soit l'expression suivante de l'incrément de déformation équivalente :

$$de^p=d\lambda\sqrt{t^2+3} \quad (21)$$

## 3.2 Cas où deux mécanismes sont actifs

### 3.2.1 Formulation de la solution

On vérifie que $\sigma^+$ obtenue à partir de l'étape précédente (**19**) vérifie toujours :

$$\sigma_1^+\geq\sigma_2^+\geq\sigma_3^+ \quad (22)$$

Si ce n'est pas le cas, alors il convient d'activer deux mécanismes de la façon suivante :

$$\begin{cases}\sigma_2^+\geq\sigma_1^+\geq\sigma_3^+ \quad \Rightarrow \quad F_{13}\,et\,F_{23}\ \ actifs \quad [\,\mathbf{LEFT}\,]\\ \sigma_1^+\geq\sigma_3^+\geq\sigma_2^+ \quad \Rightarrow \quad F_{13}\,et\,F_{12}\ \ actifs \quad [\mathbf{RIGHT}]\end{cases} \quad (23)$$

La définition des mécanismes `LEFT` et `RIGHT` est purement conventionnelle, et obéit à la logique géométrique représentée dans la **figure 3.2.1-1**.

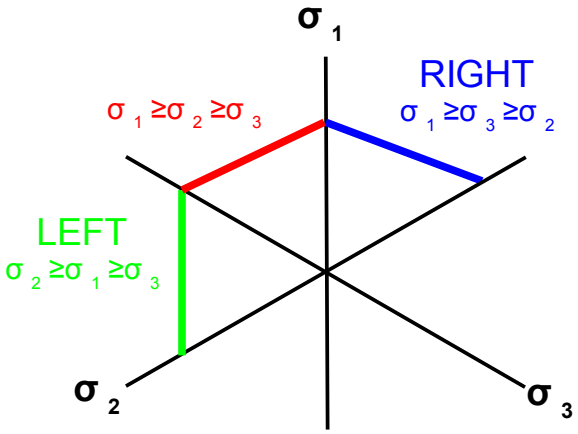



**Figure 3.2.1-1: Définition des mécanismes `LEFT` et `RIGHT`**



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On a les expressions suivantes pour les normales :

$$\boldsymbol{n}_G^{13}=\langle t+1 \quad 0 \quad t-1\rangle \quad \boldsymbol{n}_G^{12}=\langle t+1 \quad t-1 \quad 0\rangle \quad \boldsymbol{n}_G^{23}=\langle 0 \quad t+1 \quad t-1\rangle \tag{24}$$

Donc :

$$\begin{cases} \boldsymbol{C}.\boldsymbol{n}_G^{13}=2\left\langle \left(K+\frac{G}{3}\right)t+G \quad \left(K-\frac{2}{3}G\right)t \quad \left(K+\frac{G}{3}\right)t-G \right\rangle \\ \boldsymbol{C}.\boldsymbol{n}_G^{12}=2\left\langle \left(K+\frac{G}{3}\right)t+G \quad \left(K+\frac{G}{3}\right)t-G \quad \left(K-\frac{2}{3}G\right)t \right\rangle \\ \boldsymbol{C}.\boldsymbol{n}_G^{23}=2\left\langle \left(K-\frac{2}{3}G\right)t \quad \left(K+\frac{G}{3}\right)t+G \quad \left(K+\frac{G}{3}\right)t-G \right\rangle \end{cases} \tag{25}$$

On introduit ces expressions dans l'équation (**13**). Pour le mécanisme `LEFT`, on obtient le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} 4\,d\lambda^{13}\left[G+\left(K+\frac{G}{3}\right)t\,s\right]+2\,d\lambda^{23}\left[G(1-t-s)+\left(2\mathrm{K}-\frac{G}{3}\right)t\,s\right]=F_{13}(\boldsymbol{\sigma}^e) \\ 2\,d\lambda^{13}\left[G(1-t-s)+\left(2\mathrm{K}-\frac{G}{3}\right)t\,s\right]+4\,d\lambda^{23}\left[G+\left(K+\frac{G}{3}\right)t\,s\right]=F_{23}(\boldsymbol{\sigma}^e) \end{cases} \tag{26}$$

Pour le mécanisme `RIGHT`, on obtient :

$$\begin{cases} 4\,d\lambda^{13}\left[G+\left(K+\frac{G}{3}\right)t\,s\right]+2\,d\lambda^{12}\left[G(1+t+s)+\left(2\mathrm{K}-\frac{G}{3}\right)t\,s\right]=F_{13}(\boldsymbol{\sigma}^e) \\ 2\,d\lambda^{13}\left[G(1+t+s)+\left(2\mathrm{K}-\frac{G}{3}\right)t\,s\right]+4\,d\lambda^{12}\left[G+\left(K+\frac{G}{3}\right)t\,s\right]=F_{12}(\boldsymbol{\sigma}^e) \end{cases} \tag{27}$$

Pour la mise en œuvre algorithmique, il est plus agréable de réécrire (**26**) et (27) comme suit :

$$\begin{cases} A\,d\lambda^1+B^{side}\,d\lambda^2=F_1(\boldsymbol{\sigma}^e) \\ B^{side}\,d\lambda^1+A\,d\lambda^2=F_2(\boldsymbol{\sigma}^e) \end{cases} \tag{28}$$

Avec les multiplicateurs plastiques suivants :

$$d\lambda^1=d\lambda^{13} \text{ et } d\lambda^2=\begin{cases} d\lambda^{23} & [\textbf{ LEFT }] \\ d\lambda^{12} & [\textbf{RIGHT}] \end{cases} \tag{29}$$

Pour les surfaces de charge :

$$F_1=F_{13} \text{ et } F_2=\begin{cases} F_{23} & [\textbf{ LEFT }] \\ F_{12} & [\textbf{RIGHT}] \end{cases} \tag{30}$$

L'expression de $A$ :

$$A=4\left[G+\left(K+\frac{G}{3}\right)t\,s\right] \tag{31}$$

Et l'expression de $B^{side}$ :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$B^{side}=\begin{cases}2\left[G\left(1-t-s\right)+\left(2\mathrm{K}-\dfrac{G}{3}\right)t\,s\right] & [\ \mathbf{LEFT}\ ]\\ 2\left[G\left(1+t+s\right)+\left(2\mathrm{K}-\dfrac{G}{3}\right)t\,s\right] & [\mathbf{RIGHT}]\end{cases} \tag{32}$$

La solution du système d'équations (**32**) existe si et seulement si son déterminant est non nul, soit :

$$det=\begin{vmatrix}A & B^{side}\\ B^{side} & A\end{vmatrix}=A^2-\left(B^{side}\right)^2\neq 0 \tag{33}$$

On peut montrer que cela n'arrive jamais pour des valeurs « physiques » des paramètres $K$ , $G$ , $\varphi$ et $\psi$ . On a alors comme solutions :

$$\begin{cases}d\,\lambda^1=\dfrac{A\,F_1\left(\boldsymbol{\sigma}^e\right)-B^{side}\,F_2\left(\boldsymbol{\sigma}^e\right)}{det}\\ d\,\lambda^2=\dfrac{A\,F_2\left(\boldsymbol{\sigma}^e\right)-B^{side}\,F_1\left(\boldsymbol{\sigma}^e\right)}{det}\end{cases} \tag{34}$$

Pour le mécanisme `LEFT`, on obtient finalement :

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1^+\\ \sigma_2^+\\ \sigma_3^+\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1^e\\ \sigma_2^e\\ \sigma_3^e\end{Bmatrix}-2\,d\,\lambda^{13}\begin{Bmatrix}\left(K+\dfrac{G}{3}\right)t+G\\ \left(K-\dfrac{2}{3}G\right)t\\ \left(K+\dfrac{G}{3}\right)t-G\end{Bmatrix}-2\,d\,\lambda^{23}\begin{Bmatrix}\left(K-\dfrac{2}{3}G\right)t\\ \left(K+\dfrac{G}{3}\right)t+G\\ \left(K+\dfrac{G}{3}\right)t-G\end{Bmatrix} \tag{35}$$

Et pour le mécanisme `RIGHT` :

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1^+\\ \sigma_2^+\\ \sigma_3^+\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1^e\\ \sigma_2^e\\ \sigma_3^e\end{Bmatrix}-2\,d\,\lambda^{13}\begin{Bmatrix}\left(K+\dfrac{G}{3}\right)t+G\\ \left(K-\dfrac{2}{3}G\right)t\\ \left(K+\dfrac{G}{3}\right)t-G\end{Bmatrix}-2\,d\,\lambda^{12}\begin{Bmatrix}\left(K+\dfrac{G}{3}\right)t+G\\ \left(K+\dfrac{G}{3}\right)t-G\\ \left(K-\dfrac{2}{3}G\right)t\end{Bmatrix} \tag{36}$$

Ou encore, en simplifiant l'écriture :

$$\boldsymbol{\sigma}^+=\boldsymbol{\sigma}^e-2\,d\,\lambda^1\,\boldsymbol{v}_t^1-2\,d\,\lambda^2\,\boldsymbol{v}_t^2 \tag{37}$$

Avec les multiplicateurs plastiques suivants :

$$d\,\lambda^1=d\,\lambda^{13}\ \text{ et }\ d\,\lambda^2=\begin{cases}d\,\lambda^{23} & [\ \mathbf{LEFT}\ ]\\ d\,\lambda^{12} & [\mathbf{RIGHT}]\end{cases} \tag{38}$$

Et les vecteurs :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{v}_t^1=\begin{Bmatrix}\left(K+\frac{G}{3}\right)t+G\\ \left(K-\frac{2}{3}G\right)t\\ \left(K+\frac{G}{3}\right)t-G\end{Bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{v}_t^2=\begin{Bmatrix}\left(K-\frac{2}{3}G\right)t & \left(K+\frac{G}{3}\right)t+G & \left(K+\frac{G}{3}\right)t-G & [\textbf{LEFT}]\\ \left(K+\frac{G}{3}\right)t+G & \left(K+\frac{G}{3}\right)t-G & \left(K-\frac{2}{3}G\right)t & [\textbf{RIGHT}]\end{Bmatrix} \quad (39)$$

De la même façon, le taux de déformation plastique s'écrit :

$$\begin{cases} d\,\varepsilon_v^p=2\mathrm{t}\left(d\,\lambda^1+d\,\lambda^2\right)\\ d\,\boldsymbol{e}^p=d\,\lambda^1\left(\frac{t}{3}+1 \quad \frac{-2\mathrm{t}}{3} \quad \frac{t}{3}-1\right)+d\,\lambda^2\begin{cases}\left(\frac{-2\mathrm{t}}{3} \quad \frac{t}{3}+1 \quad \frac{t}{3}-1\right) & [\textbf{LEFT}]\\ \left(\frac{t}{3}+1 \quad \frac{t}{3}-1 \quad \frac{-2\mathrm{t}}{3}\right) & [\textbf{RIGHT}]\end{cases}\end{cases} \quad (40)$$

Soit l'expression suivante de l'incrément de déformation équivalente :

$$d\,e^p=\sqrt{\left(\left(d\,\lambda^1\right)^2+\left(d\,\lambda^2\right)^2\right)\left(t^2+3\right)+\left(-t^2+sign\times 6t+3\right)d\,\lambda^1 d\,\lambda^2} \quad (41)$$

Avec $sign=\begin{cases}-1 & [\textbf{LEFT}]\\ +1 & [\textbf{RIGHT}]\end{cases}$.

### 3.2.2 Choix du deuxième mécanisme

On propose un critère simple et purement géométrique pour déterminer à coup sûr si le deuxième mécanisme, au cas où il serait activé, se trouve à gauche (LEFT) ou à droite (RIGHT). On définit le vecteur $\boldsymbol{t}_G$ perpendiculaire à la direction d'écoulement comme représenté dans la figure 3.2.2-1, de la manière suivante :

$$\begin{Bmatrix}t-1\\ -2\\ t+1\end{Bmatrix}=\boldsymbol{t}_G\perp\boldsymbol{n}_G=\boldsymbol{n}_G^{13}=\begin{Bmatrix}t+1\\ 0\\ t-1\end{Bmatrix} \quad (42)$$

La droite passant par $0$ et parallèle à $\boldsymbol{n}_G$, représentée en pointillés, caractérise les états de contraintes tels que $\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{t}_G=0$. On a donc le choix suivant :

- Si $\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{t}_G>0$ et qu'un deuxième mécanisme doit être actif, ce mécanisme est nécessairement situé à droite, soit le mécanisme RIGHT;
- Si $\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{t}_G<0$ et qu'un deuxième mécanisme doit être actif, ce mécanisme est nécessairement situé à gauche, soit le mécanisme LEFT;


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

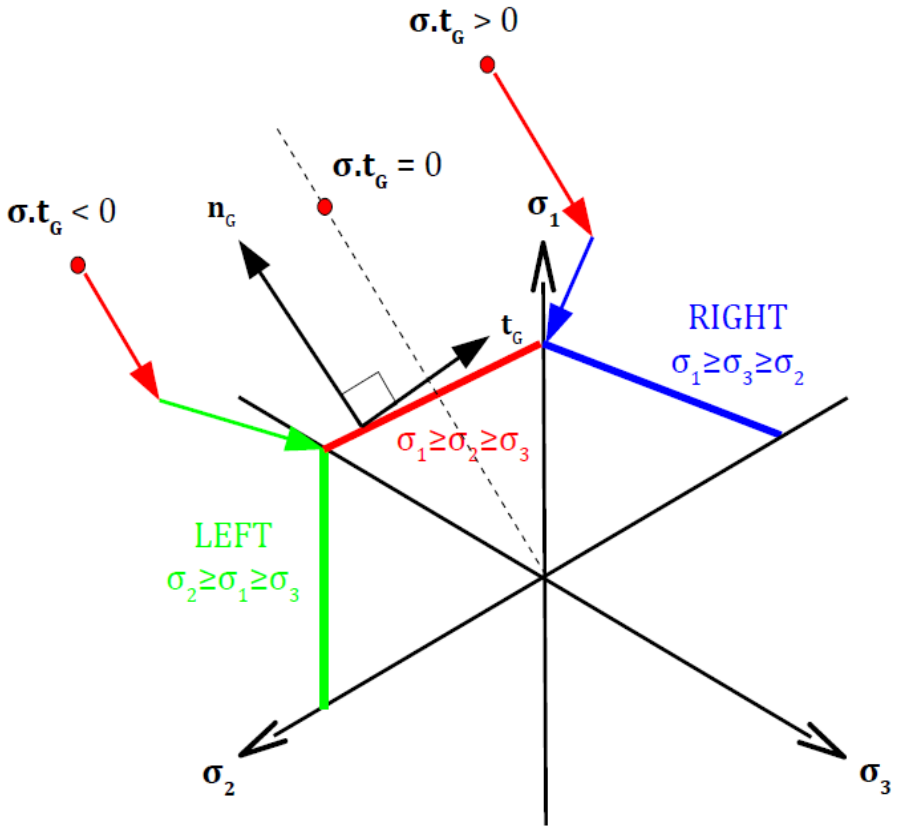



**Figure 3.2.2-1: Critère de sélection des mécanismes LEFT et RIGHT**

## 3.3 Cas de la projection au sommet du cône

On vérifie que $\sigma^+$ obtenue à partir de l'étape précédente (35) ou (36) vérifie toujours :

$$\sigma_1^+ \geq \sigma_2^+ \geq \sigma_3^+ \tag{43}$$

Si ce n'est pas le cas, alors il convient d'effectuer une projection au sommet du cône d'équation :

$$p_c = c \cot \varphi \tag{44}$$

On impose donc :

$$\begin{cases} p^+ = p^e - K\, d\,\varepsilon_v^p := c \cot \varphi \\ \boldsymbol{\sigma}^+ := p^+ \mathbf{1} \end{cases} \tag{45}$$

De la même façon, le taux de déformation plastique s'écrit :

$$d\,\boldsymbol{\varepsilon}^P = d\lambda^1 \boldsymbol{n}_G^{13} + d\lambda^2 \boldsymbol{n}_G^{12} + d\lambda^3 \boldsymbol{n}_G^{23} \tag{46}$$

Soit :

$$\begin{cases} d\,\varepsilon_v^p = 2t\left(d\lambda^1 + d\lambda^2 + d\lambda^3\right) = \dfrac{1}{K}\left(p^e - c\cot\varphi\right) \\ d\,\boldsymbol{e}^p = d\lambda^1 \begin{pmatrix} \frac{t}{3}+1 & \frac{-2t}{3} & \frac{t}{3}-1 \end{pmatrix} + d\lambda^2 \begin{pmatrix} \frac{t}{3}+1 & \frac{t}{3}-1 & \frac{-2t}{3} \end{pmatrix} + d\lambda^3 \begin{pmatrix} \frac{-2t}{3} & \frac{t}{3}+1 & \frac{t}{3}-1 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{47}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

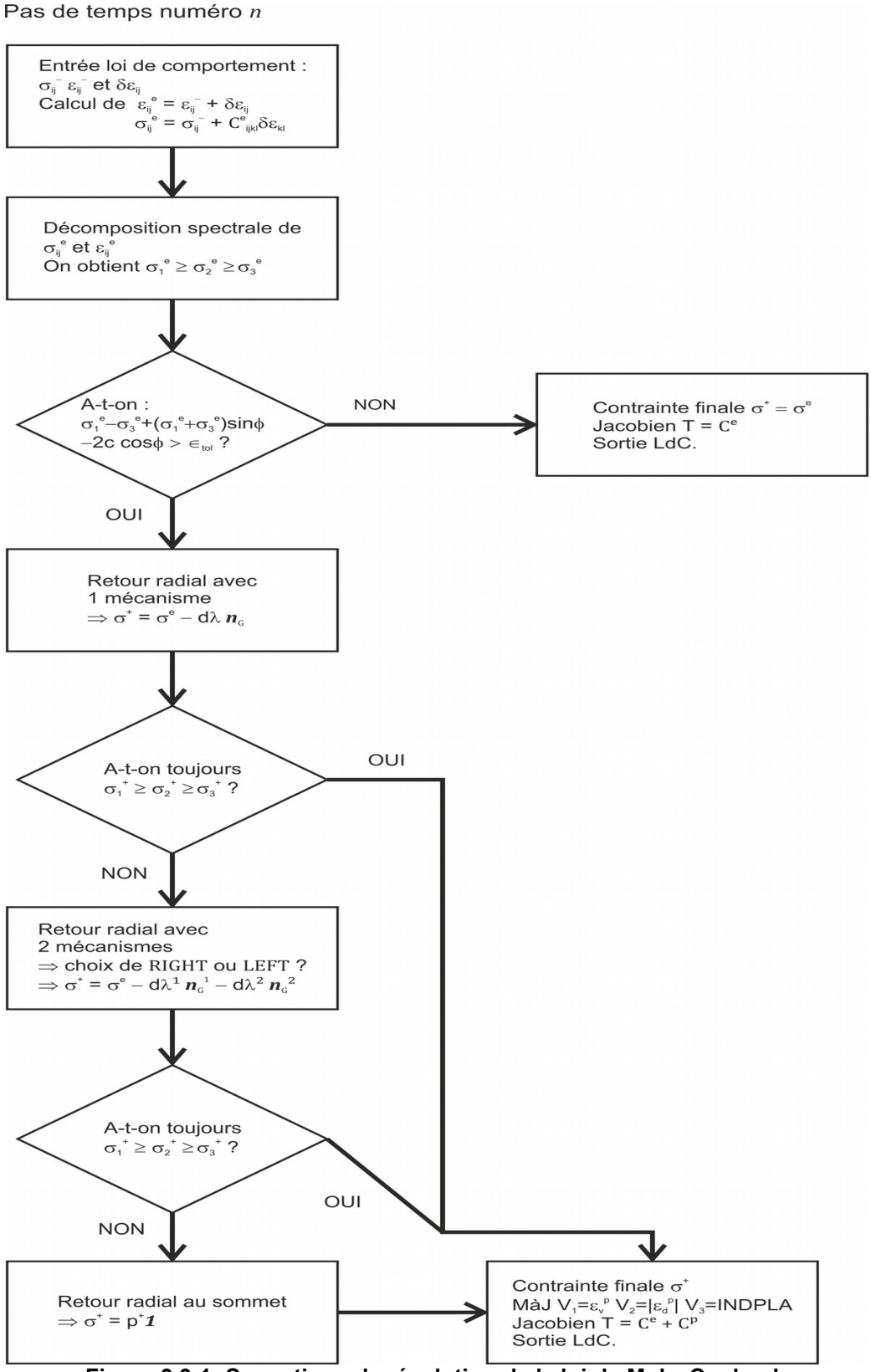



**Figure 3.3-1: Synoptique de résolution de la loi de Mohr-Coulomb**



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 4 Expression de la matrice tangente consistante dans la base principale

## 4.1 Cas où un seul mécanisme est actif

La matrice tangente cohérente $\boldsymbol{T}$ dans la base principale est obtenue en dérivant l'équation (**19**), ce qui donne :

$$d\,\boldsymbol{\sigma}^{+}=\boldsymbol{C}\,.\,d\,\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{2\,d\,F_{13}\left(\boldsymbol{\sigma}^{e}\right)}{A}\begin{Bmatrix}\left(K+\frac{G}{3}\right)t+G\\ \left(K-\frac{2}{3}G\right)t\\ \left(K+\frac{G}{3}\right)t-G\end{Bmatrix}=\boldsymbol{C}\,.\,d\,\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{2\,d\,F_{13}\left(\boldsymbol{\sigma}^{e}\right)}{A}\boldsymbol{v}_{t} \tag{48}$$

Sachant que :

$$d\,F_{13}\left(\boldsymbol{\sigma}^{e}\right)=d\,\sigma_{1}^{e}-d\,\sigma_{3}^{e}+\left(d\,\sigma_{1}^{e}+d\,\sigma_{3}^{e}\right)s=2\begin{Bmatrix}\left(K+\frac{G}{3}\right)s+G\\ \left(K-\frac{2}{3}G\right)s\\ \left(K+\frac{G}{3}\right)s-G\end{Bmatrix}.\,d\,\boldsymbol{\varepsilon}=2\,\boldsymbol{v}_{s}\,.\,d\,\boldsymbol{\varepsilon} \tag{49}$$

On obtient :

$$d\,\boldsymbol{\sigma}^{+}=\underbrace{\left(\boldsymbol{C}-\frac{4}{A}\underbrace{\boldsymbol{v}_{t}\otimes\boldsymbol{v}_{s}}_{\boldsymbol{D}}\right)}_{\boldsymbol{T}}.\,d\,\boldsymbol{\varepsilon} \tag{50}$$

Où $A$ est donné par l'équation (**22**).

## 4.2 Cas où deux mécanismes sont actifs

De la même façon, la matrice tangente cohérente $\boldsymbol{T}$ est obtenue en dérivant les équations (34) et (38), ce qui donne :

$$d\,\boldsymbol{\sigma}^{+}=\underbrace{\left(\boldsymbol{C}-\frac{4}{det}\underbrace{\left(\boldsymbol{v}_{t}^{1}\otimes\boldsymbol{v}_{s}^{1}+\boldsymbol{v}_{t}^{2}\otimes\boldsymbol{v}_{s}^{2}-\frac{B^{side}}{A}\left(\boldsymbol{v}_{t}^{1}\otimes\boldsymbol{v}_{s}^{2}+\boldsymbol{v}_{t}^{2}\otimes\boldsymbol{v}_{s}^{1}\right)\right)}_{\boldsymbol{D}}\right)}_{\boldsymbol{T}}.\,d\,\boldsymbol{\varepsilon} \tag{51}$$

Où $A$ est donné par l'équation (31), $B^{side}$ par (32), $det$ par (33) et $\boldsymbol{v}$ par (39).

## 4.3 Cas de la projection au sommet du cône

D'après l'équation (**45**), on a trivialement $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0}$ .



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 5 Expression de la matrice tangente consistante dans la base globale

Le paragraphe **§4** permet de construire la matrice tangente consistante dans la base principale, notée $\boldsymbol{T}$ . Il convient désormais de ramener cette matrice dans la base globale (cartésienne), que l'on notera $\bar{\boldsymbol{T}}$ .

**Remarque importante :**

Il est à noter que la construction de cette matrice tangente consistante est une étape cruciale à la fois pour la robustesse et la performance de l'algorithme :

- Premièrement, il est parfaitement connu qu'une telle matrice permet un taux de convergence quadratique pour le processus de Newton ;
- Deuxièmement, cette matrice rend compte de la rotation des directions principales au cours d'un incrément. Sans elle, la formulation de la loi de Mohr-Coulomb en termes de contraintes principales décrite au paragraphe **§2** ne serait pas complète, puisque les contraintes principales, maintenues fixes au cours de l'intégration locale de la loi (**§3**), ne pourraient pas tourner au niveau global de la structure.

Dans ce paragraphe, on décrit en détail la méthode permettant de construire $\bar{\boldsymbol{T}}$ à partir de $\boldsymbol{T}$ .

## 5.1 Quelques résultats sur les tenseurs symétriques isotropes d'ordre deux

On définit par $S^3$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux dans l'espace vectoriel de dimension $n=3$ , et les tenseurs $\boldsymbol{Y}\in S^3$ et $\boldsymbol{X}\in S^3$ tels que :

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}):S^3\rightarrow S^3 \tag{52}$$

La fonction tensorielle $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})$ est dite isotrope si :

$$\boldsymbol{R}.\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}).\boldsymbol{R}^t=\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{R}.\boldsymbol{X}.\boldsymbol{R}^t) \tag{53}$$

Quelle que soit la rotation $\boldsymbol{R}$ . L'hypothèse d'isotropie implique que $\boldsymbol{Y}$ et $\boldsymbol{X}$ sont coaxiaux, c'est-à-dire qu'ils possèdent les mêmes directions principales $\boldsymbol{d}_{\alpha=1,2,3}$ . On note :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\sum_{\alpha=1}^{3}x_\alpha\underbrace{(\boldsymbol{d}_\alpha\otimes\boldsymbol{d}_\alpha)}_{\boldsymbol{E}_\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{3}x_\alpha\boldsymbol{E}_\alpha\\ \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})&=\sum_{\alpha=1}^{3}y_\alpha(\boldsymbol{d}_\alpha\otimes\boldsymbol{d}_\alpha)=\sum_{\alpha=1}^{3}y_\alpha\boldsymbol{E}_\alpha\end{aligned} \tag{54}$$

Où $y_\alpha=y_\alpha(x_1,x_2,x_3)$ et $x_\alpha$ représentent les valeurs propres de $\boldsymbol{Y}$ et $\boldsymbol{X}$ , respectivement.

## 5.2 Dérivée d'une fonction tensorielle isotrope d'ordre deux

On suppose que la fonction tensorielle isotrope $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})$ est différentiable par rapport à $\boldsymbol{X}$ , et on définit sa dérivée $\boldsymbol{D}$ telle que :

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})\overset{\text{def}}{=}\frac{d\,\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})}{d\,\boldsymbol{X}} \tag{55}$$

Appliquée à l'équation (**41**), on obtient l'expression suivante :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})=\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\boldsymbol{E}_{\alpha}\otimes\frac{d\,y_{\alpha}}{d\,\boldsymbol{X}}+y_{\alpha}\frac{d\,\boldsymbol{E}_{\alpha}}{d\,\boldsymbol{X}}\right)=\sum_{\alpha=1}^{3}\left(y_{\alpha}\frac{d\,\boldsymbol{E}_{\alpha}}{d\,\boldsymbol{X}}+\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial\,y_{\alpha}}{\partial\,x_{\beta}}\boldsymbol{E}_{\alpha}\otimes\frac{d\,x_{\beta}}{d\,\boldsymbol{X}}\right) \tag{56}$$

### 5.2.1 Cas bidimensionnel de type contraintes planes (C_PLAN)

En dimension deux (cas C_PLAN), l'équation caractéristique $det(\boldsymbol{X}-x_{\alpha}\boldsymbol{I})=0$ donne une équation quadratique des valeurs propres $x_{\alpha=1,2}$ de $\boldsymbol{X}$ du type suivant :

$$x_{\alpha}^{2}-I_{1}x_{\alpha}+I_{2}=0 \text{ avec } \alpha=1,2 \tag{57}$$

Avec :

$$\begin{cases}I_{1}=trace(\boldsymbol{X})=X_{11}+X_{22}\\ I_{2}=det(\boldsymbol{X})=X_{11}X_{22}-X_{12}X_{21}\end{cases} \tag{58}$$

La résolution du problème spectral donne aisément les solutions suivantes pour les valeurs propres :

$$\begin{cases}x_{1}=\dfrac{I_{1}+\sqrt{I_{1}^{2}-4\,I_{2}}}{2}\\ x_{2}=\dfrac{I_{1}-\sqrt{I_{1}^{2}-4\,I_{2}}}{2}\end{cases} \tag{59}$$

Et les vecteurs propres, tenant compte de la multiplicité des valeurs propres :

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_{\alpha}=\dfrac{\boldsymbol{X}+(x_{\alpha}-I_{1})\boldsymbol{I}}{2\,x_{\alpha}-I_{1}} & si\quad x_{1}\neq x_{2}\\ \boldsymbol{E}_{1}=\boldsymbol{I} & si\quad x_{1}=x_{2}\end{cases} \tag{60}$$

En particulier, Carlson et Hoger montrent que si $x_{1}\neq x_{2}$ , on a :

$$\frac{d\,x_{\alpha}}{d\,\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{E}_{\alpha} \tag{61}$$

En utilisant les équations (**59**), (**60**) et (**61**) dans (**56**), on obtient l'expression de la dérivée $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$ , tenant compte de la multiplicité des valeurs propres :

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})=\begin{cases}\dfrac{y_{1}-y_{2}}{x_{1}-x_{2}}\left[\boldsymbol{I}_{S}-\boldsymbol{E}_{1}\otimes\boldsymbol{E}_{1}-\boldsymbol{E}_{2}\otimes\boldsymbol{E}_{2}\right]+\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}\dfrac{\partial\,y_{\alpha}}{\partial\,x_{\beta}}\boldsymbol{E}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{E}_{\beta} & si\quad x_{1}\neq x_{2}\\ \left(\dfrac{\partial\,y_{1}}{\partial\,x_{1}}-\dfrac{\partial\,y_{1}}{\partial\,x_{2}}\right)\boldsymbol{I}_{S}+\dfrac{\partial\,y_{1}}{\partial\,x_{2}}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} & si\quad x_{1}=x_{2}\end{cases} \tag{62}$$

Avec la matrice identité $\boldsymbol{I}$ :

$$(\boldsymbol{I})_{ijkl}=\delta_{ik}\delta_{jl} \tag{63}$$

La matrice de transposition $(\boldsymbol{I}_{t})_{ijkl}=\delta_{il}\delta_{jk}$ et la matrice de symétrisation $\boldsymbol{I}_{S}$ , telles que :

$$(\boldsymbol{I}_{S})_{ijkl}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{I}_{t})=\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{64}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

**Remarque :**

On remarque que le terme $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\left[\boldsymbol{I}_S-\boldsymbol{E}_1\otimes\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2\otimes\boldsymbol{E}_2\right]$ dans la dérivée $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$ de la première équation de (**62**) exprime la rotation des directions principales dans le plan.

### 5.2.2 Cas bidimensionnel de type déformations planes (D_PLAN) et axisymétrique (AXIS)

La direction hors-plan $\alpha=3$ étant fixe, l'expression de la dérivée $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$ s'obtient à partir du cas précédant. En effet, en isolant le terme $\alpha=3$ dans l'équation (**56**), on a l'expression suivante :

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})=\underbrace{\sum_{\alpha=1}^{2}\left(y_\alpha\frac{d\,\boldsymbol{E}_\alpha}{d\,\boldsymbol{X}}+\sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial\,y_\alpha}{\partial\,x_\beta}\boldsymbol{E}_\alpha\otimes\frac{d\,x_\beta}{d\,\boldsymbol{X}}\right)}_{\boldsymbol{D}_{2D}(\boldsymbol{X})}+\underbrace{\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial\,y_\alpha}{\partial\,x_3}\boldsymbol{E}_\alpha\otimes\frac{d\,x_3}{d\,\boldsymbol{X}}+\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial\,y_3}{\partial\,x_\beta}\boldsymbol{E}_3\otimes\frac{d\,x_\beta}{d\,\boldsymbol{X}}}_{\boldsymbol{D}_3(\boldsymbol{X})} \tag{65}$$

Où $\boldsymbol{D}_{2D}(\boldsymbol{X})$ est donnée par l'équation (**56**). Le terme complémentaire $\boldsymbol{D}_3(\boldsymbol{X})$ s'écrit, en tenant compte de la multiplicité des valeurs propres, de la façon suivante :

$$\boldsymbol{D}_3(\boldsymbol{X})=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial\,y_\alpha}{\partial\,x_3}\boldsymbol{E}_\alpha\otimes\boldsymbol{E}_3+\frac{\partial\,y_3}{\partial\,x_\alpha}\boldsymbol{E}_3\otimes\boldsymbol{E}_\alpha\right)+\frac{\partial\,y_3}{\partial\,x_3}\boldsymbol{E}_3\otimes\boldsymbol{E}_3 & si\quad x_1\neq x_2\\ \dfrac{\partial\,y_1}{\partial\,x_3}\boldsymbol{I}_p\otimes\boldsymbol{E}_3+\dfrac{\partial\,y_3}{\partial\,x_1}\boldsymbol{E}_3\otimes\boldsymbol{I}_p+\dfrac{\partial\,y_3}{\partial\,x_3}\boldsymbol{E}_3\otimes\boldsymbol{E}_3 & si\quad x_1=x_2\end{cases} \tag{66}$$

Où $\boldsymbol{I}_p$ est la matrice de la projection orthogonale de $\boldsymbol{I}_S$ dans le plan $(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)$ :

$$\boldsymbol{I}_p=\begin{cases}\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) & \text{si } i,j,k,l\in\{1,2\}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{67}$$

### 5.2.3 Cas tridimensionnel

En dimension trois, l'équation caractéristique $det(\boldsymbol{X}-x_\alpha\boldsymbol{I})=0$ donne une équation cubique des valeurs propres $x_{\alpha=1,2,3}$ de $\boldsymbol{X}$ du type suivant :

$$x_\alpha^3-I_1x_\alpha^2+I_2x_\alpha-I_3=0 \text{ avec } \alpha=1,2,3 \tag{68}$$

Avec :

$$\begin{cases}I_1=trace(\boldsymbol{X})\\ I_2=\frac{1}{2}\left[trace(\boldsymbol{X})^2-trace(\boldsymbol{X}^2)\right]\\ I_3=det(\boldsymbol{X})\end{cases} \tag{69}$$

La résolution du problème spectral donne aisément les solutions suivantes pour les valeurs propres :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} x_1 = -2\sqrt{Q}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + \frac{I_1}{3} \\ x_2 = -2\sqrt{Q}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3} \\ x_3 = -2\sqrt{Q}\cos\left(\frac{\theta-2\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3} \end{cases} \quad (70)$$

Où $Q$ et $\theta$ sont donnés par :

$$Q = \frac{I_1^2 - 3I_2}{9} \text{ et } \theta = \cos^{-1}\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right) \quad (71)$$

Avec :

$$R = \frac{-2I_1^3 + 9I_1 I_2 - 27 I_3}{54} \quad (72)$$

Et les vecteurs propres, en tenant compte de la multiplicité des valeurs propres :

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_\alpha = \frac{x_\alpha}{2x_\alpha^3 - I_1 x_\alpha^2 + I_3}\left[\boldsymbol{X}^2 + (x_\alpha - I_1)\boldsymbol{X} + \frac{I_3}{x_\alpha}\boldsymbol{I}\right] & si \quad x_1 \neq x_2 \neq x_3 \\ \boldsymbol{E}_\beta = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_\alpha & si \quad x_\alpha \neq x_\beta \\ \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{I} & si \quad x_1 = x_2 = x_3 \end{cases} \quad (73)$$

Dans la deuxième équation de (**73**), $\boldsymbol{E}_\alpha$ est calculé à l'aide la première équation. Sans donner les étapes intermédiaires de calcul, la dérivée $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$, en tenant compte de la multiplicité des valeurs propres, s'écrit finalement :

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{y_\alpha}{(x_\alpha - x_\beta)(x_\alpha - x_\gamma)}\left[\frac{d\boldsymbol{X}^2}{d\boldsymbol{X}} - (x_\beta + x_\gamma)\boldsymbol{I}_S \right. \\ \left. -(2x_\alpha - x_\beta - x_\gamma)\boldsymbol{E}_\alpha \otimes \boldsymbol{E}_\alpha - (x_\beta - x_\gamma)(\boldsymbol{E}_\beta \otimes \boldsymbol{E}_\beta - \boldsymbol{E}_\gamma \otimes \boldsymbol{E}_\gamma)\right] & si \quad x_1 \neq x_2 \neq x_3 \\ \quad + \sum_{a=1}^{3}\sum_{b=1}^{3} \frac{\partial y_a}{\partial x_b}\boldsymbol{E}_a \otimes \boldsymbol{E}_b & \\ s_1\frac{d\boldsymbol{X}^2}{d\boldsymbol{X}} - s_2\boldsymbol{I}_S - s_3\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{X} + s_4\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{I} + s_5\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{X} - s_6\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} & si \quad x_\alpha \neq x_\beta = x_\gamma \\ \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{I}_S + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} & si \quad x_1 = x_2 = x_3 \end{cases} \quad (74)$$

Où $(\alpha, \beta, \gamma)$ correspond à une permutation cyclique de $(1,2,3)$. $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{I}_S$ sont donnés par les équations (**63**) et (**64**), respectivement. En remarquant que $\boldsymbol{X}$ est un tenseur symétrique, il faut prendre garde à appliquer l'opérateur de dérivation symétrique pour l'évaluation de $\frac{d\boldsymbol{X}^2}{d\boldsymbol{X}}$, ce qui donne la forme suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\boldsymbol{X}^2}{d\boldsymbol{X}}\right)_{ijkl} &= \frac{d\left(X_{im}X_{mj}\right)}{dX_{kl}} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km}\right)X_{mj} + \frac{X_{im}}{2}\left(\delta_{mk}\delta_{jl} + \delta_{ml}\delta_{kj}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}X_{lj} + \delta_{il}X_{kj} + \delta_{jl}X_{ik} + \delta_{kj}X_{il}\right) \end{aligned} \quad (75)$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Enfin, les expressions de $s_{i=1,6}$ sont les suivantes :

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \frac{y_\alpha - y_\gamma}{(x_\alpha - x_\gamma)^2} + \frac{1}{x_\alpha - x_\gamma}\left(\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta} - \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\gamma}\right) \\
s_2 &= 2\,x_\gamma \frac{y_\alpha - y_\gamma}{(x_\alpha - x_\gamma)^2} + \frac{x_\alpha + x_\gamma}{x_\alpha - x_\gamma}\left(\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta} - \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\gamma}\right) \\
s_3 &= 2\frac{y_\alpha - y_\gamma}{(x_\alpha - x_\gamma)^3} + \frac{1}{(x_\alpha - x_\gamma)^2}\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\gamma}\right) \\
s_4 &= 2\,x_\gamma \frac{y_\alpha - y_\gamma}{(x_\alpha - x_\gamma)^3} + \frac{1}{x_\alpha - x_\gamma}\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta}\right) + \frac{x_\gamma}{(x_\alpha - x_\gamma)^2}\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\gamma}\right) \\
s_5 &= 2\,x_\gamma \frac{y_\alpha - y_\gamma}{(x_\alpha - x_\gamma)^3} + \frac{1}{x_\alpha - x_\gamma}\left(\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta}\right) + \frac{x_\gamma}{(x_\alpha - x_\gamma)^2}\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\gamma}\right) \\
s_6 &= 2\,x_\gamma^2 \frac{y_\alpha - y_\gamma}{(x_\alpha - x_\gamma)^3} + \frac{x_\alpha x_\gamma}{(x_\alpha - x_\gamma)^2}\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha}\right) - \frac{x_\gamma^2}{(x_\alpha - x_\gamma)^2}\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\gamma}\right) - \frac{x_\alpha + x_\gamma}{x_\alpha - x_\gamma}\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta}
\end{aligned}
\tag{76}
$$

Où $(\alpha, \beta, \gamma)$ correspond à une permutation cyclique de $(1, 2, 3)$.

**Remarque :**

On remarque que le terme suivant (tout sauf trivial) :

$$
\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{y_\alpha}{(x_\alpha - x_\beta)(x_\alpha - x_\gamma)}\left[\frac{d\boldsymbol{X}^2}{d\boldsymbol{X}} - (x_\beta + x_\gamma)\boldsymbol{I}_S - (2\,x_\alpha - x_\beta - x_\gamma)\boldsymbol{E}_\alpha \otimes \boldsymbol{E}_\alpha - (x_\beta - x_\gamma)(\boldsymbol{E}_\beta \otimes \boldsymbol{E}_\beta - \boldsymbol{E}_\gamma \otimes \boldsymbol{E}_\gamma)\right] \tag{77}
$$

Qui apparaît dans la dérivée $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$ de la première équation de (**74**) exprime la rotation des directions principales dans l'espace tridimensionnelle.

### 5.2.4 Application au cas de Mohr-Coulomb

La transposition des formules précédentes à la mise en œuvre numérique mérite quelques précisions. On a tout d'abord les correspondances suivantes :

- $\boldsymbol{X} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pred}$ et $x_\alpha = \varepsilon_\alpha^{pred}$ ;
- $\boldsymbol{Y} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{+}$ et $y_\alpha = \sigma_\alpha^{+}$ ;
- $\boldsymbol{E}_\alpha = \tilde{\boldsymbol{d}}_\alpha^{pred} \otimes \tilde{\boldsymbol{d}}_\alpha^{pred}$ ;
- $(\boldsymbol{T})_{\alpha\beta} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}$ est la matrice tangente consistante dans la base principale calculée au paragraphe **§4** ;

La notation $^{pred}$ indique que l'on travaille avec des grandeurs « prédites » données en entrée par le processus de Newton, la notation $^{+}$ avec des grandeurs issues de la résolution locale de la loi de comportement, et la notation $\tilde{}$ avec la base de Voigt. On notera que les directions principales prédites $\tilde{\boldsymbol{d}}_\alpha^{pred}$ sont figées au cours de la résolution locale, ce qui est cohérent avec l'hypothèse d'isotropie adoptée (voir les explications du paragraphe **§5.1**).

Disposant de toutes ces informations à l'issue de la résolution locale de la loi de comportement, on en déduit la matrice tangente consistante $\bar{\boldsymbol{T}} = \bar{\boldsymbol{D}}$ exprimée dans la base de projection $\bar{\boldsymbol{b}}$ définie au paragraphe **§1.2 :**

- L'équation (**62**) dans le cas bidimensionnel en contraintes planes (`C_PLAN`) ;



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- L'équation (**66**) dans le cas bidimensionnel en déformation plane (D_PLAN) ou axisymétrique (AXIS) ;
- L'équation (**74**) dans le cas tridimensionnel (3D) ;

La seconde information importante concerne la convention d'écriture des différents tenseurs. En effet, par souci de généralité, la notation utilisée pour les tenseurs dans tout le paragraphe **§5** est la notation classique, faisant apparaître des tenseurs jusqu'à l'ordre quatre. Cette écriture est impropre à la résolution numérique, où l'on préfère utiliser des notations condensées rendues possibles par le fait que l'on travaille avec des tenseurs symétriques d'ordre deux (contraintes et déformations le sont toujours). On distingue deux formes de notations condensées correspondant à deux bases de projection (voir **§1.2**) :

- La base orthonormée $\bar{b}$ des tenseurs symétriques d'ordre deux. C'est dans cette base que sont données les contraintes et les déformations à l'entrée et à la sortie de la résolution locale du comportement ;
- La base dite de Voigt $\tilde{b}$, beaucoup plus commode à utiliser lors de la résolution numérique locale du comportement car elle évite d'avoir à manipuler des coefficients en $\sqrt{2}$ lors des opérations matricielles ;

Le schéma de résolution est résumé dans la figure 5.2.4-1.

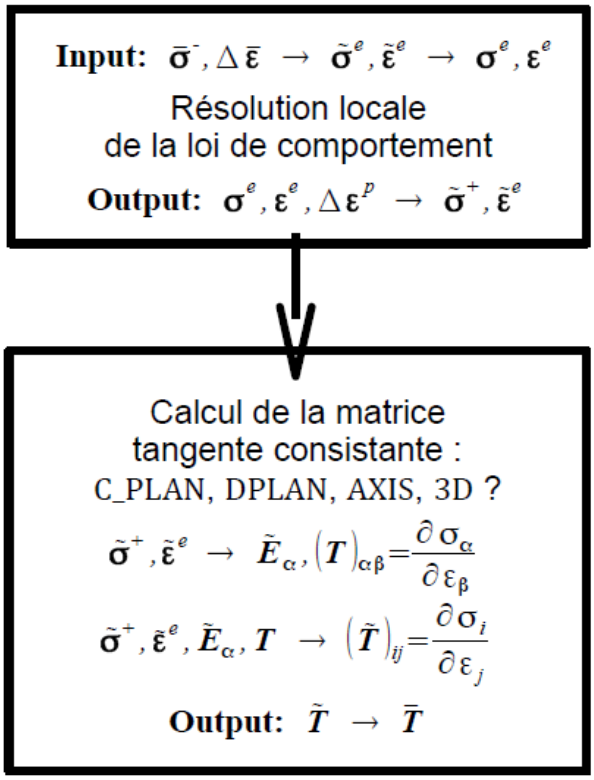



**Figure 5.2.4-1: Processus de résolution de la loi de Mohr-Coulomb. Mise en évidence de l'écriture dans les différentes bases de projection.**



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 6 Bibliographie

[78] **Jiang Hua**, Xie Y. "A note on the Mohr-Coulomb and Drucker-Prager strenght criteria", Mechanics Research Communications, **38**, pp, 309-314, 2011

[79] **Fotios E. Karaoulanis** "Nonsmooth multisurface plasticity in principal stress space", 6th GRACM International Congress on Computational Mechanics, Thessaloniki, 2008

[80] **Pankaj**, Bićanić N. "Detection of multiple active yield conditions for Mohr-Coulomb elasto-plasticity", Computers and Structures, **62**, pp, 51-61, 1997

[81] **S. W. Sloan**, Booker J.R. "Removal of singularities in Tresca and Mohr-Coulomb yield functions", Communications in Applied Numerical Methods, **2**, pp, 173-179, 1986

[82] **Ronaldo I. Borja**, Sama K.M., Sanz P.F. "On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **192**, pp, 1227-1258, 2003

[83] **X. Wang**, Wang L.B., Xu L.M. "Formulation of the return mapping algorithm for elastoplastic soil models", Computers and Geotechnics, **31**, pp, 315-338, 2004



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)