Loi de comportement viscoplastique LETK

Résumé :

La loi L&K décrit un comportement élasto-visco-plastique des roches. L'élastoplasticité se caractérise par un écrouissage positif en pré-pic et un comportement adoucissant au delà du de résistance. La viscoplasticité traduit l'effet du temps sur le comportement. Elle est décrite par une loi en puissance de Perzyna.

L'initiation des phénomènes élastoplastique ou viscoplastique se déclenche dès le franchissement du seuil correspondant. Le comportement lié à chaque phase est décrit par l'évolution de ces différents seuils. Cette évolution est régie par des fonctions d'écrouissage plastique ou viscoplastique.

Pour le mécanisme élastoplastique, une surface de charge évolue à travers différents seuils :

- Un seuil d'endommagement confondu avec le seuil de viscosité initiale,
- Un seuil macroscopique de pic, défini à partir des essais de laboratoire,
- Un seuil intermédiaire, qualifié de limite de clivage, déterminé analytiquement,
- Un seuil caractéristique défini comme l'enveloppe du seuil d'endommagement et de la limite de clivage, appelé également limite de contractance/dilatance (cette limite est confondue avec le seuil de viscoplasticité maximale),
- Un seuil de résistance résiduelle.

Pour le mécanisme visqueux, une surface viscoplastique évolue à travers :

- Un seuil initial confondu avec le seuil d'endommagement
- Un seuil de viscosité maximal considéré confondu avec la limite de contractane/dilatance

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Notations....3
1.1 Généralités....3
1.2 Convention de signes....4
1.3 Paramètres du modèle....5
2 Introduction....7
3 Équations du modèle L&K....7
3.1 Simplification du modèle....7
3.2 Descriptif des mécanismes....9
3.3 Décomposition du tenseur de déformation....9
3.4 Expressions des critères....11
3.5 Fonctions d'écrouissage....12
3.6 Lois de dilatance....13
3.7 Dérivées du critère....15
4 Intégration dans Code_Aster....18
4.1 Variables internes....18
4.2 Schéma d'intégration explicite (SPECIFIQUE)....19
4.3 Schéma d'intégration implicite....27
5 Références....31
6 Fonctionnalités et vérification....31
7 Description des versions du document....31
8 Annexes : Termes de la matrice jacobienne....32

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Notations

1.1 Généralités

σ désigne le tenseur des contraintes effectives en petites perturbations, noté sous la forme du vecteur suivant :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\,\sigma_{12} \\ \sqrt{2}\,\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\,\sigma_{23} \end{pmatrix}$$

On note :

$I_1 = tr(\sigma)$	premier invariant des contraintes
$s = \sigma - \frac{I_1}{3} I$	tenseur des contraintes déviatoires
$s_{II} = \sqrt{s \,.\, s}$	deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoires
σ_{max}	contrainte principale majeure
σ_{min}	contrainte principale mineure
$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{Tr(\varepsilon)}{3} I$	déviateur des déformations
$\varepsilon_V = tr(\varepsilon)$	déformation volumique
$\cos(3\theta) = 2^{1/2}\ 3^{3/2}\ \frac{\det(s)}{s_{II}^3}$	θ étant l'angle de Lode
$\dot{\gamma}_p = \sqrt{\frac{2}{3} \tilde{\dot{\varepsilon}}_{ij}^p \tilde{\dot{\varepsilon}}_{ij}^p}$	déformations déviatoriques plastiques cumulées
$\dot{\gamma}_{vp} = \sqrt{\frac{2}{3} \tilde{\dot{\varepsilon}}_{ij}^{vp} \tilde{\dot{\varepsilon}}_{ij}^{vp}}$	déformations déviatoriques viscoplastiques cumulées
ξ_p	paramètre d'écrouissage plastique
ξ_{vp}	paramètre d'écrouissage viscoplastique
G^{visc}	fonction pilotant l'évolution des déformations visqueuses et décrivant la direction d'écoulement
$\tilde{G} = G - \frac{Tr(G)}{3} I$	déviateur de G
$G = Tr(G)$	trace de G
$\tilde{G}_{II} = \sqrt{\tilde{G} \cdot \tilde{G}}$	norme de $\tilde{G}$
ψ	angle de dilatance
f^d	surface de charge élastoplastique
f^{vp}	surface de charge viscoplastique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.2 Convention de signes

- Dans Code_Aster, la convention de signes est celle de la mécanique des milieux continus :

  En compression : $\sigma<0$; $\varepsilon=\frac{\partial u}{\partial x}<0$

  En traction : $\sigma>0$; $\varepsilon=\frac{\partial u}{\partial x}>0$

- Dans le modèle LETK , la convention de signe est celle de la mécanique des sols :

  En compression : $\sigma>0$
  Contractance : $\varepsilon_v>0$
  En traction : $\sigma<0$
  Dilatance : $\varepsilon_v<0$

Remarque :

Pour intégrer cette loi dans *Code_Aster* telle qu'elle se présente, il faut changer le signe de tous les champs à l'entrée de la routine correspondant à la loi de comportement et à sa sortie.

A l'entrée de la routine :

$\bar{\sigma}_{L\&K}=-\sigma^-$

$\bar{\varepsilon}_{L\&K}=-\varepsilon^-$

$\Delta\varepsilon_{L\&K}=-\Delta\varepsilon$

A la sortie de la routine :

$\sigma=-\sigma_{L\&K}$

$\varepsilon=-\varepsilon_{L\&K}$

$\Delta\varepsilon=-\Delta\varepsilon_{L\&K}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.3 Paramètres du modèle

Notation	Description
P_a	pression atmosphérique
σ_c	résistance en compression simple, intervenant dans l'expression des critères
H_0^{ext}	paramètre pilotant la résistance en extension, intervenant dans l'expression des critères
σ_{point1}	$\sigma_{\min}$ de l'intersection entre les seuils de pic et intermédiaire
x_{ams}	paramètre non nul intervenant dans les lois d'écrouissage pré-pic
η	paramètre non nul intervenant dans les lois d'écrouissage post-pic
a_0	valeur de a sur le seuil d'endommagement
m_0	valeur de m sur le seuil d'endommagement
s_0	valeur de s sur le seuil d'endommagement
a_{pic}	valeur de a sur le seuil de pic
m_{pic}	valeur de m sur le seuil de pic
ξ_{pic}	niveau d'écrouissage nécessaire à ξ_p pour atteindre le seuil de pic
a_e	valeur de a sur le seuil de clivage
m_e	valeur de m sur le seuil de clivage
ξ_e	niveau d'écrouissage nécessaire à ξ_p pour atteindre le seuil de clivage
m_{ult}	valeur de m sur le seuil résiduel
ξ_{ult}	niveau d'écrouissage nécessaire à ξ_p pour atteindre le seuil résiduel
$m_{v-\max}$	valeur de m sur le seuil viscoplastique maximal
$\xi_{v-\max}$	valeur de ξ_v pour laquelle le critère viscoplastique maximal est atteint
A_v	paramètre caractérisant l'amplitude de la vitesse de fluage
n_v	exposant intervenant dans la formule pilotant la cinétique de fluage

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\mu_{0,v}$ paramètre relatif à la dilatance en pré-pic

$\xi_{0,v}$ paramètre relatif à la dilatance en pré-pic

μ_1 paramètre relatif à la dilatance en post pic

ξ_1 paramètre relatif à la dilatance en post-pic

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Introduction

Ce document présente le modèle rhéologique L&K développé au CIH par F. Laigle et A. Kleine. C'est un modèle élasto-visco-plastique dédié aux roches. La spécificité de l'élastoplasticité réside en la modélisation d'un comportement non-linéaire en phase pré-pic et d'un comportement post pic radoucissant. La viscosité caractérise l'effet du temps sur le comportement de la roche. L'initiation de chacun de ces phénomènes se déclenche dès le franchissement d'un seuil. Le comportement lié à chaque phase est décrit par l'évolution de ces différents seuils régie par des fonctions d'écrouissage plastique ou viscoplastique.

3 Équations du modèle L&K

3.1 Simplification du modèle

Afin de décrire au mieux et d'une façon concise cette version du modèle, il est nécessaire de donner un aperçu sur le modèle original. La différence entre les deux versions sera mieux perçue.

3.1.1 Bref aperçu sur les seuils du modèle original

Dans la version originale du modèle L&K tel qu'il est développé sous le logiciel Flac au CIH (cf. R 1) ou la thèse de A. Kleine (cf. R 4), il existe trois mécanismes distincts :
- Un mécanisme élastoplastique pré-pic, régi par un écrouissage positif,
- Un mécanisme viscoplastique régi également par un écrouissage positif,
- Un mécanisme élastoplastique post pic régi par un écrouissage négatif décrivant la fracturation.

La particularité de ce modèle original réside dans le fait que le couplage des deux mécanismes pré pic déclenche la fracturation donc le mécanisme post-pic. En effet, les fissures d'extension induisent une dégradation des propriétés mécaniques des matériaux avec l'accroissement de la dilatance.

Pour le mécanisme élastoplastique, une surface de charge évolue à travers différents seuils. Pour le mécanisme visqueux, une surface viscoplastique évolue d'un seuil initial à un seuil final.

Les différents seuils délimitent des domaines associés à des mécanismes physiques particuliers :
- Un seuil d'endommagement confondu avec le seuil de viscosité initiale,
- Un seuil intermédiaire, qualifié de limite de clivage,
- Un seuil caractéristique défini comme l'enveloppe du seuil d'endommagement et de la limite de clivage, appelé également limite de contractance/dilatance (cette limite est confondue avec le seuil de viscoplasticité maximale),
- Un seuil macroscopique de pic, défini à partir des essais de laboratoire,
- Un seuil intrinsèque purement conceptuel défini comme extrapolation du seuil de pic, (ce seuil est éliminé dans la version simplifiée du modèle),
- Un seuil de résistance résiduelle.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

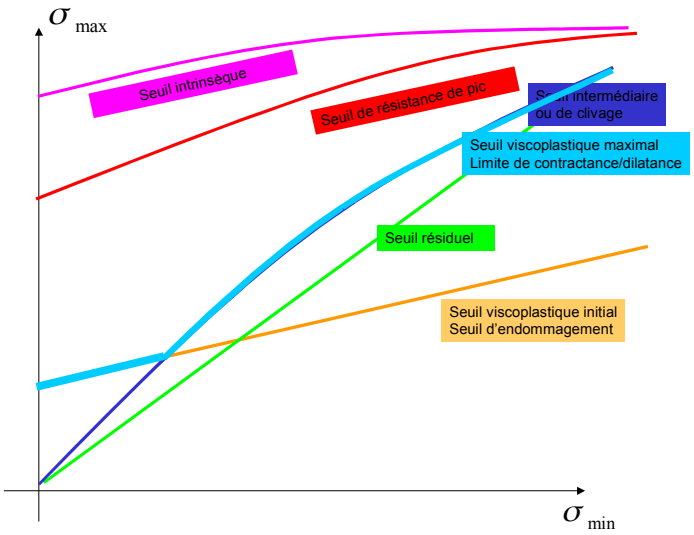


Figure 3.1.1-a. Seuils du modèle original présentés dans le plan $(\sigma_{min}, \sigma_{max})$

3.1.2 Caractéristiques du modèle simplifié

La version simplifiée proposée par le CIH (cf.R 2) repose seulement sur deux mécanismes : un mécanisme élastoplastique et un mécanisme viscoplastique.

- Le seuil intrinsèque est éliminé dans cette version.
- Le seuil caractéristique délimitant les domaines de contractance et de dilatance en phase pré-pic, est linéarisé pour éviter tout problème numérique. Il est supposé confondu avec le seuil de viscosité maximale.

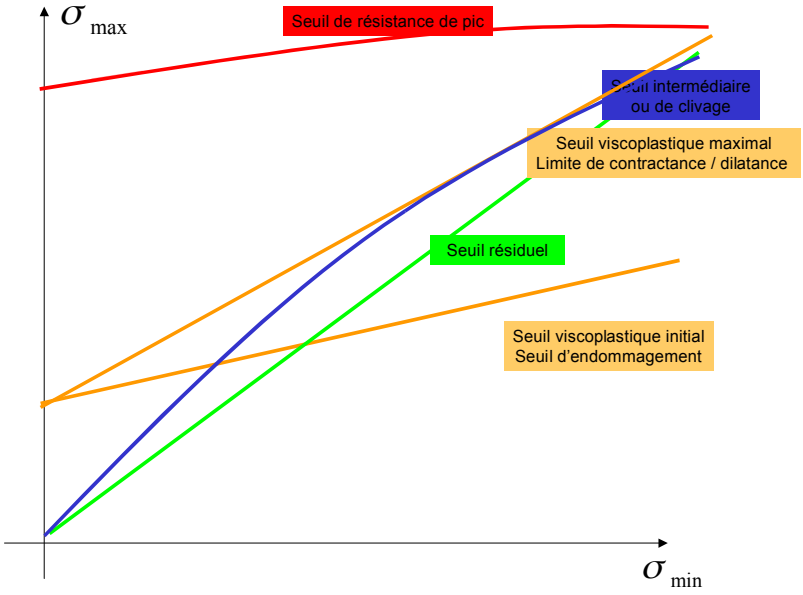


Figure 3.1.2-a. Seuils du modèle simplifié dans le plan $(\sigma_{min}, \sigma_{max})$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.2 Descriptif des mécanismes

3.2.1 Le mécanisme viscoplastique

Ce mécanisme s'active dès que le point de charge dépasse le seuil viscoélastique initial (assimilé à la limite d'élasticité initiale). Des déformations irréversibles sont générées. Ces vitesses de déformations irréversibles sont proportionnelles à la distance du point de charge par rapport au seuil de viscosité. La surface associée au mécanisme viscoplastique évolue de la limite d'élasticité initiale vers le seuil viscoplastique maximal en fonction des déformations irréversibles générées.

3.2.2 Le mécanisme élastoplastique

3.2.2.1 pré pic

Le mécanisme élasto plastique s'active en même temps que le mécanisme viscoplastique. Dès que le point de charge dépasse la limite d'élasticité initiale, la surface de charge commence à s'écrouire positivement.

3.2.2.2 post pic

Dans la version simplifiée du modèle, ce mécanisme est régi par :
- un écrouissage négatif du seuil de pic vers le seuil intermédiaire,
- un écrouissage négatif du seuil intermédiaire vers le seuil résiduel.

3.2.3 Le comportement volumique

Le comportement volumique, durant la phase pré-pic, peut être contractant ou dilatant.
En dessous de la limite d'élasticité initiale, le comportement est contractant.
En dessous de la limite contractance/dilatance , le comportement volumique est contractant plastique.
Au delà de cette limite, le comportement volumique est dilatant.

N.B : Dans la version simplifiée du modèle, la limite contractance/dilatance est confondue avec le seuil viscoplastique maximal.

3.3 Décomposition du tenseur de déformation

La décomposition de l'incrément de déformation totale s'écrit :
$\dot{\underline{\varepsilon}}=\dot{\underline{\varepsilon}}^{e}+\dot{\underline{\varepsilon}}^{p}+\dot{\underline{\varepsilon}}^{vp}$
où $\dot{\underline{\varepsilon}}^{e}$, $\dot{\underline{\varepsilon}}^{p}$ et $\dot{\underline{\varepsilon}}^{vp}$ sont les incréments des tenseurs élastiques, irréversibles instantanés (plastique) et irréversibles différées (viscoplastiques).

3.3.1 L'hypo-élasticité

La loi élastique choisie est une loi hypo-élastique :
$\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}=\frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}_{ij}-\frac{3\nu}{E}\dot{p}\,\delta_{ij}$ ou $\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}=\frac{1}{2G}\dot{s}_{ij}+\frac{1}{3K}\dot{p}\,\delta_{ij}$
que l'on note aussi : $\dot{\sigma}_{ij}=D^{e}\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}$.
Les modules de cisaillement G et de compressibilité K dépendent de l'état de contraintes :
$K=K_0^e\left[\frac{I_1^-}{3P_a}\right]^{n_{elas}}$ et $G=G_0^e\left[\frac{I_1^-}{3P_a}\right]^{n_{elas}}$ avec $I_1^-=tr(\boldsymbol{\sigma}^-)$.
$I_1^-=tr(\boldsymbol{\sigma}^-)$ étant la trace des contraintes à l'instant $-$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3.2 La plasticité

Comme dans la version simplifiée du modèle, seul le mécanisme déviatorique est pris en compte, la déformation irréversible instantanée s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}=\dot{\lambda}\, G_{ij}$$

λ étant le multiplicateur plastique et G est la fonction d'écoulement.

Soit f^d le critère de plasticité :

Si $f^d \leq 0$ alors $\lambda = 0$
Si $f^d = 0$ alors $\lambda > 0$

L'expression de G repose sur plusieurs travaux cités dans la note R 2 et est de la forme :

$$G_{ij}=\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}-\left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{kl}} n_{kl}\right) n_{ij} \ , \quad n_{ij}=\frac{\beta' \frac{s_{ij}}{s_{II}}-\delta_{ij}}{\sqrt{\beta'^2+3}} \ , \quad \beta' = -\frac{2\sqrt{6}\sin(\Psi)}{3-\sin(\Psi)}$$

Les expressions de $\sin(\Psi)$ sont détaillées au paragraphe 3.6.1 et 3.6.2.
Le calcul de $\dot{\lambda}$ fait l'objet du paragraphe 4.2.1.2.
Le calcul de $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ est détaillé au paragraphe 3.7.1

L'évolution de l'élastoplasticité induit une déformation plastique : ε_p reliée à travers sa composante déviatorique $\tilde{\varepsilon}_p$ au paramètre d'écrouissage γ_p tel que : $\gamma_p = \int \sqrt{\frac{2}{3}\tilde{\varepsilon}_p \tilde{\varepsilon}_p}\, dt$

d'où la relation $\dot{\gamma}_p = \dot{\lambda}\sqrt{\frac{2}{3}\tilde{G}_{ij}\tilde{G}_{ij}} = \dot{\lambda}\sqrt{\frac{2}{3}}G_{II}$

3.3.3 La viscoplasticité

Le calcul des déformations irréversibles différées $\dot{\underline{\varepsilon}}^{vp}$ repose sur la théorie de Perzyna.
$\dot{\underline{\varepsilon}}^{vp} = \langle \Phi(f^{vp}) \rangle G_{ij}^{visc}$ où $\Phi(f^{vp})$ et G^{visc} caractérisent l'amplitude et la direction de la vitesse des déformations irréversibles :

$$\Phi(f^{vp})=A_v\left(\frac{f^{vp}}{Pa}\right)^{n_v} \text{ et } G_{ij}^{visc}=\frac{\partial f^{vp}}{\partial \sigma_{ij}}-\left(\frac{\partial f^{vp}}{\partial \sigma_{kl}} n_{kl}\right) n_{ij}$$

f^{vp} étant le critère de viscoplasticité, A_v et n_v sont des paramètres du modèle. P_a est la pression atmosphérique.

L'évolution de la viscoplasticité induit une déformation visqueuse : reliée à travers sa composante déviatorique $\tilde{\varepsilon}_{vp}$ au paramètre d'écrouissage γ_{vp} tel que : $\gamma_{vp} = \int \sqrt{\frac{2}{3}\tilde{\dot{\varepsilon}}_{vp}\tilde{\dot{\varepsilon}}_{vp}}\, dt$.

Remarque :
Soit S^{vp} la surface définie dans l'espace des contraintes par : $S^{vp} = \{\sigma, f^{vp}(\sigma, \xi^{vp}) = 0\}$
La vitesse de fluage pour un état de contraintes σ est proportionnelle à la distance de σ à S^{vp} .
Soit P_σ^{vp} la projection de σ sur S^{vp} et $d = \|\sigma - P_\sigma^{vp}\|$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On peut aussi écrire $d=\|\frac{\partial f^{vp}}{\partial \sigma}\left(P_{\sigma}^{vp}\right)\|C$. C étant une constante qui dépend des paramètres visqueux. En première approximation, on écrit : $d=\|\frac{\partial f^{vp}}{\partial \sigma}(\sigma)\|C$. Mais cette approximation pose un problème dans la mesure où la fonction f^{vp} peut ne pas être définie pour la valeur σ alors qu'elle l'est pour P_{σ}^{vp} . Pour l'instant, dans *Code_Aster* on ne calcule pas cette distance. Si la situation se présente, un message d'alarme prévient l'utilisateur.

3.4 Expressions des critères

Les expressions des deux critères viscoplastique f^{vp} et élastoplastique f^{d} dépendent des contraintes et des fonctions d'écrouissage. Dans ces expressions, on trouve I_1 le premier invariant des contraintes et s_{II} le deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoires. Dans les deux critères, les mêmes définitions sont adoptées pour :

$$H(\theta)=\frac{H_0^c+H_0^e}{2}+\left(\frac{H_0^c-H_0^e}{2}\right)\left(\frac{2\mathrm{h}(\theta)-\left(h_0^c+h_0^e\right)}{h_0^c-h_0^e}\right)$$

$$h(\theta)=(1-\gamma\cos 3\theta)^{\frac{1}{6}}\ ,\ h_0^c=H_0^c=h(0^\circ)=(1-\gamma)^{\frac{1}{6}}\ ,\ h_0^e=h(60^\circ)=(1+\gamma)^{\frac{1}{6}}\ ,$$

H_0^e est un paramètre du modèle. θ est l'angle de Lode.

3.4.1 Le critère viscoplastique f^{vp}

$$f^{vp}(\sigma)=s_{II}H(\theta)-\sigma_c H_0^c\left[A^{vp}\left(\xi_{vp}\right)s_{II}H(\theta)+B^{vp}\left(\xi_{vp}\right)I_1+D^{vp}\left(\xi_{vp}\right)\right]^{a^{vp}\left(\xi_{vp}\right)}$$

avec $A^{vp}\left(\xi_{vp}\right)=-\frac{m^{vp}\left(\xi_{vp}\right)k^{vp}\left(\xi_{vp}\right)}{\sqrt{6}\sigma_c h_c^0}$, $B^{vp}\left(\xi_{vp}\right)=\frac{m^{vp}\left(\xi_{vp}\right)k^{vp}\left(\xi_{vp}\right)}{3\sigma_c}$, $D^{vp}\left(\xi_{vp}\right)=s^{vp}\left(\xi_{vp}\right)k^{vp}\left(\xi_{vp}\right)$,

$k^{vp}\left(\xi_{vp}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2a^{vp}\left(\xi_{vp}\right)}}$

Les fonctions d'écrouissage $A^{vp}\left(\xi_{vp}\right)$, $B^{vp}\left(\xi_{vp}\right)$ et $D^{vp}\left(\xi_{vp}\right)$ dépendent des paramètres d'écrouissage $a^{vp}\left(\xi_{vp}\right)$, $m^{vp}\left(\xi_{vp}\right)$ et $s^{vp}\left(\xi_{vp}\right)$ dont les expressions évoluent avec les variables d'écrouissage ξ_{vp} (voir § 3.5). Quand ξ_{vp} atteint certaines valeurs particulières, la surface f^{vp} atteint les seuils correspondants.

Etant donné que le seuil viscoplastique ne s'écrouit que par la viscosité, on a toujours $\dot{\xi}_{vp}=Min\left[\dot{\gamma}_{vp},\xi_{v-\max}-\xi_{vp}\right]$. $\xi_{vp-\max}$ correspond au critère viscoplastique maximal et est un paramètre du modèle

3.4.2 Le critère élastoplastique f^{d}

$$f^{d}(\sigma)=s_{II}H(\theta)-\sigma_c H_0^c\left[A^{d}\left(\xi_{p}\right)s_{II}H(\theta)+B^{d}\left(\xi_{p}\right)I_1+D^{d}\left(\xi_{p}\right)\right]^{a^{d}\left(\xi_{p}\right)}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

avec $A^d(\xi_p)=-\dfrac{m^d(\xi_p)k^d(\xi_p)}{\sqrt{6}\sigma_c h_c^0}$, $B^d(\xi_p)=\dfrac{m^d(\xi_p)k^d(\xi_p)}{3\sigma_c}$, $D^d(\xi_p)=s^d(\xi_p)k^d(\xi_p)$,

$k^d(\xi_p)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2a^d(\xi_p)}}$

Les fonctions d'écrouissage $A^d(\xi_p)$, $B^d(\xi_p)$ et $D^d(\xi_p)$ dépendent des paramètres d'écrouissage $a^d(\xi_p)$, $m^d(\xi_p)$ et $s^d(\xi_p)$ dont les expressions évoluent avec les variables d'écrouissage ξ_p (voir § 3.5). Quand ξ_p atteint certaines valeurs particulières, la surface f^d atteint les seuils correspondants.

L'écrouissage élastoplastique dépend de la position du point de charge par rapport à la limite contractance/dilatance :

- si le point de charge est en dessous de cette limite, $\dot{\xi}_p=\dot{\gamma}_p$,
- si le point de charge est au dessus de cette limite, $\dot{\xi}_p=\dot{\gamma}_p+\dot{\gamma}_{vp}$.

3.5 Fonctions d'écrouissage

3.5.1 Fonctions d'écrouissage du critère visqueux

Le critère viscoplastique est régi par les fonctions d'écrouissage suivantes :

$a(\xi_{vp})=a_0+(a_{v-\max}-a_0)\dfrac{\xi_{vp}}{\xi_{v-\max}}$ avec $a_{v-\max}=1$.

$m(\xi_{vp})=m_0+(m_{v-\max}-m_0)\dfrac{\xi_{vp}}{\xi_{v-\max}}$

$s(\xi_{vp})=s_0+(s_{v-\max}-s_0)\dfrac{\xi_{vp}}{\xi_{v-\max}}$ avec $s_{v-\max}=s_0$

3.5.2 Fonctions d'écrouissage du critère élastoplastique et leur dérivées

Les expressions des fonctions d'écrouissage qui régissent le critère élastoplastique varient selon la valeur du paramètres ξ_p :

Evolution entre le seuil d'endommagement et le seuil de pic : Si $0\le\xi_p<\xi_{pic}$

$a(\xi_p)=a_0+\ln\left(1+\dfrac{\xi_p}{x_{ams}\xi_{pic}}\right)\left(\dfrac{a_{pic}-a_0}{\ln(1+1/x_{ams})}\right)$ $\qquad \dfrac{\partial a}{\partial \xi_p}=\left(\dfrac{a_{pic}-a_0}{\ln(1+1/x_{ams})}\right)\left(\dfrac{1}{\xi_p+x_{ams}\xi_{pic}}\right)$

$m(\xi_p)=m_0+\ln\left(1+\dfrac{\xi_p}{x_{ams}\xi_{pic}}\right)\left(\dfrac{m_{pic}-m_0}{\ln(1+1/x_{ams})}\right)$ $\qquad \dfrac{\partial m}{\partial \xi_p}=\left(\dfrac{m_{pic}-m_0}{\ln(1+1/x_{ams})}\right)\left(\dfrac{1}{\xi_p+x_{ams}\xi_{pic}}\right)$

$s(\xi_p)=s_0+\ln\left(1+\dfrac{\xi_p}{x_{ams}\xi_{pic}}\right)\left(\dfrac{s_{pic}-s_0}{\ln(1+1/x_{ams})}\right)$

$\dfrac{\partial s}{\partial \xi_p}=\left(\dfrac{s_{pic}-s_0}{\ln(1+1/x_{ams})}\right)\left(\dfrac{1}{\xi_p+x_{ams}\xi_{pic}}\right)$

avec $s_{pic}=1$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Évolution entre le seuil de pic et le seuil intermédiaire ou la limite de clivage : Si $\xi_{pic} \leq \xi_p < \xi_e$

$$a(\xi_p) = a_{pic} + (a_e - a_{pic})\left(\frac{\xi_p - \xi_{pic}}{\xi_e - \xi_{pic}}\right) \qquad \frac{\partial a}{\partial \xi_p} = \frac{a_e - a_{pic}}{\xi_e - \xi_{pic}}$$

$$s(\xi_p) = 1 - \left(\frac{\xi_p - \xi_{pic}}{\xi_e - \xi_{pic}}\right) \qquad \frac{\partial s}{\partial \xi_p} = \frac{-1}{\xi_e - \xi_{pic}}$$

$$\frac{\partial m}{\partial \xi_p} = \frac{\partial m}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \xi_p} + \frac{\partial m}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \xi_p}$$

$$\frac{\partial m}{\partial \xi_p} = \frac{\sigma_c}{\sigma_{po\,int\,1}}\left[\left(-\frac{a_{pic}}{a(\xi_p)^2}\right)\left(m_{pic}\frac{\sigma_{po\,int\,1}}{\sigma_c} + s_{pic}\right)^{\frac{a_{pic}}{a(\xi_p)}} \ln\left(m_{pic}\frac{\sigma_{po\,int\,1}}{\sigma_c} + s_{pic}\right)\frac{\partial a}{\partial \xi_p} - \frac{\partial s}{\partial \xi_p}\right]$$

Évolution entre le seuil intermédiaire et le seuil résiduel : Si $\xi_e \leq \xi_p < \xi_{ult}$

$$a(\xi_p) = a_e + \ln\left(1 + \frac{1}{\eta}\frac{\xi_p - \xi_e}{\xi_{ult} - \xi_e}\right)\left(\frac{a_{ult} - a_e}{\ln(1 + 1/\eta)}\right) \qquad \frac{\partial a}{\partial \xi_p} = \left(\frac{a_{ult} - a_e}{\ln(1 + 1/\eta)}\right)\left(\frac{1}{\xi_p + \eta\xi_{ult} - (1+\eta)\xi_e}\right)$$

$$s(\xi_p) = 0 \qquad \frac{\partial s}{\partial \xi^p} = 0$$

$$m(\xi_p) = \frac{\sigma_c}{\sigma_{po\,int\,2}}\left(m_e\frac{\sigma_{po\,int\,2}}{\sigma_c}\right)^{\frac{a_e}{a(\xi_p)}}$$

$$\frac{\partial m}{\partial \xi_p} = \frac{\sigma_c}{\sigma_{po\,int\,2}}\left[\left(-\frac{a_e}{a(\xi_p)^2}\right)\ln\left(m_e\frac{\sigma_{po\,int\,2}}{\sigma_c}\right)\left(m_e\frac{\sigma_{po\,int\,2}}{\sigma_c}\right)^{\frac{a_e}{a(\xi_p)}}\right]\frac{\partial a}{\partial \xi_p}$$

Sur le critère résiduel : Si $\xi_p \geq \xi_{ult}$

$$a(\xi_p) = a_{ult} = 1. \qquad \frac{\partial a}{\partial \xi_p} = 0$$

$$s(\xi_p) = 0 \qquad \frac{\partial s}{\partial \xi_p} = 0$$

$$m(\xi_p) = m_{ult} \qquad \frac{\partial m}{\partial \xi_p} = 0$$

3.6 Lois de dilatance

Les mécanismes élastoplastiques et viscoplastiques sont non-associés. Les lois d'évolution de $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$ et de $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$ sont régies respectivement par une fonction G et une fonction G^{visc} , tel que :

$$G_{ij} = \frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}} - \left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{kl}} n_{kl}\right) n_{ij} \quad \text{et} \quad G_{ij}^{visc} = \frac{\partial f^{vp}}{\partial \sigma_{ij}} - \left(\frac{\partial f^{vp}}{\partial \sigma_{kl}} n_{kl}\right) n_{ij} \text{ avec}$$

$$n_{ij} = \frac{\beta' \frac{s_{ij}}{s_{II}} - \delta_{ij}}{\sqrt{\beta'^2 + 3}} \quad \text{et} \quad \beta' = -\frac{2\sqrt{6}\sin(\Psi)}{3 - \sin(\Psi)}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le calcul de l'angle de dilatance Ψ diffère selon les mécanismes visqueux ou élastoplastique pré-pic et élastoplastique post-pic.

3.6.1 Angle de dilatance des mécanismes élastoplastique pré-pic et viscoplastique

$\sin(\Psi)=\mu_{0,v}\left(\frac{\sigma_{\max}-\sigma_{\lim}}{\xi_{0,v}\sigma_{\max}+\sigma_{\lim}}\right)$ avec $\mu_{0,v}$ et $\xi_{0,v}$ des paramètres du modèle.

où

$\sigma_{\lim}=\sigma_{\min}+\sigma_c\left(m_{v-\max}\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_c}+s_{v-\max}\right)^{a_{v-\max}}$ avec $s_{v-\max}=s_0$ et $a_{v-\max}=1$. σ_c et $m_{v-\max}$ sont des paramètres du modèle.

Il existe des conditions sur les paramètres $\mu_{0,v}$ et $\xi_{0,v}$ qui sont :

- $\mu_{0,v}<\xi_{0,v}$ ou
- $\begin{cases}\mu_{0,v}>\xi_{0,v}\\ \frac{(s_{\text{pic}})^{a_{\text{pic}}}}{(s_0)^{a_0}}\leq\frac{1+\mu_{0,v}}{\mu_{0,v}-\xi_{0,v}}\end{cases}$

3.6.2 Angle de dilatance du mécanisme élastoplastique post-pic

$\sin(\Psi)=\mu_1\left(\frac{\alpha-\alpha_{res}}{\xi_1\alpha+\alpha_{res}}\right)$ avec μ_1 et ξ_1 paramètres du modèle

où

$\alpha=\frac{\sigma_{\max}+\tilde{\sigma}}{\sigma_{\min}+\tilde{\sigma}}$ et $\alpha_{res}=\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}=1+m_{ult}$

$$\tilde{\sigma}=\begin{cases}\frac{\tilde{c}(\xi_p)}{\tan(\tilde{\varphi}(\xi_p))} & si\quad \xi_p\leq\xi_e\\ 0 & si\quad \xi_p>\xi_e\end{cases}$$

avec $\tilde{c}(\xi_p)=\frac{\sigma_c.s(\xi_p)^{a(\xi_p)}}{2\sqrt{1+a(\xi_p)m(\xi_p)s(\xi_p)^{a(\xi_p)-1}}}$ et

$\tilde{\varphi}(\xi_p)=2.arctg(\sqrt{1+a(\xi_p)m(\xi_p)s(\xi_p)^{a(\xi_p)-1}})-\frac{\pi}{2}$

$\sigma_{\min}$ et $\sigma_{\max}$ sont calculées à partir des invariants des contraintes :

$$\sigma_{\min}=\frac{1}{3}\left(I_1-\left(\frac{3}{2}-\frac{2H(\theta)-(H_0^c+H_0^e)}{2(H_0^c-H_0^e)}\right)\sqrt{\frac{3}{2}}s_{II}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\sigma_{max}=\frac{1}{3}\left(I_1+\left(\frac{3}{2}+\frac{2H(\theta)-\left(H_0^c+H_0^e\right)}{2\left(H_0^c-H_0^e\right)}\right)\sqrt{\frac{3}{2}}s_{II}\right)$$

3.7 Dérivées du critère

3.7.1 Calcul de $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}}=\frac{\partial tr(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}=\delta_{ij}$$

$$\frac{\partial\left(s_{II}H(\theta)\right)}{\partial \sigma_{ij}}=\frac{\partial\left(s_{II}H(\theta)\right)}{\partial s_{kl}}\frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}}=\left(\frac{\partial H(\theta)}{\partial s_{kl}}s_{II}+H(\theta)\frac{\partial s_{II}}{\partial s_{kl}}\right)\frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$\frac{\partial s_{II}}{\partial s_{kl}}=\frac{s_{kl}}{s_{II}}\ ;\ s_{II}=\sqrt{s_{kl}.s_{kl}}$$

$$\frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}}=\frac{\partial\left(\sigma_{kl}-\frac{1}{3}tr(\sigma)\delta_{kl}\right)}{\partial \sigma_{ij}}=\delta_{ik}.\delta_{jl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}.\delta_{kl}$$

Remarque : $s_{kl}.\left(\delta_{ik}.\delta_{jl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}.\delta_{kl}\right)=s_{ij}$

$$\frac{\partial H(\theta)}{\partial s_{kl}}=\left(\frac{H_0^c-H_0^e}{h_0^c-h_0^e}\right)\frac{\partial h(\theta)}{\partial s_{kl}}$$

d'où $\frac{\partial\left(s_{II}H(\theta)\right)}{\partial \sigma_{ij}}=\left(\left(\frac{H_0^c-H_0^e}{h_0^c-h_0^e}\right)\frac{\partial h(\theta)}{\partial s_{kl}}s_{II}+H(\theta)\frac{s_{kl}}{s_{II}}\right).\left(\delta_{ik}.\delta_{jl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}.\delta_{kl}\right)$

On a la relation: $\cos(3\theta)=\sqrt{54}\frac{\det(\boldsymbol{s})}{s_{II}^3}$ (voir Documentation R7.01.13-A : Loi CJS en mécanique)

$$\frac{\partial h(\theta)}{\partial s_{kl}}=\frac{1}{6}\left(1-\gamma\cos(3\theta)\right)^{-\frac{5}{6}}\frac{\partial\left(1-\gamma\cos(3\theta)\right)}{\partial s_{kl}}=\frac{1}{6h(\theta)^5}\frac{\partial}{\partial s_{kl}}\left(\frac{s_{II}^3-\gamma\sqrt{54}\det(s)}{s_{II}^3}\right)$$

$$\frac{\partial h(\theta)}{\partial s_{kl}}=\frac{1}{6h(\theta)^5}\left\{\left[\frac{\partial s_{II}^3}{\partial s_{kl}}-\gamma\sqrt{54}\left(\frac{\partial\det(\underline{\underline{s}})}{\partial s_{kl}}\right)\right]\frac{s_{II}^3}{s_{II}^6}-\left(s_{II}^3-\gamma\sqrt{54}\det(\underline{\underline{s}})\right)\frac{3s_{kl}s_{II}}{s_{II}^6}\right\}$$

$$=\frac{1}{6h(\theta)^5}\left\{\frac{3s_{kl}}{s_{II}^2}-\gamma\sqrt{54}\left(\frac{\partial\det(\underline{\underline{s}})}{\partial s_{kl}}\right)\frac{1}{s_{II}^3}-\left(1-\gamma\cos(3\theta)\right)\frac{3s_{kl}}{s_{II}^2}\right\}$$

$$=\frac{\gamma\cos(3\theta)}{6h(\theta)^5}\frac{3s_{kl}}{s_{II}^2}-\frac{\gamma\sqrt{54}}{6h(\theta)^5s_{II}^3}\left(\frac{\partial\det(\underline{\underline{s}})}{\partial s_{kl}}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On trouve donc :

$$\frac{\partial\left(s_{II}H(\theta)\right)}{\partial\sigma_{ij}}=\left(\left(\frac{H_0^c-H_0^e}{h_0^c-h_0^e}\right)\left(\frac{\gamma\cos(3\theta)}{6\mathrm{h}(\theta)^5}\frac{3\mathrm{s}_{kl}}{s_{II}^2}-\frac{\gamma\sqrt{54}}{6\mathrm{h}(\theta)^5 s_{II}^3}\left(\frac{\partial\det(\underline{s})}{\partial s_{kl}}\right)\right)s_{II}+H(\theta)\frac{s_{kl}}{s_{II}}\right).\left(\delta_{ik}.\delta_{jl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}.\delta_{kl}\right)$$

Finalement :

Pour le critère élastoplastique :

$$\frac{\partial f^d}{\partial\sigma_{ij}}=\frac{\partial\left(s_{II}H(\theta)\right)}{\partial\sigma_{ij}}-a^d(\xi_p)\sigma_c H_0^c\left[A^d(\xi_p)s_{II}H(\theta)+B^d(\xi_p)I_1+D^d(\xi_p)\right]^{a^d(\xi_p)-1}\left(A^d(\xi_p)\frac{\partial\left(s_{II}H(\theta)\right)}{\partial\sigma_{ij}}+B^d(\xi_p)I_d\right)$$

et pour le critère visqueux :

$$\frac{\partial f^{vp}}{\partial\sigma_{ij}}=\frac{\partial\left(s_{II}H(\theta)\right)}{\partial\sigma_{ij}}-a^{vp}(\xi_{vp})\sigma_c H_0^c\left[A^{vp}(\xi_{vp})s_{II}H(\theta)+B^{vp}(\xi_{vp})I_1+D^{vp}(\xi_{vp})\right]^{a^{vp}(\xi_{pp})-1}\left(A^{vp}(\xi_{vp})\frac{\partial\left(s_{II}H(\theta)\right)}{\partial\sigma_{ij}}+B^{vp}(\xi_{vp})I_d\right)$$

avec $\frac{\partial\left(s_{II}H(\theta)\right)}{\partial\sigma_{ij}}=\left(\left(\frac{H_0^c-H_0^e}{h_0^c-h_0^e}\right)\left(\frac{\gamma\cos(3\theta)}{6\mathrm{h}(\theta)^5}\frac{3\mathrm{s}_{kl}}{s_{II}^2}-\frac{\gamma\sqrt{54}}{6\mathrm{h}(\theta)^5 s_{II}^3}\left(\frac{\partial\det(\underline{s})}{\partial s_{kl}}\right)\right)s_{II}+H(\theta)\frac{s_{kl}}{s_{II}}\right).\left(\delta_{ik}.\delta_{jl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}.\delta_{kl}\right)$

3.7.2 Calcul de $\frac{\partial f^d}{\partial\xi_p}$

Expression du seuil en contraintes :

$$f^d(\sigma)=s_{II}H(\theta)-\sigma_c H_0^c\left[A^d(\xi_p)s_{II}H(\theta)+B^d(\xi_p)I_1+D^d(\xi_p)\right]^{a^d(\xi_p)}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

avec $A^d(\xi^p) = -\dfrac{m^d(\xi_p)k^d(\xi_p)}{\sqrt{6}\sigma_c h_c^0}$, $B^d(\xi_p) = \dfrac{m^d(\xi_p)k^d(\xi_p)}{3\sigma_c}$, $D^d(\xi_p) = s^d(\xi_p)k(\xi_p)$,

$k^d(\xi_p) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2a^d(\xi_p)}}$

$$\frac{\partial f^d}{\partial \xi_p} = \frac{\partial f^d}{\partial a^d}.\dot{a}^d(\xi_p) + \frac{\partial f}{\partial m^d}.\dot{m}^d(\xi_p) + \frac{\partial f}{\partial s^d}.\dot{s}^d(\xi_p)$$

$$\frac{\partial f^d}{\partial s^d} = -a^d k^d \sigma_c H_0^c \left[A^d s_{II} H(\theta) + B^d I_1 + D^d\right]^{a^d - 1}$$

$$\frac{\partial f^d}{\partial m^d} = -a^d \sigma_c H_0^c \left[\frac{A^d}{m^d} s_{II} H(\theta) + \frac{B^d}{m^d} I_1\right] \left[A^d s_{II} H(\theta) + B^d I_1 + D^d\right]^{a^d - 1}$$

$$\frac{\partial f^d}{\partial a^d} =$$

$$\sigma_c H_0^c \dot{a}^d \left[A^d s_{II} H(\theta) + B^d I_1 + D^d\right]^{a^d} . \left[\ln\left[A^d s_{II} H(\theta) + B^d I_1 + D^d\right] - \frac{\dfrac{s^d}{2a^d}\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\left(\frac{1}{2a}\right)}}{\left[A^d s_{II} H(\theta) + B^d I_1 + D^d\right]}\right]$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Intégration dans Code_Aster

L'intégration du modèle LETK peut être réalisée suivant deux schémas d'intégration distincts. Le premier schéma d'intégration (« historique ») est décrit comme SPECIFIQUE et correspond à un schéma d'intégration explicite. Le second schéma est construit sur la base des schémas d'intégration implicite. Il est accessible sous le mot-clé NEWTON_PERT .

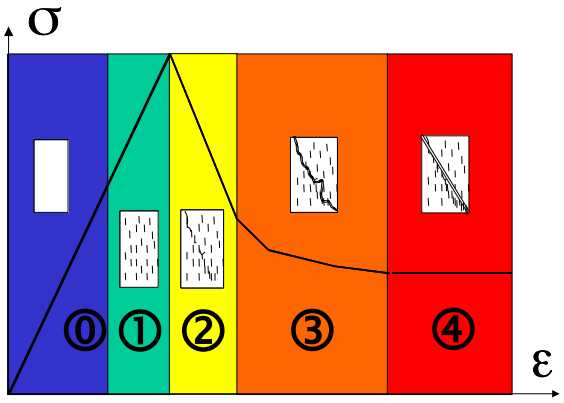
4.1 Variables internes

V_1 : variable d'écrouissage élastoplastique ξ_p
V_2 : déformation déviatorique plastique γ_p
V_3 : variable d'écrouissage viscoplastique ξ_{vp}
V_4 : déformation déviatorique viscoplastique γ_{vp}
V_5 : 0 si contractance , 1 si dilatance
V_6 : indicateur de viscoplasticité
V_7 : indicateur de plasticité
V_8 : Les domaines de comportement de la roche en plasticité

Cinq domaines de comportement, numérotés de 0 à 4 (cf. figure), sont identifiés pour permettre d'avoir une représentation relativement simple de l'état d'endommagement de la roche, depuis la roche intacte jusqu'à la roche à l'état résiduel. Ces domaines sont fonction de la déformation déviatoire plastique cumulée γ^p et de l'état de contrainte. Chaque incrément de numéro de domaine définit le passage dans un domaine d'endommagement supérieur.

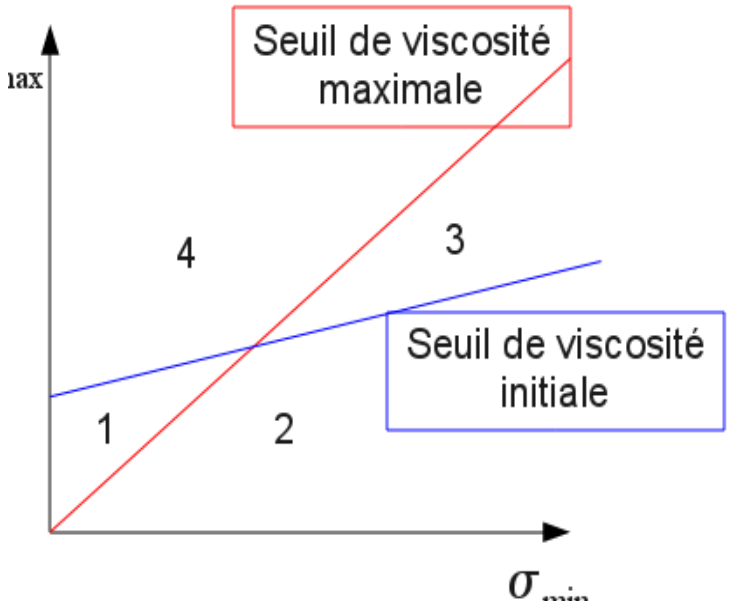
- Si le déviateur est inférieur à 70% du déviateur de pic, alors le matériau est dans le domaine 0 ;
- Sinon :
  - Si $\gamma^p=0$ alors le matériau est dans le domaine 1 ;
    1) Si $0<\gamma^p<\gamma^e$ alors le matériau est dans le domaine 2 ;
  - Si $\gamma_e<\gamma^p<\gamma_{ult}$ alors le matériau est dans le domaine 3 ;
  - Si $\gamma^p>\gamma_{ult}$ alors le matériau est dans le domaine 4.

Domaine	Etat de la roche
0	Intacte
1	Endommagement pré-pic
2	Endommagement post-pic
3	Fissurée
4	Fracturée



V_9 : position de l'état de contraintes par rapport aux seuils de viscosité.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



Quatre domaines de comportement, numérotés de 1 à 4 (cf. figure), sont identifiés pour permettre d'avoir une représentation simple du comportement visqueux du matériau, depuis la roche intacte jusqu'à la roche à l'état résiduel. Ces domaines sont fonction de la déformation déviatoire visco-plastique cumulée γ^{vp} et de l'état de contrainte.

4.2 Schéma d'intégration explicite (SPECIFIQUE)

4.2.1 Mise à jour des contraintes

On exprime les contraintes actualisées à l'instant + par rapport à celles calculées à l'instant - :

$$\sigma=\sigma^{-}+D^{e}\Delta\varepsilon^{e}\ ;\ s=s^{-}+2\mathrm{G}\Delta\tilde{\varepsilon}^{e}\ ;\ I_1=I_1^{-}+3\mathrm{K}\Delta\varepsilon_v^{e}$$

$$\sigma_{ij}=s_{ij}+\frac{I_1}{3}\delta_{ij}\ ;\ \Delta\varepsilon_{ij}=\Delta\tilde{\varepsilon}_{ij}+\frac{tr(\Delta\varepsilon)}{3}\delta_{ij}=\Delta\tilde{\varepsilon}_{ij}+\frac{\Delta\varepsilon_v}{3}\delta_{ij}\ ;\ I_1=tr(\sigma)\ ;\ \varepsilon_v=tr(\Delta\varepsilon)$$

Prédiction élastique :

$$\sigma^{e}=\sigma^{-}+D^{e}\Delta\varepsilon\ ;\ s^{e}=s^{-}+2\mathrm{G}\Delta\tilde{\varepsilon}\ ;\ I_1^{e}=I_1^{-}+3\mathrm{K}\Delta\varepsilon_v$$

$$K=K_0^{e}\left[\frac{I_1^{-}}{3\mathrm{P}_a}\right]^{n_{elas}}\ \text{et}\ G=G_0^{e}\left[\frac{I_1^{-}}{3\mathrm{P}_a}\right]^{n_{elas}}$$

Remarque : Le coefficient de compressibilité K et le module de cisaillement G sont considérés à l'instant -.

4.2.1.1 Hypoélasticité

$$\Delta\sigma_{ij}=\Delta s_{ij}+\frac{\Delta I_1}{3}\delta_{ij}\qquad\Delta\varepsilon_{ij}=\Delta\tilde{\varepsilon}_{ij}+\frac{\Delta\varepsilon_v}{3}\delta_{ij}\qquad\Delta\sigma_{ij}=2\mathrm{G}\Delta\varepsilon_{ij}+\left(K-\frac{2\mathrm{G}}{3}\right)tr(\Delta\varepsilon)\delta_{ij}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{11} \\ \Delta\sigma_{22} \\ \Delta\sigma_{33} \\ \sqrt{2}\Delta\sigma_{12} \\ \sqrt{2}\Delta\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\Delta\sigma_{23} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4G}{3}+K & K-\frac{2G}{3} & K-\frac{2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ K-\frac{2G}{3} & \frac{4G}{3}+K & K-\frac{2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ K-\frac{2G}{3} & K-\frac{2G}{3} & \frac{4G}{3}+K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix}}_{D^e} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\Delta\varepsilon_{12} \\ \sqrt{2}\Delta\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\Delta\varepsilon_{23} \end{Bmatrix}$$

4.2.1.2 Plasticité et viscoplasticité

On exprime le champ de contraintes à l'instant $+$:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{-} + D^e_{ijkl}\,\Delta\varepsilon^e_{kl} = \sigma_{ij}^{-} + D^e_{ijkl}\left(\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\varepsilon^p_{kl} - \Delta\varepsilon^{vp}_{kl}\right)$$

qui s'écrit en remplaçant l'accroissement des déformations plastiques et visqueuses par leurs expressions sous la forme :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{-} + D^e_{ijkl}\left(\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\lambda G_{kl}(\sigma^{-}, \xi_p^{-}) - \langle\varphi\rangle G^{visc}_{kl}\left(\sigma^{-}, \xi_v^{-}\right)\Delta t\right)$$

La principale inconnue est le multiplicateur plastique $\Delta\lambda$.

On cherche $\Delta\lambda \,/\, f^d\left(\sigma, \xi_p\right) = 0$

$$f^d\left(\sigma_{ij}^{-} + D^e_{ijkl}\left(\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\lambda G_{kl}(\sigma^{-}, \xi_p^{-}) - \langle\varphi\rangle G^{visc}_{kl}\left(\sigma^{-}, \xi_v^{-}\right)\Delta t\right), \xi_p^{-} + \Delta\xi_p\right) = 0$$

avec $\Delta\gamma_p = \Delta\lambda\sqrt{\frac{2}{3}\tilde{G}_{ij}\tilde{G}_{ij}} = \Delta\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}G_{II}$

On choisit de faire une résolution explicite avec un développement d'Euler :

$$f^d\left(\sigma_{ij}^{-} + D^e_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} - D^e_{ijkl}\langle\Phi\rangle G^{visc}_{kl}\left(\sigma^{-}, \xi_v^{-}\right)\Delta t, \xi_p^{-}\right) - \frac{\partial f^d}{\partial\sigma_{ij}} D^e_{ijkl} G_{kl}\left(\sigma^{-}, \xi_p^{-}\right)\Delta\lambda + \frac{\partial f^d}{\partial\xi_p}\Delta\xi_p = 0$$

On distingue les deux cas :

- $\Delta\xi_p = \Delta\gamma_p + \Delta\gamma_{vp}$ (cas dilatant : l'état de contraintes dépasse la limite contractance/dilatance)

$$f^d\left(\sigma_{ij}^{-} + D^e_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} - D^e_{ijkl}\langle\Phi\rangle G^{visc}_{kl}\left(\sigma^{-}, \xi_v^{-}\right)\Delta t, \xi_p^{-}\right) - \frac{\partial f^d}{\partial\sigma_{ij}} D^e_{ijkl} G_{kl}\left(\sigma^{-}, \xi_p^{-}\right)\Delta\lambda + \frac{\partial f^d}{\partial\xi_p}\left(\Delta\gamma_p + \Delta\gamma_{vp}\right) = 0$$

$$f^d\left(\sigma_{ij}^{-} + D^e_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} - D^e_{ijkl}\langle\Phi\rangle G^{visc}_{kl}\left(\sigma^{-}, \xi_v^{-}\right)\Delta t, \xi_p^{-}\right) =$$
$$\left(\frac{\partial f^d}{\partial\sigma_{ij}} D^e_{ijkl} G_{kl}(\sigma^{-}, \xi_p^{-}) - \frac{\partial f^d}{\partial\xi_p}\sqrt{\frac{2}{3}}G_{II}\left(\sigma^{-}, \xi_p^{-}\right)\Delta\lambda - \frac{\partial f^d}{\partial\xi_p}\Delta\gamma_{vp}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\Delta\lambda=\frac{f^d\left(\sigma_{ij}^-,\xi_p^-\right)+\frac{\partial f^d}{\partial \xi_p}\Delta\gamma_{vp}+\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}\left[D^e_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}-D^e_{ijkl}\langle\Phi\rangle G^{visc}_{kl}\left(\sigma^-,\xi^-_{vp}\right)\Delta t\right]}{\left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}D^e_{ijkl}G_{kl}\left(\sigma^-,\xi_p^-\right)-\frac{\partial f^d}{\partial \xi_p}\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{G}_{II}\left(\sigma^-,\xi_p^-\right)\right)}$$

- $\Delta\xi_p=\Delta\gamma_p$ (cas contractant : l'état de contraintes est en dessous de la limite contractance/dilatance)

$$\Delta\lambda=\frac{f^d\left(\sigma_{ij}^-,\xi_p^-\right)+\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}\left[D^e_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}-D^e_{ijkl}\langle\Phi\rangle G^{visc}_{kl}\left(\sigma^-,\xi^-_{vp}\right)\Delta t\right]}{\left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}D^e_{ijkl}G_{kl}\left(\sigma^-,\xi_p^-\right)-\frac{\partial f^d}{\partial \xi_p}\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{G}_{II}\left(\sigma^-,\xi_p^-\right)\right)}$$

avec $\Phi=A_v\left(\frac{f^{vp}\left(\sigma^e,\xi^-_{vp}\right)}{Pa}\right)^{n_v}$, A_v et n_v sont des paramètres du modèle.

4.2.2 Opérateur tangent

La contrainte à l'état $+$:

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^-+D^e_{ijkl}\Delta\epsilon^e_{kl}=\sigma_{ij}^-+D^e_{ijkl}\left(\Delta\epsilon_{kl}-\Delta\epsilon^p_{kl}-\Delta\epsilon^{vp}_{kl}\right)=$$
$$\sigma_{ij}^-+D^e_{ijkl}\left(\Delta\epsilon_{kl}-\Delta\lambda G_{kl}(\sigma^-,\xi_p^-)-\langle\Phi\rangle G^{visc}_{kl}(\sigma^-,\xi^-_{vp})\Delta t\right)$$

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}=D^e_{ijkl}-D^e_{ijmn}G^-_{mn}\frac{\partial\Delta\lambda}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}-D^e_{ijmn}G^{visc-}_{imn}\frac{\partial\langle\varphi\rangle}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}\Delta t$$

On distingue les deux cas :

- $\Delta\xi_p=\Delta\gamma_p$ (cas contractant : l'état de contraintes est en dessous du seuil caractéristique)
-

$$\Delta\lambda=\frac{f^d\left(\sigma_{ij}^-,\xi_p^-\right)+\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}\left[D^e_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}-D^e_{ijkl}\langle\Phi\rangle G^{visc}_{kl}\left(\sigma^-,\xi^-_{v}\right)\Delta t\right]}{\left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}D^e_{ijkl}G_{kl}\left(\sigma^-,\xi_p^-\right)-\frac{\partial f^d}{\partial \xi_p}\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{G}_{II}\left(\sigma^-,\xi_p^-\right)\right)}\quad\text{et}\quad\Phi=A_v\left(\frac{f^{vp}\left(\sigma^e,\xi^-_{vp}\right)}{Pa}\right)^{n_v}$$

$$\frac{\partial\Delta\lambda}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}=\frac{\frac{\partial f^d}{\partial\sigma_{ij}}.\left[D^e_{ijkl}-D^e_{ijmn}G^{visc}_{mn}\left(\sigma^-,\xi^-_v\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}\Delta t\right]}{\left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}D^e_{ijmn}G_{mn}\left(\sigma^-,\xi_p^-\right)-\frac{\partial f^d}{\partial \xi_p}\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{G}_{II}\left(\sigma^-,\xi_p^-\right)\right)}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}=\frac{A_v.n_v}{Patm}\left(\frac{f^{vp}\left(\sigma^e,\xi^-_{vp}\right)}{Patm}\right)^{n_v-1}.\frac{\partial f^{vp}}{\partial\sigma^e_{ij}}.\frac{\partial\sigma^e_{ij}}{\partial\Delta\varepsilon_{kl}}=\frac{A_v.n_v}{Patm}\left(\frac{f^{vp}\left(\sigma^e,\xi^-_{vp}\right)}{Patm}\right)^{n_v-1}.\frac{\partial f^{vp}}{\partial\sigma^e_{ij}}.D^e_{ijkl}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \Delta\varepsilon_{kl}} = D^e_{ijkl} - D^e_{ijmn}.G^-_{mn} \frac{\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}.\left[D^e_{ijkl} - D^e_{ijmn} G^{visc}_{mn}\left(\sigma^-, \xi^-_p\right)\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta\varepsilon_{kl}}\Delta t\right]}{\left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}} D^e_{ijkl} G_{kl}\left(\sigma^-, \xi^-_p\right) - \frac{\partial f^d}{\partial \xi_p}\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{G}_{II}\left(\sigma^-, \xi^-_p\right)\right)} -$$

$$D^e_{ijmn}.G^{visc-}_{mn} \frac{A_v.n_v}{Patm}\left(\frac{f^{vp}\left(\sigma^e, \xi^-_{vp}\right)}{Patm}\right)^{n_v-1}.\frac{\partial f^{vp}}{\partial \sigma^e_{ij}}.D^e_{ijkl}\Delta t$$

- $\Delta\xi_p = \Delta\gamma_p + \Delta\gamma_v$ (cas dilatant : l'état de contraintes dépasse le seuil caractéristique)

$$\Delta\lambda = \frac{f^d\left(\sigma^-_{ij}, \xi^-_p\right) + \frac{\partial f^d}{\partial \xi_p}\Delta\gamma_{vp} + \frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}\left[D^e_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} - D^e_{ijkl}\langle\Phi\rangle G^{visc}_{kl}\left(\sigma^-, \xi^-_{vp}\right)\Delta t\right]}{\left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}} D^e_{ijkl} G_{kl}\left(\sigma^-, \xi^-_p\right) - \frac{\partial f^d}{\partial \xi_p}\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{G}_{II}\left(\sigma^-, \xi^-_p\right)\right)}$$

$$\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \Delta\varepsilon_{kl}} = \frac{\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}.\left[D^e_{ijkl} - D^e_{ijmn} G^{visc}_{mn}\left(\sigma^-, \xi^-_p\right)\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta\varepsilon_{kl}}\Delta t\right] + \frac{\partial f^d}{\partial \xi_p}.\frac{\partial \Delta\gamma_{vp}}{\partial \Delta\varepsilon^{vp}_{kl}}.\frac{\partial \Delta\varepsilon^{vp}_{kl}}{\partial \Delta\sigma^e_{ij}}.D^e_{ijkl}}{\left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}} D^e_{ijmn} G_{mn}\left(\sigma^-, \xi^-_p\right) - \frac{\partial f^d}{\partial \xi_p}\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{G}_{II}\left(\sigma^-, \xi^-_p\right)\right)}$$

où :

$$\frac{\partial \Delta\gamma_{vp}}{\partial \Delta\varepsilon^{vp}_{kl}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\Delta\tilde{\varepsilon}^{vp}_{ij}.\Delta\tilde{\varepsilon}^{vp}_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}}.\frac{2}{3}.2.\Delta\tilde{\varepsilon}^{vp}_{ij}.\frac{\partial \Delta\tilde{\varepsilon}^{vp}_{ij}}{\partial \Delta\varepsilon^{vp}_{kl}} = \frac{2}{3}.\frac{\Delta\tilde{\varepsilon}^{vp}_{ij}}{\Delta\gamma_{vp}}.\left(\delta_{ik}.\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}.\delta_{kl}\right)$$

$$\frac{\partial \Delta\varepsilon^{vp}_{kl}}{\partial \Delta\sigma^e_{ij}} = \frac{n_v.A_v}{Patm}.\left(\frac{f^{vp}\left(\sigma^e, \xi^-_v\right)}{Patm}\right)^{n_v-1}.\frac{\partial f^{vp}}{\partial \sigma^e_{ij}}.G^{visc-}_{kl}\left(\sigma^-, \xi^-_{vp}\right)\Delta t$$

4.2.3 Algorithme de résolution dans Code_Aster

- Changement de signe des contraintes à l'état $-$ et de l'accroissement de la déformation :
  $\sigma^-_{L\wedge K} = -\sigma^-$
  $\Delta\varepsilon_{L\wedge K} = -\Delta\varepsilon$
- Calcul de la contrainte de prédiction élastique σ^e : $\sigma^e = \sigma^- + D^e\Delta\varepsilon$
- Vérification du signe du critère visqueux avec la variable visqueuse max : $f^{vp}\left(\sigma^e, \xi_{vp-\max}\right)$
- Si $f^{vp}\left(\sigma^e, \xi_{vp-\max}\right) > 0$: cas dilatant et écrouissage couplé $V_5 = 1$. On considère comme variable d'écrouissage du critère plastique le cumul entre la variable d'écrouissage plastique et la variable visqueuse : $\Delta\xi_p = \Delta\gamma_p + \Delta\gamma_{vp}$
- Si $f^{vp}\left(\sigma^e, \xi_{vp-\max}\right) < 0$: cas contractant et écrouissage non couplé $V_5 = 0$. La variable d'écrouissage du critère plastique est la variable plastique: $\Delta\xi_p = \Delta\gamma_p$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour le critère visqueux : $u^{vp}=A^{vp}\left(\xi_{vp}\right)s_{II}H\left(\theta\right)+B^{vp}\left(\xi_{vp}\right)I_1+D^{vp}\left(\xi_{vp}\right)$

Si $u^{vp}\left(\sigma^e,\xi_{vp}^-\right)<0$:

- si $-\frac{D^{vp}}{B^{vp}}<-\frac{D^d}{B^d}$ (Figure 4.2.3-a) alors redécoupage du pas de temps

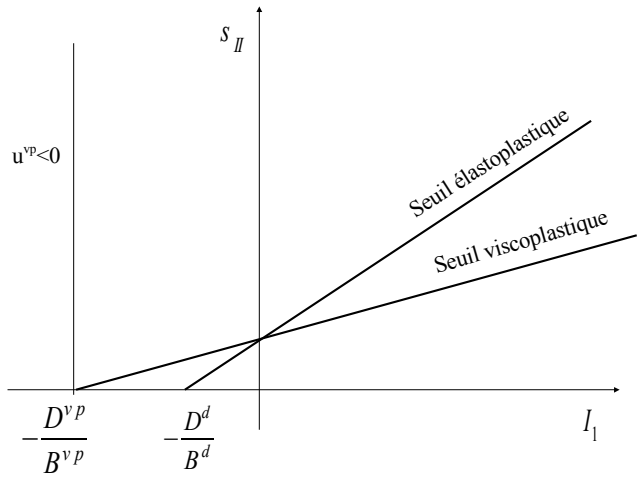
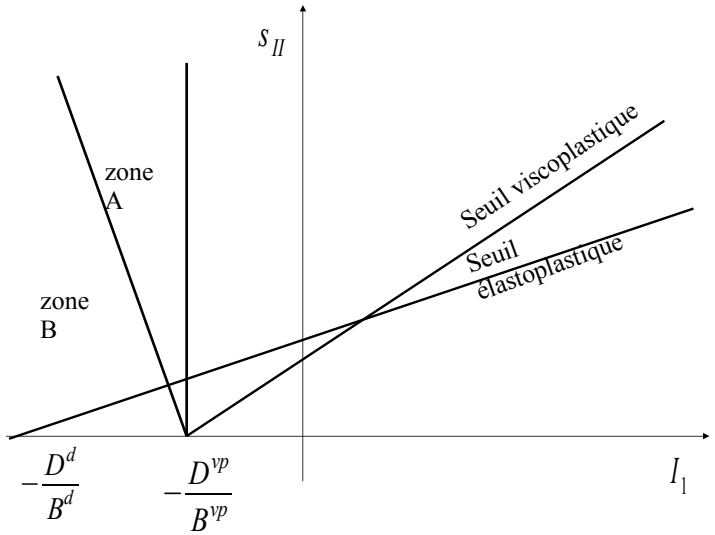


Figure 4.2.3-a. Représentation schématique dans le cas $u^{vp}\left(\sigma^e,\xi_{vp}^-\right)<0$, $-\frac{D^{vp}}{B^{vp}}<-\frac{D^d}{B^d}$

Sinon (Figure 4.2.3-b) deux cas se présentent :

- si σ^e se trouve dans la zone A alors $f^{vp}\left(\sigma^e\right)$ n'est pas définie mais on peut faire une projection géométrique (cf. remarque du paragraphe 3.3.3)
- si σ^e se trouve dans la zone B alors il faut faire une projection au sommet.

On se contente alors du message : « arrêt pour coefficients matériaux de la loi non cohérents ».



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Figure 4.2.3-b. Représentation schématique dans le cas $u^{vp}\left(\sigma^e, \xi_{vp}^-\right)<0$, $-\frac{D^d}{B^d}<-\frac{D^{vp}}{B^{vp}}$

Pour le critère élastoplastique :

$$u^d = A^d\left(\xi_p\right) s_{II}\, H(\theta) + B^d\left(\xi_p\right) I_1 + D^d\left(\xi_p\right)$$

Si $u^d\left(\sigma^e, \xi_p^-\right)<0$ alors il y a redécoupage du pas de temps

Pour le critère visqueux :

Si $f^{vp}\left(\sigma^e, \xi_{vp}^-\right)<0$ alors pas de fluage et $\Delta\varepsilon_{vp}=0$

- Si $f^{vp}\left(\sigma^e, \xi_{vp}^-\right)>0$ alors le fluage se développe selon la forme suivante :

$$\Delta\varepsilon_{vp} = A\left[\frac{\left\langle f^{vp}\left(\sigma^e, \xi_{vp}^-\right)\right\rangle}{Patm}\right]^{n_v} G^{visc}\left(\sigma^-, \xi_{vp}^-\right)\Delta t \quad \text{avec} \quad G^{visc} = \frac{\partial f^{vp}}{\partial \sigma} - \left(\frac{\partial f^{vp}}{\partial \sigma} n\right) n$$

$\langle\ \rangle$: Les crochets de Macauley

où $\sin(\Psi) = \mu_{0,v}\left(\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\lim}}{\xi_{0,v}\sigma_{\max} + \sigma_{\lim}}\right)$ (voir § 3.6.1), β' et n sont déduits

on peut déduire $\Delta\gamma_{vp} = \sqrt{\frac{2}{3}\Delta\tilde{\varepsilon}_{vp}.\Delta\tilde{\varepsilon}_{vp}} > 0$ où $\Delta\tilde{\varepsilon}_{vp} = \Delta\varepsilon_{vp} - \frac{tr\left(\Delta\varepsilon_{vp}\right)}{3} I^d$

réactualisation de la variable d'écrouissage du critère visqueux :

$\xi_{vp} = \xi_{vp}^- + \Delta\xi_{vp}$ avec $\Delta\xi_{vp} = Min\left[\Delta\gamma_{vp}, \xi_{v-\max} - \xi_{vp}^-\right]$

réactualisation des contraintes : $\sigma = \sigma^e - D^e\,\Delta\varepsilon_{vp}$

réactualisation des variables internes:

$V_1 = \xi_p = \xi_p^- + \Delta\gamma_{vp}$
$V_2 = \gamma_p = \gamma_p^-$
$V_3 = \xi_{vp} = \xi_{vp}^- + \Delta\xi_{vp}$
$V_4 = \gamma_{vp} = \gamma_{vp}^- + \Delta\gamma_{vp}$

Pour le critère élastoplastique :

- Si $f^d\left(\sigma^e - D^e\,\Delta\xi_{vp}, \xi_p^- + \Delta\gamma_{vp}\right)\le 0$ alors : $\Delta\gamma = \Delta\gamma_p = \Delta\xi_p = 0$
- Si $f^d\left(\sigma^e - D^e\,\Delta\varepsilon_{vp}, \xi_p^- + \Delta\gamma_{vp}\right)>0$ alors : $\Delta\tilde{\varepsilon}_p = \Delta\lambda G\left(\sigma^-, \xi_p^-\right)$ avec

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\sin(\Psi)=\mu_{0,v}\left(\frac{\sigma_{\max}-\sigma_{\lim}}{\xi_{0,v}\,\sigma_{\max}+\sigma_{\lim}}\right)$$ (voir § 3.6.1) si $0\leq\xi_p^-<\xi_{pic}$

$$\sin(\Psi)=\mu_1\left(\frac{\alpha-\alpha_{res}}{\xi_1\,\alpha-\alpha_{res}}\right)$$ (voir § 3.6.2) si $\xi_p^->\xi_{pic}$

$G=\frac{\partial f^d}{\partial\sigma}-\left(\frac{\partial f^d}{\partial\sigma}n\right)n$ β' et n sont déduits

On cherche $\Delta\lambda>0$ tel que $f^d\left(\sigma,\xi_p^-\right)=0$
On déduit $\Delta\gamma_p>0$

Si écrouissage non couplé (contractance) $f^d\left(\sigma^e-D^e\Delta\xi_{vp},\xi_p^-+\Delta\gamma_{vp}\right)\leq 0$ alors : $\Delta\xi_p=\Delta\gamma_p$

sinon écrouissage couplé (dilatance) $f^d\left(\sigma^e-D^e\Delta\varepsilon_{vp},\xi_p^-+\Delta\gamma_{vp}\right)>0$ alors : $\Delta\xi_p=\Delta\gamma_p+\Delta\gamma_{vp}$

On complète le tableau des variables internes :

$V_1=\xi_p=\xi_p^-+\Delta\xi_p$
$V_2=\gamma_p=\gamma_p^-+\Delta\gamma_p$

Mise à jour des contraintes :

$\Delta\varepsilon^{irr}=\Delta\varepsilon^{vp}+\Delta\varepsilon^p$
$\Delta\varepsilon^e=\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{irr}$
$\Delta\sigma=D^e\Delta\varepsilon^e$
$\sigma=\sigma^-+\Delta\sigma$

Résumé de l'algorithme

- $\sigma^e=\sigma^-+D^e\Delta\varepsilon$
- si $f^{vp}\left(\sigma^e,\xi_{v\max}\right)<0$ alors contractance ($VARV=0$) et la variable plastique est $\Delta\xi^p=\Delta\gamma^p$
- si $f^{vp}\left(\sigma^e,\xi_{v\max}\right)>0$ alors dilatance ($VARV=1$) et la variable plastique est $\Delta\xi^p=\Delta\gamma^p+\Delta\gamma^{vp}$

Vérification du fluage :

- calcul de $f^{vp}\left(\sigma^e,\xi_{vp}^-\right)$
- si $f^{vp}\left(\sigma^e,\xi_{vp}^-\right)<0$ (**Pas de fluage)**

$\Delta\xi_{vp}=\Delta\gamma_{vp}=0$
$\xi_{vp}=\xi_{vp}^-$
$\gamma_{vp}=\gamma_{vp}^-$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- si $f^{vp}\left(\sigma^e, \xi_{vp}^-\right) > 0$ (**fluage)**

  calcul de $\Delta\varepsilon_{vp}$ et de $\Delta\gamma_{vp}$ en fonction de σ^e et de ξ_{vp}^-

  $$\Delta\xi_{vp} = \min\left(\Delta\gamma_{vp}, \xi_{v-\max} - \xi_{vp}^-\right)$$
  $$\xi_{vp} = \xi_{vp}^- + \Delta\xi_{vp}$$
  $$\gamma_{vp} = \gamma_{vp}^- + \Delta\gamma_{vp}$$

- Ajustement de la prédiction élastique : $\sigma_n^e = \sigma^e - D^e \Delta\varepsilon_{vp}$

Vérification de la plasticité :

- calcul de $f^d\left(\sigma_n^e, \xi_p^- + \Delta\gamma_{vp}\right)$
- si $f^d\left(\sigma_n^e, \xi_p^- + \Delta\gamma_{vp}\right) < 0$ (Élasticité**)**

  $$\Delta\varepsilon_p = \Delta\gamma_p = 0$$
  $$\gamma_p = \gamma_p^-$$
  $$\xi_p = \xi_p^- + \Delta\xi_p \quad \text{avec}$$
  $$\Delta\xi_p = 0 \text{ si } VARV = 0$$
  $$\Delta\xi_p = \Delta\gamma_{vp} \text{ si } VARV = 1$$

  mise à jour des contraintes :
  $$\sigma = \sigma^e - D^e \Delta\varepsilon_{vp}$$

- si $f^d\left(\sigma_n^e, \xi_p^- + \Delta\gamma_{vp}\right) > 0$ (**Plasticité)**

  calcul de $\Delta\lambda$, $\Delta\gamma_p$ et $\Delta\varepsilon_p$

  $$\Delta\xi_p = \Delta\gamma_p \text{ si } VARV = 0$$
  $$\Delta\varepsilon_p = \Delta\gamma_p + \Delta\gamma_{vp} \text{ si } VARV = 1$$
  $$\xi_p = \xi_p^- + \Delta\xi_p$$

  mise à jour des contraintes :
  $$\sigma = \sigma^- + D^e\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_{vp} - \Delta\varepsilon_p\right)$$

  tableau des variables internes :
  $V1 = \xi_p$
  $V2 = \gamma_p$
  $V3 = \xi_{vp}$
  $V4 = \gamma_{vp}$
  $V5 = VARV$ (0 si contractance ou 1 si dilatance)
  $V6 =$ indicateur de viscosité
  $V7 =$ indicateur de plasticité

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Schéma d'intégration implicite

L'intégration du modèle LETK selon le schéma d'intégration implicite est réalisée sous environnement PLASTI . L'intégration du modèle LETK sous schéma implicite est actuellement disponible uniquement par calcul d'une matrice jacobienne locale perturbée ('NEWTON_PERT').

L'algorithme de résolution suit la logique suivante. Il utilise une prédiction élastique puis des itérations de correction si les seuils visqueux et/ou plastiques sont sollicités. Le schéma a pour but de produire la variation des contraintes et variables d'écrouissage sous l'effet d'un incrément de déformation.

La subdivision locale du modèle est activable sous ce schéma d'intégration par le mot-clé ITER_INTE_PAS du mot-clé facteur COMPORTEMENT , cf [U4.51.11]).

4.3.1 Phase de prédiction élastique

Cette phase est similaire à celle présentée en section 4.2.1 .
Le dépassement des seuils de plasticité et viscosité est testé par rapport à cet état de contraintes. L'expression des seuils testés est explicitée dans le § 3.2 .

- Si aucun des seuils n'est sollicité, la prédiction est considérée comme valide par rapport aux modèles. Une mise à jour des variables internes est entreprise pour afficher l'état d'activation des différents seuils.

- Si un seuil parmi les deux à considérer (plasticité et/ ou viscosité) est sollicité, la résolution d'un système local d'équations non linéaires doit s'initier. Les mécanismes de dissipation définis comme potentiellement actifs doivent conduire au dépassement des seuils associés (plasticité et/ou viscosité)

4.3.2 Phase de correction : équations non linéaires à résoudre

Cette étape consiste à résoudre le système d'équations locales non linéaires établi sur la base des mécanismes visqueux et/ou plastique. Après convergence, les contraintes et variables internes du modèle sont mises à jour.

Les inconnues du système d'équations non linéaires sont les contraintes σ_{n+1} , le multiplicateur plastique λ_{n+1}^{p} , la variable d'écrouissage plastique ξ_{n+1}^{p} et la variable d'écrouissage visqueuse ξ_{n+1}^{vp} .
Le vecteur des inconnu es comporte donc au maximum pour des modélisations $3D$ 9 inconnues.

Les équations non linéaires à résoudre sont les suivantes :

- L'équation d'état incrémentale, $E1$:

$$\underline{\sigma}_{n+1}-\underline{\sigma}_{n}-C^{e}\left(\underline{\sigma}_{n+1}\right):\left(\Delta\underline{\epsilon}-\Delta\lambda\,\underline{G}^{p}-\Phi\left(f^{vp}\right)\cdot\underline{G}^{vp}\right)=0$$

- La condition de Kuhn-Tucker, $E2$:

$$\begin{cases}\text{Si}\quad f^{d}\leqslant 0\quad\text{alors}\quad\Delta\lambda=0\\ \text{Si}\quad f^{d}=0\quad\text{alors}\quad\Delta\lambda>0\end{cases}$$

- L'évolution incrémentale de la variable d'écrouissage plastiques, $E3$:

$\xi_{n+1}^{p}-\xi_{n}^{p}-\Delta\xi^{p}=0$, avec $\Delta\xi^{p}$ évoluant suivant les conditions précisées au § 3.4.2 .

- L'évolution incrémentale de la variable d'écrouissage visco-plastique, $E4$:

$\xi_{n+1}^{vp}-\xi_{n}^{vp}-\Delta\xi^{vp}=0$, avec $\Delta\xi^{vp}$ évoluant suivant les conditions précisées au § 3.4.1 .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ces équations constituent un système carré $R(\Delta Y)$, où les inconnues sont $\Delta Y=(\Delta \underline{\sigma}, \Delta\lambda, \Delta\xi^p, \Delta\xi^{vp})$.
A l'itération j de la boucle de correction locale de Newton, on rés o ut l'équation matricielle suivante :

$$\frac{d\,R(\Delta Y^j)}{d(\Delta Y^j)}\cdot\delta(\Delta Y^{j+1})=-R(\Delta Y^j)$$

La matrice jacobienne $\frac{d\,R(\Delta Y^j)}{d(\Delta Y^j)}$, non symétrique, se construit de la façon suivante :

$$\frac{d\,R(\Delta Y^j)}{d(\Delta Y^j)}=\begin{bmatrix} \frac{\partial E1}{\partial \underline{\sigma}^j_{n+1}} & \frac{\partial E1}{\partial \Delta\lambda^j} & \frac{\partial E1}{\partial \xi^j_p} & \frac{\partial E1}{\partial \xi^j_{vp}} \\ \frac{E2}{\partial \underline{\sigma}^j_{n+1}} & \frac{E2}{\partial \Delta\lambda^j} & \frac{E2}{\partial \xi^j_p} & \frac{E2}{\partial \xi^j_{vp}} \\ \frac{E3}{\partial \underline{\sigma}^j_{n+1}} & \frac{E3}{\partial \Delta\lambda^j} & \frac{E3}{\partial \xi^j_p} & \frac{E3}{\partial \xi^j_{vp}} \\ \frac{E4}{\partial \underline{\sigma}^j_{n+1}} & \frac{E4}{\partial \Delta\lambda^j} & \frac{E4}{\partial \xi^j_p} & \frac{E4}{\partial \xi^j_{vp}} \end{bmatrix}$$

Cette matrice est aujourd'hui évaluée analytiquement ou par perturbation (`ALGO_INTE = 'NEWTON'` ou `ALGO_INTE = 'NEWTON_PERT'`).

Dans le but d'uniformiser les échelles entre les différentes équations à résoudre, on fait le choix de mettre à l'échelle de déformations l'équation E1 portant sur l'équation d'état incrémentale. On applique pour cela l'inverse du module de cisaillement d'élasticité non linéaire. Ce choix permet d'assurer une convergence plus uniforme sur l'ensemble du système.

La convergence est réputée acquise dès lors que $\|R(\Delta Y^j)\| <$ `RESI_INTE_RELA`. On s'assure également lorsque le mécanisme de plasticité est actif que le multiplicateur plastique est strictement positif. Si ce n'est pas le cas, l'intégration locale est relancée sans tenir compte du mécanisme de plasticité. Seul le mécanisme de viscosité peut alors être considéré.

4.3.2.1 Expression des termes de la matrice jacobienne

Les termes dérivés associés à (R_1) sont :

$$\frac{d(R_1)_{ij}}{d((\Delta Y_1)_{mn})}=I_{ilkl}-\frac{\partial C^e_{ijkl}}{\partial\sigma_{mn}}:\left[\Delta\epsilon_{kl}-\Delta\lambda\cdot G^p_{kl}-\Delta\epsilon^{vp}_{kl}\right]+\Delta\lambda\,C^e_{ijkl}:\frac{\partial G^p_{kl}}{\partial\sigma_{mn}}+$$
$$C^e_{ijkl}:G^{vp}_{kl}\otimes\frac{\partial\left(\langle\phi(f^{vp})\rangle^+\right)}{\partial\sigma_{mn}}\Delta t+\langle\phi(f^{vp})\rangle^+\cdot\Delta t\cdot C^e_{ijkl}:\frac{\partial G^{vp}_{kl}}{\partial\sigma_{mn}}$$

$$\frac{d(R_1)_{ij}}{d(\Delta Y_2)}=C^e_{ijkl}:G^p_{kl}$$

$$\frac{d(R_1)_{ij}}{d(\Delta Y_3)}=\Delta\lambda\cdot C^e_{ijkl}:\frac{\partial G^p_{kl}}{\partial\xi^p}$$

$$\frac{d(R_1)_{ij}}{d(\Delta Y_4)}=C^e_{ijkl}:\left[\frac{\partial\langle\phi(f^{vp})\rangle^+}{\partial\xi^{vp}}G^{vp}_{kl}+\langle\phi(f^{vp})\rangle^+\cdot\frac{\partial G^{vp}_{kl}}{\partial\xi^{vp}}\right]\cdot\Delta t$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les termes dérivés associés à (R_2) s e distinguent suivant l'expression prise pour satisfaire la condition de Kuhn-Tucker :

Si $(R_2)=\Delta\lambda$:

$$\frac{d(R_2)}{d((\Delta Y_1)_{ij})}=0_{ij}$$

$$\frac{d(R_2)}{d(\Delta Y_2)}=1$$

$$\frac{d(R_2)}{d(\Delta Y_3)}=0$$

$$\frac{d(R_2)}{d(\Delta Y_4)}=0$$

S i $(R_2)=f^p$:

$$\frac{d(R_2)}{d((\Delta Y_1)_{ij})}=\frac{\partial f^p}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$\frac{d(R_2)}{d(\Delta Y_2)}=0$$

$$\frac{d(R_2)}{d(\Delta Y_3)}=\frac{\partial f^p}{\partial \xi^p}$$

$$\frac{d(R_2)}{d(\Delta Y_4)}=0$$

Les termes dérivés associés à (R_3) sont :

$$\frac{d(R_3)}{d(\Delta Y_1)_{ij}}=-\Delta\lambda\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\partial \tilde{G}_{II}^p}{\partial \sigma_{ij}}$$ (cas contract ant : l'état de contraintes est en dessous du seuil caractéristique)

$$\frac{d(R_3)}{d(\Delta Y_1)_{ij}}=-\Delta\lambda\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\partial \tilde{G}_{II}^p}{\partial \sigma_{ij}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\Delta t\cdot\left[\left(\tilde{G}_{II}^{vp}\cdot\frac{\partial\langle\Phi(f^{vp})\rangle^+}{\partial\sigma_{ij}}+\langle\Phi(f^{vp})\rangle^+\cdot\frac{\partial\tilde{G}_{II}^{vp}}{\partial\sigma_{ij}}\right)\right]$$ (cas dilatant : l'état de contraintes dépasse le seuil caractéristique)

$$\frac{d(R_3)}{d(\Delta Y_2)}=-\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\tilde{G}_{II}^p$$

$$\frac{d(R_3)}{d(\Delta Y_3)}=1-\Delta\lambda\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\partial\tilde{G}_{II}^p}{\partial\xi^p}$$

$$\frac{d(R_3)}{d(\Delta Y_4)}=-\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\Delta t\cdot\left(\frac{\partial\langle\Phi(f^{vp})\rangle^+}{\xi^{vp}}\cdot\tilde{G}_{II}^{vp}+\langle\Phi(f^{vp})\rangle^+\cdot\frac{\partial\tilde{G}_{II}^{vp}}{\xi^{vp}}\right)$$ (cas dilatant : l'état de contraintes dépasse le seuil caractéristique)

Les termes dérivés associés à (R_4) sont :

$$\frac{d(R_4)}{d(\Delta Y_1)_{ij}}=-\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\Delta t\cdot\left(\frac{\partial\langle\Phi(f^{vp})\rangle^+}{\sigma_{ij}}\cdot\tilde{G}_{II}^{vp}+\langle\Phi(f^{vp})\rangle^+\cdot\frac{\partial\tilde{G}_{II}^{vp}}{\sigma_{ij}}\right)$$ si $\dot{\gamma}^{vp}\leqslant\xi_{\max}^{vp}-\xi^{vp}(t^-)$

$$\frac{d(R_4)}{d(\Delta Y_2)}=0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{d\left(R_4\right)}{d\left(\Delta Y_3\right)}=0$$

$$\frac{d\left(R_4\right)}{d\left(\Delta Y_4\right)}=1-\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\Delta t\cdot\left(\frac{\partial\left\langle\phi\left(f^{vp}\right)\right\rangle^{+}}{\xi^{vp}}\cdot\tilde{G}_{II}^{vp}+\left\langle\phi\left(f^{vp}\right)\right\rangle^{+}\cdot\frac{\partial\tilde{G}_{II}^{vp}}{\xi^{vp}}\right)$$

L'expression détaillée de l'ensemble des termes mis en jeu dépend des dérivées principales suivantes :

$$\frac{d\,C_{ijkl}^{e}}{d\,\sigma_{mn}}\ ;\ \frac{d\,G_{ij}^{p}}{d\,\sigma_{kl}}\ ;\ \frac{d\left\langle\phi\left(f^{vp}\right)\right\rangle^{+}}{d\,\sigma_{ij}}\ ;\ \frac{d\,G_{ij}^{vp}}{d\,\sigma_{kl}}\ ;\ \frac{d\,\tilde{G}_{II}^{p}}{d\,\sigma_{ij}}\ ;\ \frac{d\,\tilde{G}_{II}^{vp}}{d\,\sigma_{ij}}\ ;$$

$$\frac{d\,G_{ij}^{p}}{d\,\xi^{p}}\ ;\ \frac{d\,\tilde{G}_{II}^{p}}{d\,\xi^{p}}\ ;$$

$$\frac{d\left\langle\phi\left(f^{vp}\right)\right\rangle^{+}}{d\,\xi^{vp}}\ ;\ \frac{d\,G_{ij}^{vp}}{d\,\xi^{vp}}\ ;\ \frac{d\,\tilde{G}_{II}^{vp}}{d\,\xi^{vp}}\ .$$

Les quantités mentionnées ci-dessus sont présentées en annexe du document.

4.3.3 Phase de mise à jour

La mise à jour du vecteur solution est réalisée selon l'opération suivante :

$$\Delta Y=\Delta Y^{j+1}=\Delta Y^{j}+\delta\Delta Y^{j+1}$$

Cette phase de mise à jour consiste à reporter l'évolution des contraintes, déformations plastiques, déformations visco-plastiques et paramètres d'écrouissage plastique et visco-plastique.

4.3.4 Opérateur tangent en vitesse

L'opérateur tangent en vitesse a d'ores et déjà été présenté dans le cadre du schéma d'intégration explicite. Cet opérateur de rigidité est utilisé lors des prédictions à l'échelle globale de Newton-Raphson en matrice tangente (`PREDICTION='TANGENTE'`). Les sources fortran associées à la onstruction de cet opérateur sont communes aux deux schémas d'intégration (`ALGO_INTE = ('NEWTON','SPECIFIQUE')`).

4.3.5 Opérateur tangent consistant

Sur la base des développements analytiques précisés dans le document [R5.03.12], il est possible de déterminer l'opérateur tangent $\boldsymbol{M}_c=\frac{\partial\sigma}{\partial\epsilon}$ à partir des termes de la matrice jacobienne définie ci-dessus, § 4.3.2 ($J=\frac{d\,R}{d\,Y}$).

En effet, le système $\Phi\left(\Delta Y\right)=0$ est vérifié en fin d'incrément et pour une petite variation de Φ , en considérant cette fois ϵ comme une variable, le système reste à l'équilibre et donc on vérifie $d\,\Phi=0$.
Par différenciation, on obtient :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\epsilon}d\left(\Delta\epsilon\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\sigma}d\left(\Delta\sigma\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\lambda}d\left(\Delta\lambda\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\xi_p}d\left(\Delta\xi_p\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\xi_{vp}}d\left(\Delta\xi_{vp}\right)=0$$

On ré-écrit le système en mettant les termes en ϵ dans le membre de droite :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\epsilon}d\left(\Delta\epsilon\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\sigma}d\left(\Delta\sigma\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\lambda}d\left(\Delta\lambda\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\xi_p}d\left(\Delta\xi_p\right)=-\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\xi_{vp}}d\left(\Delta\xi_{vp}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ce système peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$J \cdot d(\Delta Y) = -\frac{\partial \Phi}{\partial(\Delta \epsilon)} d(\Delta \epsilon) \text{ avec } \frac{\partial \Phi}{\partial(\Delta \epsilon)} = \left\{-C^e(\sigma), 0, 0, 0\right\}$$

Finalement, on obtient : $J \cdot d(\Delta Y) = \left\{C^e(\sigma) : \Delta \epsilon, 0, 0, 0\right\}$

On écrit ensuite le système par blocs en séparant $d(\Delta \sigma)$ des autres variables $Z = \left(\Delta \lambda, \Delta \xi_p, \Delta \xi_{vp}\right)$, ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} J_{\sigma\sigma} & J_{\sigma Z} \\ J_{Z\sigma} & J_{ZZ} \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} \Delta \sigma \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^e(\sigma) d(\Delta \epsilon) \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'expression de l'opérateur tangent devient :

$$\boldsymbol{M}_c = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} = \frac{d(\Delta \sigma)}{d(\Delta \epsilon)} = \left[J_{\sigma\sigma} - J_{\sigma Z} \left(J_{ZZ}\right)^{-1} J_{Z\sigma}\right]^{-1} C^e(\sigma)$$

Remarque : La matrice Jacobienne n'étant pas symétrique, l'opérateur tangent $\boldsymbol{M}_c$ ne l'est pas non plus.

5 Références

R 1 . Le modèle « L&K » pour Code_Aster. IH-HAVL-SIO-00015-A.

R 2 . Le modèle « L&K » pour Code_Aster. IH-HAVL-SIO-00015-B.

R3. Réunion sur le modèle viscoplastique L&K du CIH simplifié pour Code_Aster. CR-AMA-2007-142.

R 4 . Modélisation numérique du comportement des ouvrages souterrains par une approche viscoplastique. Thèse présentée à l'INPL par A. Kleine, novembre 2007.

6 Fonctionnalités et vérification

Ce document concerne la loi de comportement `LETK` (mot clé `COMPORTEMENT` de `STAT_NON_LINE`) et le matériau associé `LETK` (commande `DEFI_MATERIAU`).

Ce comportement est vérifié par les deux cas tests :
- SSNV206 - Essai triaxial avec le modèle LETK du CIH - [V6.04.206]
- WTNV135 - Essai triaxial drainé avec le modèle LETK du CIH - [V7.31.135]

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
9.2	J.El-Gharib, C .Chavant, EDF-R&D/AMA F.Laigle, A.Kleine EDF-CIH	Texte initial
11.2	A.Foucault	Algorithme d'intégration par schéma implicite
11.3	A.Foucault	Développement analytique de la matrice jacobienne DR/DY

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Annexes : Termes de la matrice jacobienne

Évaluation des termes relatifs à $\frac{d\left(R_1\right)_{ij}}{d\left(\left(\Delta Y_1\right)_{mn}\right)}$:

$$\frac{d\left(R_1\right)_{ij}}{d\left(\left(\Delta Y_1\right)_{mn}\right)}=I_{ilkl}-\frac{\partial C^e_{ijkl}}{\partial \sigma_{mn}}:\left[\Delta \epsilon_{kl}-\Delta \lambda\cdot G^p_{kl}-\Delta \epsilon^{vp}_{kl}\right]+\Delta \lambda\, C^e_{ijkl}:\frac{\partial G^p_{kl}}{\partial \sigma_{mn}}+$$

$$C^e_{ijkl}:G^{vp}_{kl}\otimes\frac{\partial\left(\left\langle \phi\left(f^{vp}\right)\right\rangle^{+}\right)}{\partial \sigma_{mn}}\Delta t+\left\langle \phi\left(f^{vp}\right)\right\rangle^{+}\cdot\Delta t\cdot C^e_{ijkl}:\frac{\partial G^{vp}_{kl}}{\partial \sigma_{mn}}$$

$$\frac{\partial C^e_{ijkl}}{\partial \sigma_{mn}}=\frac{n_{elas}}{I_1}\cdot C^e_{ijkl}\otimes\delta_{mn}$$

$$\frac{\partial G^p_{ij}}{\partial \sigma_{kl}}=\frac{\partial}{\sigma_{kl}}\left(\frac{\partial f^p}{\partial \sigma_{ij}}\right)-\left(\frac{\partial}{\sigma_{kl}}\left(\frac{\partial f^p}{\partial \sigma_{ij}}\right):n_{mn}\right)\otimes n_{ij}-\left(\frac{\partial f^p}{\partial \sigma_{mn}}:\frac{\partial n_{mn}}{\partial \sigma_{kl}}\right)\otimes n_{ij}-\left(\frac{\partial f^p}{\partial \sigma_{mn}}:n_{mn}\right)\cdot\frac{\partial n_{ij}}{\partial \sigma_{kl}}$$

$$\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}=$$

avec $\frac{\partial\left(s_{II}H(\theta)\right)}{\partial \sigma_{ij}}-a^d\left(\xi_p\right)\sigma_c H^c_0\left[A^d\left(\xi_p\right)s_{II}H(\theta)+B^d\left(\xi_p\right)I_1+D^d\left(\xi_p\right)\right]^{a^d\left(\xi_p\right)-1}$ soit

$$\left(A^d\left(\xi_p\right)\frac{\partial\left(s_{II}H(\theta)\right)}{\partial \sigma_{ij}}+B^d\left(\xi_p\right)I_d\right)$$

$$\frac{\partial}{\sigma_{kl}}\left(\frac{\partial f^p}{\partial \sigma_{ij}}\right)=\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}}\left(\frac{\partial s_{II}H(\theta)}{\partial \sigma_{ij}}\right)-a^d\left(\xi^p\right)\sigma_c H^c_0\left[A^d\left(\xi^p\right)s_{II}H(\theta)+B^d\left(\xi^p\right)I_1+D^d\left(\xi^p\right)\right]^{a^d\left(\xi^p\right)-1}$$

$$\cdot A^d\left(\xi^p\right)\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}}\left(\frac{\partial s_{II}H(\theta)}{\partial \sigma_{ij}}\right)-a^d\left(\xi^p\right)\left(a^d\left(\xi^p\right)-1\right)\sigma_c H^c_0\left(A^d\left(\xi^p\right)s_{II}H(\theta)+B^d\left(\xi^p\right)I_1+D^d\left(\xi^p\right)\right)^{a^d\left(\xi^p\right)-2}$$

$$\left(A^d\left(\xi^p\right)\frac{\partial s_{II}H(\theta)}{\partial \sigma_{ij}}+B^d\left(\xi^p\right)\delta_{ij}\right)\otimes\left(A^d\left(\xi^p\right)\frac{\partial s_{II}H(\theta)}{\partial \sigma_{kl}}+B^d\left(\xi^p\right)\delta_{kl}\right)$$

Or $\frac{\partial\left(s_{II}H(\theta)\right)}{\partial \sigma_{ij}}=\left(\left(\frac{H^c_0-H^e_0}{h^c_0-h^e_0}\right)\frac{\partial h(\theta)}{\partial s_{kl}}s_{II}+H(\theta)\frac{s_{kl}}{s_{II}}\right).\left(\delta_{ik}.\delta_{jl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}.\delta_{kl}\right)$ d'où

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}}\left(\frac{\partial s_{II}H(\theta)}{\partial \sigma_{ij}}\right)=\left(\frac{H^c_0-H^e_0}{h^c_0-h^e_0}\right)\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}}\left(\frac{\partial h(\theta)}{\partial s_{mn}}\right)s_{II}\frac{\partial s_{mn}}{\partial \sigma_{ij}}+\left(\frac{H^c_0-H^e_0}{h^c_0-h^e_0}\right)\frac{\partial h(\theta)}{\partial s_{mn}}\frac{\partial s_{mn}}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial s_{II}}{\partial s_{pq}}\frac{\partial s_{pq}}{\partial \sigma_{kl}}+$$

$$\frac{\partial H(\theta)}{\partial \sigma_{kl}}\frac{s_{mn}}{s_{II}}\frac{\partial s_{mn}}{\partial \sigma_{ij}}+\frac{H(\theta)}{s_{II}}\frac{\partial s_{mn}}{\partial \sigma_{kl}}\frac{\partial s_{mn}}{\partial \sigma_{ij}}-\frac{H(\theta)s_{mn}}{s^2_{II}}\frac{\partial s_{II}}{\partial s_{pq}}\frac{\partial s_{pq}}{\partial \sigma_{kl}}\frac{\partial s_{mn}}{\partial \sigma_{ij}}$$

On a de plus $\frac{\partial h(\theta)}{\partial s_{kl}}=\frac{\gamma\cos(3\theta)}{6h(\theta)^5}\frac{3s_{kl}}{s^2_{II}}-\frac{\gamma\sqrt{54}}{6h(\theta)^5 s^3_{II}}\left(\frac{\partial\det(\underline{s})}{\partial s_{kl}}\right)$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}}\left(\frac{\partial h(\theta)}{\partial s_{mn}}\right)=\frac{\partial}{\partial s_{pq}}\left(\frac{\partial h(\theta)}{\partial s_{mn}}\right)\frac{\partial s_{pq}}{\partial \sigma_{kl}}$$

$$\frac{\partial}{\partial s_{pq}}\left(\frac{\partial h(\theta)}{\partial s_{mn}}\right)=\frac{\sqrt{54}\gamma}{2h^5(\theta)s_{II}^5}s_{mn}\otimes\frac{\partial det(s_{ij})}{\partial s_{pq}}-\frac{3\gamma\sqrt{54}det(s_{ij})}{2h^5(\theta)s_{II}^7}s_{mn}\otimes s_{pq}+\frac{\gamma\cos 3\theta}{2h^5(\theta)s_{II}^2}I_{mnpq}-$$
$$\frac{\gamma\cos 3\theta}{h^5(\theta)s_{II}^4}s_{mn}\otimes s_{pq}-\frac{5\gamma\cos 3\theta}{2h^6(\theta)s_{II}^2}s_{mn}\otimes\frac{\partial h(\theta)}{\partial s_{pq}}+\frac{5\gamma\sqrt{54}}{6s_{II}^3h^6(\theta)}\frac{\partial det(s_{ij})}{\partial s_{mn}}\otimes\frac{\partial h(\theta)}{\partial s_{pq}}+$$
$$\frac{\gamma\sqrt{54}}{2h^5(\theta)s_{II}^5}\frac{\partial det(s_{ij})}{\partial s_{mn}}\otimes s_{pq}-\frac{\gamma\sqrt{54}}{6h^5(\theta)s_{II}^3}\frac{\partial^2 det(s_{ij})}{\partial s_{mn}\partial s_{pq}}$$

avec

$$\frac{\partial^2 det(s_{ij})}{\partial s_{mn}\partial s_{pq}}=\begin{bmatrix}0 & s_{33} & s_{22} & 0 & 0 & -\sqrt{2}s_{23}\\ s_{33} & 0 & s_{11} & 0 & -\sqrt{2}s_{13} & 0\\ s_{22} & s_{11} & 0 & -\sqrt{2}s_{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{2}s_{12} & -s_{33} & s_{13} & s_{23}\\ 0 & -\sqrt{2}s_{13} & 0 & s_{13} & -s_{11} & s_{12}\\ -\sqrt{2}s_{23} & 0 & 0 & s_{23} & s_{12} & -s_{22}\end{bmatrix}$$

On rappelle que $n_{ij}=\frac{\beta'\frac{s_{ij}}{s_{II}}-\delta_{ij}}{\sqrt{\beta'^2+3}}$ et $\beta'=-\frac{2\sqrt{6}\sin(\Psi)}{3-\sin(\Psi)}$

$$\frac{\partial n_{ij}}{\partial \sigma_{kl}}=\frac{\left[\frac{\partial\beta'}{\partial\sigma_{kl}}\frac{s_{ij}}{s_{II}}+\frac{\beta'}{s_{II}}\frac{\partial s_{ij}}{\partial\sigma_{kl}}-\frac{\beta' s_{ij}}{s_{II}^2}\frac{\partial s_{II}}{\partial\sigma_{kl}}\right](\beta'^2+3)-\beta'\left(\beta'\frac{s_{ij}}{s_{II}}-\delta_{ij}\right)\otimes\frac{\partial\beta'}{\partial\sigma_{kl}}}{(\beta'^2+3)\sqrt{\beta'^2+3}}$$

$$\frac{\partial\beta'}{\partial\sigma_{kl}}=\frac{\partial\beta'}{\partial s_{mn}}\frac{\partial s_{mn}}{\partial\sigma_{kl}}+\frac{\partial\beta'}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial\sigma_{kl}}$$

$$\frac{\partial\beta'}{\partial s_{mn}}=\frac{-6\sqrt{6}}{(3-\sin\psi)^2}\frac{\partial\sin\psi}{\partial s_{mn}}\quad\text{et}\quad\frac{\partial\beta'}{\partial I_1}=\frac{-6\sqrt{6}}{(3-\sin\psi)^2}\frac{\partial\sin\psi}{\partial I_1}$$

Distinction des expressions entre le comportement pré-pic ou visco-plastique et post-pic

Expression des dérivées en pré-pic ou visco-plastique

$$\frac{\partial\sin\psi}{\partial s_{mn}}=\frac{\partial\sin\psi}{\partial\sigma_{max}}\frac{\partial\sigma_{max}}{\partial s_{mn}}+\frac{\partial\sin\psi}{\partial\sigma_{\lim}}\frac{\partial\sigma_{\lim}}{\partial s_{mn}}$$
$$=\mu_{0,v}\left(\frac{(1+\xi_{0,v})\sigma_{\lim}}{(\xi_{0,v}\sigma_{max}+\sigma_{\lim})^2}\frac{\partial\sigma_{max}}{\partial s_{mn}}-\frac{(1+\xi_{0,v})\sigma_{\max}}{(\xi_{0,v}\sigma_{max}+\sigma_{\lim})^2}\frac{\partial\sigma_{\lim}}{\partial s_{mn}}\right)$$

et

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\partial \sin\psi}{\partial I_1} = \frac{\partial \sin\psi}{\partial \sigma_{max}}\frac{\partial \sigma_{max}}{\partial I_1}+\frac{\partial \sin\psi}{\partial \sigma_{\lim}}\frac{\partial \sigma_{\lim}}{\partial I_1}$$
$$= \frac{\mu_{0,v}}{3}\left(\frac{\left(1+\xi_{0,v}\right)\sigma_{\lim}}{\left(\xi_{0,v}\sigma_{max}+\sigma_{\lim}\right)^2}-\frac{\left(1+m_{v,\max}\right)\left(1+\xi_{0,v}\right)\sigma_{\max}}{\left(\xi_{0,v}\sigma_{max}+\sigma_{\lim}\right)^2}\right)$$

$$\frac{\partial \sigma_{max}}{\partial s_{mn}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left[\frac{s_{II}}{H_0^c-H_0^e}\frac{\partial H(\theta)}{\partial s_{mn}}+\left(\frac{3}{2}+\frac{2H(\theta)-\left(H_0^c+H_0^e\right)}{2\left(H_0^c-H_0^e\right)}\right)\frac{s_{mn}}{s_{II}}\right] \text{ et } \frac{\partial \sigma_{max}}{\partial I_1}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\lim}}{\partial s_{mn}}=\frac{\left(1+m_{v,\max}\right)}{\sqrt{6}}\left[\frac{s_{II}}{H_0^c-H_0^e}\frac{\partial H(\theta)}{\partial s_{mn}}-\left(\frac{3}{2}-\frac{2H(\theta)-\left(H_0^c+H_0^e\right)}{2\left(H_0^c-H_0^e\right)}\right)\frac{s_{mn}}{s_{II}}\right] \text{ et } \frac{\partial \sigma_{\lim}}{\partial I_1}=\frac{\left(1+m_{v,\max}\right)}{3}$$

Expression des dérivées en post-pic pour la loi de dilatance plastique

$$\frac{\partial \sin\psi}{\partial s_{mn}}=\frac{\partial \sin\psi}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_{min}}\frac{\partial \sigma_{min}}{\partial s_{mn}}+\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_{max}}\frac{\partial \sigma_{max}}{\partial s_{mn}}\right)$$

et

$$\frac{\partial \sin\psi}{\partial I_1}=\frac{\partial \sin\psi}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_{min}}\frac{\partial \sigma_{min}}{\partial I_1}+\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_{max}}\frac{\partial \sigma_{max}}{\partial I_1}\right)$$

$$\frac{\partial \sin\psi}{\partial s_{mn}}=\mu_1\frac{\left(1+\xi_1\right)\alpha_{res}}{\left(\xi_1\alpha+\alpha_{res}\right)^2}\left(-\frac{\sigma_{max}+\tilde{\sigma}}{\left(\sigma_{min}+\tilde{\sigma}\right)^2}\frac{\partial \sigma_{min}}{\partial s_{mn}}+\frac{1}{\sigma_{min}+\tilde{\sigma}}\frac{\partial \sigma_{max}}{\partial s_{mn}}\right)$$

et

$$\frac{\partial \sin\psi}{\partial I_1}=\frac{\mu_1\alpha_{res}\left(1+\xi_1\right)\left(\sigma_{min}-\sigma_{max}\right)}{3\left(\xi_1\alpha+\alpha_{res}\right)^2\left(\sigma_{min}+\tilde{\sigma}\right)^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{min}}{\partial s_{mn}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left[\frac{s_{II}}{H_0^c-H_0^e}\frac{\partial H(\theta)}{\partial s_{mn}}-\left(\frac{3}{2}-\frac{2H(\theta)-\left(H_0^c+H_0^e\right)}{2\left(H_0^c-H_0^e\right)}\right)\frac{s_{mn}}{s_{II}}\right] \text{ et } \frac{\partial \sigma_{min}}{\partial I_1}=\frac{1}{3}$$

L'évaluation du terme $\frac{\partial G_{ij}^{vp}}{\partial \sigma_{kl}}$ est identique à celle de $\frac{\partial G_{ij}^{p}}{\partial \sigma_{kl}}$ aux distinctions près déjà précisées ci-dessus.

On aborde à présent l'évaluation du terme $\frac{\partial\left(\langle\Phi\left(f^{vp}\right)\rangle^+\right)}{\partial \sigma_{mn}}$ avec $\Phi\left(f^{vp}\right)=A_v\left(\frac{f^{vp}}{Pa}\right)^{n_v}$.

On obtient alors :

$$\frac{\partial\left(\langle\Phi\left(f^{vp}\right)\rangle^+\right)}{\partial \sigma_{mn}}=\frac{\partial f^{vp}}{\partial \sigma_{mn}}\cdot\frac{A_v n_v}{P_{\text{atm}}}\left(\frac{f^{vp}}{P_{\text{atm}}}\right)^{n_v-1}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Évaluation des termes relatifs à $\frac{d\left(R_1\right)_{ij}}{d\left(\Delta Y_3\right)}=\Delta\lambda\cdot C^e_{ijkl}:\frac{\partial G^p_{kl}}{\partial\xi^p}$:

$$\frac{\partial G^p_{ij}}{\partial\xi^p}=\frac{\partial}{\xi^p}\left(\frac{\partial f^p}{\partial\sigma_{ij}}\right)-\left(\frac{\partial}{\xi^p}\left(\frac{\partial f^p}{\partial\sigma_{ij}}\right):n_{mn}\right)\otimes n_{ij}-\left(\frac{\partial f^p}{\partial\sigma_{mn}}:\frac{\partial n_{mn}}{\partial\xi^p}\right)\otimes n_{ij}-\left(\frac{\partial f^p}{\partial\sigma_{mn}}:n_{mn}\right)\cdot\frac{\partial n_{ij}}{\partial\xi^p}$$

avec

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\xi^p}\left(\frac{\partial f^p}{\partial\sigma_{ij}}\right)=&\frac{\partial a^d}{\partial\xi^p}\sigma_c H_0^c\left(A^d s_{II}H(\theta)+B^d I_1+D^d\right)^{a^d-1}\cdot\left(A^d\frac{\partial\left(s_{II}H(\theta)\right)}{\partial\sigma_{ij}}+B^d\delta_{ij}\right)\\&-a^d\sigma_c H_0^c\left\{\frac{\partial a^d}{\xi^p}\ln\left(A^d s_{II}H(\theta)+B^d I_1+D^d\right)\ldots\right.\\&\left.\ldots+\frac{\left(a^d-1\right)}{A^d s_{II}H(\theta)+B^d I_1+D^d}\left(\frac{\partial A^d}{\partial\xi^p}s_{II}H(\theta)+\frac{\partial B^d}{\partial\xi^p}I_1+\frac{\partial D^d}{\partial\xi^p}\right)\right\}\cdot\\&\left(A^d s_{II}H(\theta)+B^d I_1+D^d\right)^{a^d-1}\left[A^d\frac{\partial\left(s_{II}H(\theta)\right)}{\partial\sigma_{ij}}+B^d\delta_{ij}\right]\\&-a^d\sigma_c H_0^c\left[A^d s_{II}H(\theta)+B^d I_1+D^d\right]^{a^d-1}\cdot\left(\frac{\partial A^d}{\partial\xi^p}\frac{\partial\left(s_{II}H(\theta)\right)}{\sigma_{ij}}+\frac{\partial B^d}{\partial\xi^p}\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_{kl}}{\xi^p}&=\frac{\partial n_{kl}}{\partial\beta'}\frac{\partial\beta'}{\partial\xi^p}\\&=\frac{\left(\frac{s_{kl}}{s_{II}}\left(\beta'^2+3\right)-2\beta'^2\frac{s_{kl}}{s_{II}}+2\beta'\delta_{kl}\right)}{\left(\beta'^2+3\right)^{3/2}}\frac{\partial\beta'}{\partial\xi^p}\\&=\frac{\left(\frac{s_{kl}}{s_{II}}\left(\beta'^2+3\right)-2\beta'^2\frac{s_{kl}}{s_{II}}+2\beta'\delta_{kl}\right)}{\left(\beta'^2+3\right)^{3/2}}\frac{-6\sqrt{6}\sin\psi}{\left(3-\sin\psi\right)^2}\frac{\partial\sin\psi}{\partial\xi^p}\end{aligned}$$

- si la loi de dilatance suivie correspond au domaine pré-pic, $\frac{\partial\sin\psi}{\partial\xi^p}=0$
- si la loi de dilatance suivie correspond au domaine post-pic, les opérations suivantes sont nécessaires :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\partial \sin\psi}{\partial \xi^p} = \frac{\partial \sin\psi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi^p} = \mu_1 \frac{\left(1+\xi_1\right)\alpha_{res}}{\left(\xi_1\alpha+\alpha_{res}\right)^2}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi^p} = \mu_1 \frac{\left(1+\xi_1\right)\alpha_{res}}{\left(\xi_1\alpha+\alpha_{res}\right)^2}\frac{\left(\sigma_{min}-\sigma_{max}\right)}{\left(\sigma_{min}+\tilde{\sigma}\right)^2}\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \xi^p}$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \xi^p} = \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{c}}\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \xi^p}+\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tan(\phi)}\frac{\partial \tan(\phi)}{\partial \xi^p} = \frac{1}{\tan(\phi)}\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \xi^p}-\frac{\tilde{c}}{\tan(\phi)^2}\frac{\partial \tan(\phi)}{\partial \xi^p}$$

avec

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \xi^p}=\frac{\left(\sigma_c\left(s^d\right)^{a^d}\left[\frac{\partial a^d}{\partial \xi^p}\ln\left(s^d\right)+\frac{a^d}{s^d}\frac{\partial s^d}{\partial \xi^p}\right]\right)}{2\sqrt{1+a^d m^d\left(s^d\right)^{a^d-1}}}+\ldots$$

$$\ldots\frac{\sigma_c\left(s^d\right)^{a^d}\left(\frac{\partial a^d}{\partial \xi^p}m^d\left(s^d\right)^{a^d-1}+a^d\frac{\partial m^d}{\partial \xi^p}\left(s^d\right)^{a^d-1}+a^d m^d\left(\frac{\partial a^d}{\partial \xi^p}\ln s^d+\frac{a^d-1}{s^d}\frac{\partial s^d}{\partial \xi^p}\right)\left(s^d\right)^{a^d-1}\right)}{4\left(1+a^d m^d\left(s^d\right)^{a^d-1}\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial \tan\phi}{\partial \xi^p} = \left(1+\tan^2\phi\right)\frac{\partial \phi}{\partial \xi^p} = \frac{\left(1+\tan^2\phi\right)\left[\frac{\partial a^d}{\partial \xi^p}m^d\left(s^d\right)^{a^d-1}+a^d\frac{\partial m^d}{\partial \xi^p}\left(s^d\right)^{a^d-1}+a^d m^d\left(s^d\right)^{a^d-1}\left(\frac{\partial a^d}{\partial \xi^p}\ln s^d+\frac{a^d-1}{s^d}\frac{\partial s^d}{\partial \xi^p}\right)\right]}{\left(2+a^d m^d\left(s^d\right)^{a^d-1}\right)\sqrt{\left(1+a^d m^d\left(s^d\right)^{a^d-1}\right)}}$$

Calcul des termes relatifs à $\frac{d\left(R_1\right)_{ij}}{d\left(\Delta Y_4\right)}=C^e_{ijkl}:\left[\frac{\partial\left\langle\phi\left(f^{vp}\right)\right\rangle^+}{\partial \xi^{vp}}G^{vp}_{kl}+\left\langle\phi\left(f^{vp}\right)\right\rangle^+\cdot\frac{\partial G^{vp}_{kl}}{\partial \xi^{vp}}\right]\cdot\Delta t$:

L'évaluation du terme $\frac{\partial G^{vp}_{kl}}{\partial \xi^{vp}}$ est identique dans sa forme au calcul précédent pour $\frac{\partial G^{p}_{kl}}{\partial \xi^{p}}$.

$$\frac{\partial\left\langle\phi\left(f^{vp}\right)\right\rangle^+}{\partial \xi^{vp}}=\frac{A_v n_v}{P_{atm}}\left(\frac{f^{vp}}{P_{atm}}\right)^{n_v-1}\frac{\partial f^{vp}}{\partial \xi^{vp}}$$

L'évaluation du terme $\frac{\partial f^{vp}}{\partial \xi^{vp}}$ est identique dans sa forme au terme précédemment calculé $\frac{\partial f^{p}}{\partial \xi^{p}}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Évaluation des termes relatifs à $\frac{d\left(R_3\right)}{d\left(\Delta Y_1\right)_{ij}}$ et $\frac{d\left(R_4\right)}{d\left(\Delta Y_1\right)_{ij}}$

$$\frac{\partial \tilde{G}_{II}^{p}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \tilde{G}_{II}^{p}}{\partial \tilde{G}_{kl}^{p}} \frac{\partial \tilde{G}_{kl}^{p}}{\partial G_{mn}^{p}} \frac{\partial G_{mn}^{p}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\tilde{G}_{kl}^{p}}{\tilde{G}_{II}^{p}} \left(\delta_{mk}\delta_{nl} - \frac{1}{3}\delta_{mn}\delta_{kl} \right) \frac{\partial G_{mn}^{p}}{\partial \sigma_{ij}}$$

et

$$\frac{\partial \tilde{G}_{II}^{vp}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \tilde{G}_{II}^{vp}}{\partial \tilde{G}_{kl}^{vp}} \frac{\partial \tilde{G}_{kl}^{vp}}{\partial G_{mn}^{vp}} \frac{\partial G_{mn}^{vp}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\tilde{G}_{kl}^{vp}}{\tilde{G}_{II}^{vp}} \left(\delta_{mk}\delta_{nl} - \frac{1}{3}\delta_{mn}\delta_{kl} \right) \frac{\partial G_{mn}^{vp}}{\partial \sigma_{ij}}$$

Évaluation des termes relatifs à $\frac{d\left(R_3\right)}{d\left(\Delta Y_3\right)}$

$$\frac{\partial \tilde{G}_{II}^{p}}{\partial \xi^{p}} = \frac{\tilde{G}_{kl}^{p}}{\tilde{G}_{II}^{p}} \left(\delta_{mk}\delta_{nl} - \frac{1}{3}\delta_{mn}\delta_{kl} \right) \frac{\partial G_{mn}^{p}}{\partial \xi^{p}}$$

Évaluation des termes relatifs à $\frac{d\left(R_3\right)}{d\left(\Delta Y_4\right)}$ et $\frac{d\left(R_4\right)}{d\left(\Delta Y_4\right)}$

$$\frac{\partial \tilde{G}_{II}^{vp}}{\partial \xi^{vp}} = \frac{\tilde{G}_{kl}^{vp}}{\tilde{G}_{II}^{vp}} \left(\delta_{mk}\delta_{nl} - \frac{1}{3}\delta_{mn}\delta_{kl} \right) \frac{\partial G_{mn}^{vp}}{\partial \xi^{vp}}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)