Loi de comportement de HOEK_BROWN modifiée

Résumé

Ce document décrit une loi de comportement pour les roches. Le critère de plastification est un critère parabolique de type Hoek-Brown. Il est écrit en contraintes principales. L'évolution des déformations plastiques est de type « non associé », formulée à partir d'un critère de Drucker-Prager dont l'angle de frottement évolue avec la plastification.

Cette loi est utilisable en mécanique pure comme en modélisation couplée thermo hydro mécanique.

En modélisation thermo-hydro-mécanique, elle peut être utilisée en contraintes effectives ou en contraintes totales :

- Dans le premier cas, ce sont les contraintes effectives qui sont assujetties à respecter le critère de Hoek et Brown. Les déformation plastiques se calculent en utilisant la surface de Drucker et l'angle de frottement dans l'espace des contraintes effectives

- Dans le second cas, ce sont les contraintes totales qui sont assujetties à respecter le critère de Hoek et Brown. Les déformation plastiques se calculent en utilisant la surface de Drucker et l'angle de frottement dans l'espace des contraintes totales

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Introduction....3
1.1 Caractéristiques du modèle....3
2 Notations....3
2.1 Généralités....3
2.2 Paramètres du modèle....4
3 Modèle continu....4
3.1 Comportement élastique....5
3.2 Comportement plastique....5
3.2.1 Surface de charge....5
3.2.2 Potentiel d'écoulement plastique....5
3.2.3 Paramètre d'écrouissage....5
3.2.4 Autres paramètres....5
4 Forme incrémentale....6
4.1 Calcul de....7
4.2 Existence de la solution....8
5 Calcul des dérivées....9
5.1 Dérivée du critère par rapport aux contraintes....9
5.2 Dérivée du tenseur des contraintes par rapport aux contraintes principales....9
5.2.1 Cas particulier de valeurs propres multiples....9
5.3 Dérivée du critère par rapport à la variable d'écrouissage....10
5.4 Dérivée des paramètres par rapport à la variable d'écrouissage....10
6 Calcul de l'opérateur tangent cohérent....11
6.1 Calcul de....11
6.2 Cas particulier de valeurs propres multiples pour....12
6.3 Calcul de....13
7 Calcul de l'opérateur tangent en vitesse....14
8 Algorithme....16
8.1 Variables internes....16
8.2 Algorithme....16
9 Bibliographie....18
10 Fonctionnalités et vérification....18
11 Description des versions du document....18

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Cette note présente un modèle de comportement mécanique pour les roches. Pour représenter le comportement mécanique des roches l'utilisateur de Code_Aster peut utiliser la loi de Drucker-Prager DRUCK_PRAGER, la loi de LAIGLE ou la loi HOEK_BROWN présentée ici. La loi de Drucker-Prager est la plus simple et la plus éloignée du comportement réel des roches. La loi de Laigle est la plus fidèle à la physique des phénomènes. Ainsi la loi présentée dans cette note est intermédiaire entre ces deux lois, en terme de complexité comme en terme de représentation de la réalité. Elle utilise des formulations assez classiques dans le milieu de la géomécanique.

Cette loi est utilisable dans des modélisations de mécanique seule ou des modélisations de type THM. En modélisation thermo-hydro-mécanique, elle peut être utilisée en contraintes effectives ou en contraintes totales :

- Dans le premier cas, ce sont les contraintes effectives qui sont assujetties à respecter le critère de Hoek et Brown. Les déformation plastiques se calculent en utilisant la surface de Drucker et l'angle de frottement dans l'espace des contraintes effectives

- Dans le second cas, ce sont les contraintes totales qui sont assujetties à respecter le critère de Hoek et Brown. Les déformation plastiques se calculent en utilisant la surface de Drucker et l'angle de frottement dans l'espace des contraintes totales

On trouvera dans la référence [1] des éléments utiles à la compréhension de cette loi
La formulation est de type plasticité non associée :
- Le domaine d'élasticité est défini par un critère de type Hoek-Brown, dont les paramètres évoluent avec le paramètre d'écrouissage
- Le paramètre d'écrouissage est une combinaison de la déformation plastique de cisaillement et de la déformation plastique volumique
- Les déformations plastiques dérivent d'un critère de Drucker-Prager dont l'angle de frottement évolue avec la plastification.

1.1 Caractéristiques du modèle

Le modèle simule le comportement mécanique à court terme des roches en 4 phases, décrites dans la la référence [1] :
1) Phase élastique caractérisée par un module d'Young et un coefficient de Poisson constants
2) Phase élastoplastique avec écrouissage positif qui simule l'initiation d'une forme d'endommagement et sa progression vers la rupture de la roche. Cette phase est modélisée par un critère de plasticité de type Hoek-Brown. Ce critère évolue en fonction de la déformation irréversible majeure. L'évolution de la déformation irréversible est déterminée par un potentiel d'écoulement plastique exprimé par une fonction de type Drucker-Prager.
3) Phase élastoplastique avec écrouissage négatif qui représente le comportement post-rupture des roches. Le critère de rupture est du type Hoek-Brown. La déformation est déterminée par un potentiel d'écoulement plastique non associé de type Drucker-Prager.
4) Phase de résistance résiduelle caractérisée par une fonction de type Hoek-Brown modifiée.

2 Notations

2.1 Généralités

Les déformations sont contées positives en extension et les contraintes sont positives pour des états de traction.

Notation	Description
$I_1 = tr(\boldsymbol{\sigma})$	Premier invariant des contraintes

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\mathbf{s}=\boldsymbol{\sigma}-\frac{tr(\boldsymbol{\sigma})}{3}\mathbf{I}$	Déviateur des contraintes
$s_{II}=\sqrt{\mathbf{s}.\mathbf{s}}$	Deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoires
$\mathbf{e}=\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{tr(\boldsymbol{\varepsilon})}{3}\mathbf{I}$	Déviateur des déformations
$\boldsymbol{\varepsilon}_{\nu}=tr(\boldsymbol{\varepsilon})$	Trace des déformations : déformation volumique
$\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$	Tenseur des déformations plastiques
$\boldsymbol{\varepsilon}_{\nu}^{p}=tr(\boldsymbol{\varepsilon}^{p})$	Variation de volume plastique
$\delta\gamma^{p}=\sqrt{\frac{2}{3}d\,\mathbf{e}^{p}:d\,\mathbf{e}^{p}}$	Déformation plastique cumulée de cisaillement
σ_1	Contrainte principale majeure
σ_3	Contrainte principale mineure ($\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3$)
$\mathbf{H}$	Matrice de Hooke
μ	Coefficient de Lamé

2.2 Paramètres du modèle

Notation	Description
γ	Paramètre d'écrouissage (défini au paragraphe 3.2.3)
S	Représente l'état d'endommagement et de fracturation de la roche
m	Paramètre de lissage du modèle
σ_c	Résistance de la roche saine sans aucun endommagement
γ^{rup}	Paramètre d'écrouissage correspondant à la rupture du matériau
γ^{res}	Paramètre d'écrouissage correspondant au début de la résistance résiduelle
$(S\sigma_c^2)^{rup}$	Valeur du produit $S\sigma_c^2$ à la rupture atteinte en γ^{rup}
$(S\sigma_c^2)^{end}$	Valeur du produit $S\sigma_c^2$ à l'initiation d'endommagement $(\gamma=0)$
$(m\sigma_c)^{rup}$	Valeur du produit $m\sigma_c$ à la rupture atteinte en γ^{rup}
$(m\sigma_c)^{end}$	Valeur du produit $m\sigma_c$ à l'initiation d'endommagement $(\gamma=0)$
E	Module d'Young
ν	Coefficient de Poisson
β	Caractérise la résistance résiduelle
ϕ^{end}	Angle de frottement à l'initiation d'endommagement $(\gamma=0)$: paramètre optionnel pris nul par défaut
ϕ^{rup}	Angle de frottement à la rupture atteinte en γ^{rup}
ϕ^{res}	Angle de frottement à la résistance résiduelle atteinte en γ^{res}
α	Paramètre du modèle caractérisant le comportement post-rupture du matériau

3 Modèle continu

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Nous décrivons ici le modèle indépendamment du fait qu'il soit utilisé en mécanique seule, ou dans des calculs hydro-mécanique en contrainte totale ou effective. Ainsi la notation σ utilisée dans les paragraphes suivants devra être interprétée en fonction d'utilisation.

3.1 Comportement élastique

Le comportement élastique est donné par une loi linéaire. Les deux paramètres caractérisant ce comportement sont le module d 'élasticité E et le coefficient de Poisson ν .

3.2 Comportement plastique

La formulation adoptée est issue du document [1].

3.2.1 Surface de charge

$$F(\boldsymbol{\sigma},\gamma)=(\sigma_3-\sigma_1)-\sqrt{-\sigma_3.m\sigma_c+S(\gamma)\sigma_c^2}-b(\gamma).\left(1-\frac{\sigma_3}{\sigma_3^{b-d}}\right)$$

où :

- γ est le paramètre d'écrouissage (défini au paragraphe 3.2.3)
- S caractérise l'état d'endommagement et fracturation de la roche
- m est un paramètre de lissage du modèle
- σ_c est la résistance de la roche saine sans aucun endommagement $\sigma_c>0$
- b est une fonction de la variable d'écrouissage à évolution parabolique qui caractérise le comportement post-rupture
- σ_3^{b-d} est l'intersection entre la droite $\sigma_1=\alpha\sigma_3$ (α étant un paramètre du modèle) et le critère au moment de la rupture ($\gamma=\gamma^{rup}$). $\sigma_3^{b-d}>0$
- σ_1 et σ_3 sont les contraintes principales majeure et mineure : $\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3$

3.2.2 Potentiel d'écoulement plastique

Le potentiel d'écoulement plastique est donné par une fonction issue du critère de Drucker-Prager :

$G(\boldsymbol{\sigma},\gamma)=\eta(\gamma)I_1+\sqrt{\frac{3}{2}}s_{II}=\eta(\gamma)I_1+\sigma_{eq}$ avec $\eta(\gamma)=\frac{2\sin\phi(\gamma)}{3+\sin\phi(\gamma)}$, $\sigma_{eq}=\sqrt{\frac{3}{2}}s_{II}$ et $\phi(\gamma)$ l'angle de frottement équivalent.

3.2.3 Paramètre d'écrouissage γ

Le paramètre d'écrouissage γ que l'on considère prend les valeurs suivantes :

$\gamma=0$ à l'initiation d'endommagement
$\gamma=\gamma^{rup}$ à la rupture
$\gamma=\gamma^{res}$ au début de la résistance résiduelle

Il est défini en se plaçant en compression triaxiale par : $\gamma=\varepsilon_1^p$, et on peut montrer alors que $\gamma^p=|\frac{\varepsilon_v^p}{3}-\gamma|$. On a donc $\gamma=\frac{\varepsilon_v^p}{3}\pm\gamma^p$ qui doit être positif.

3.2.4 Autres paramètres

Les paramètres $S\sigma_c^2, m\sigma_c, \phi, b$ varient de la façon suivante en fonction du paramètre d'écrouissage γ :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1) $$(m\sigma_c)(\gamma)=\begin{cases}\gamma\dfrac{(m\sigma_c)^{rup}-(m\sigma_c)^{end}}{\gamma^{rup}}+(m\sigma_c)^{end}=p_{m\sigma}\gamma+(m\sigma_c)^{end} & si\quad \gamma\le\gamma^{rup}\\ (m\sigma_c)^{rup} & si\quad \gamma\ge\gamma^{rup}\end{cases}$$

2) $$(S\sigma_c^2)(\gamma)=\begin{cases}\gamma\dfrac{(S\sigma_c^2)^{rup}-(S\sigma_c^2)^{end}}{\gamma^{rup}}+(S\sigma_c^2)^{end}=p_{S\sigma^2}\gamma+(S\sigma_c^2)^{end} & si\quad \gamma\le\gamma^{rup}\\ (S\sigma_c^2)^{rup} & si\quad \gamma\ge\gamma^{rup}\end{cases}$$

3) $$\phi(\gamma)=\begin{cases}\dfrac{\phi^{rup}-\varphi^{end}}{\gamma^{rup}}\gamma+\phi^{end} & \text{si } \gamma\le\gamma^{rup}\\ \dfrac{\phi^{res}-\phi^{rup}}{\gamma^{res}-\gamma^{rup}}\gamma+\dfrac{\phi^{rup}\gamma^{res}-\phi^{res}\gamma^{rup}}{\gamma^{res}-\gamma^{rup}} & \text{si } \gamma^{rup}\le\gamma\le\gamma^{res}\\ \phi^{res} & \text{sinon}\end{cases}$$

4) $$b(\gamma)=\begin{cases}0 & \text{si } \gamma\le\gamma^{rup}\\ a\gamma^2+d\gamma+c & \text{si } \gamma^{rup}\le\gamma\le\gamma^{res}\\ b^{res} & \text{si } \gamma\ge\gamma^{res}\end{cases}\quad \text{où}\quad a=-\frac{b^{res}}{(\gamma^{rup}-\gamma^{res})^2}\ ,$$

$$d=\frac{2b^{res}\gamma^{res}}{(\gamma^{rup}-\gamma^{res})^2}\ ,\ c=\frac{b^{res}\gamma^{rup}(\gamma^{rup}-2\gamma^{res})}{(\gamma^{rup}-\gamma^{res})^2}\ \text{ et }\ b^{res}=\beta-\sqrt{(S\sigma_c^2)^{rup}}$$

5) $$\sigma_3^{b-d}=\frac{-(m\sigma_c)^{rup}-\sqrt{((m\sigma_c)^{rup})^2+4(1-\alpha)^2(S\sigma_c^2)^{rup}}}{2(1-\alpha)^2}$$

6) les coefficients $\alpha,\beta,(S\sigma_c^2)^{rup},(S\sigma_c^2)^{end},(m\sigma_c)^{rup},(m\sigma_c)^{end},\phi^{end},\phi^{rup},\phi^{res}$ sont donnés.

4 Forme incrémentale

On se place ici dans le cadre d'accroissements finis. L'indice – désigne une composante en début de pas de chargement et l'absence d'indice une composante en fin de pas de chargement. L'opérateur Δ désigne l'accroissement d'une composante.

En mécanique pure ou quand la loi est utilisée en modélisation THM en contraintes effectives , les équations traduisant le comportement élastique s'écrivent :

$$\mathbf{s}=\mathbf{s}^-+2\mu(\Delta\mathbf{e}-\Delta\mathbf{e}^p)=\mathbf{s}^e-2\mu\Delta\mathbf{e}^p\quad où\quad \mathbf{s}^e=\mathbf{s}^-+2\mu\Delta\mathbf{e}$$
$$I_1=I_{1^-}+3K(\Delta\varepsilon_v-\Delta\varepsilon_v^p)=I_1^e-3K\Delta\varepsilon_v^p\quad où\quad I_1^e=I_1^-+3K\Delta\varepsilon_v$$

Quand la loi est utilisée en modélisation THM en contraintes totales, le tenseur des contraintes et les équations traduisant le comportement élastique s'écrivent comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{H}(\varepsilon-\varepsilon^p)+\sigma_p\mathbf{I}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{e}}=\boldsymbol{\sigma}^-+\boldsymbol{H}\Delta\varepsilon+\Delta\sigma_p\mathbf{I}=\sigma'^-+\boldsymbol{H}\Delta\varepsilon+\sigma_p I$$
$$\mathbf{s}=\mathbf{s}^e-2\mu\boldsymbol{\Delta}\,\mathbf{e}^p\quad \text{où}\quad \mathbf{s}^e=\mathbf{s}^-+2\mu\boldsymbol{\Delta}\,\mathbf{e}$$
$$I_1=I_1^e-3K\Delta\varepsilon_v^p\quad \text{où}\quad I_1^e=I_1^-+3K\Delta\varepsilon_v+3\Delta\sigma_p$$
$$\Delta\sigma_p=-b\left(S\Delta p_{lq}+(1-S)\Delta p_{gz}\right)=b\left(S\Delta p_c-\Delta p_{gz}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Par ailleurs, la règle d'écoulement s'écrit :

$$d\,\varepsilon_{ij}^{p}=d\lambda.\frac{\partial G}{\partial\,\sigma_{ij}}(\sigma,\gamma)=d\lambda\left(\eta(\gamma)\delta_{ij}+\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{s_{ij}}{s_{II}}\right)$$

Comme $\mathbf{e}^{p}=\boldsymbol{\varepsilon}^{p}-\frac{tr(\boldsymbol{\varepsilon}^{p})}{3}\mathbf{I}$, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p}=\Delta\mathbf{e}^{p}+\frac{\Delta\varepsilon_{v}^{p}}{3}\mathbf{I}$. On en déduit que $\begin{cases}\Delta\mathbf{e}^{p}=\frac{3}{2}\frac{\mathbf{s}}{\sigma_{eq}}\Delta\lambda\\ \Delta\varepsilon_{v}^{p}=3\eta(\gamma)\Delta\lambda\end{cases}$, et par suite, comme $\sigma_{eq}^{e}\mathbf{s}=\sigma_{eq}\mathbf{s}^{e}$, les relations suivantes sont identiques pour les deux aspects de la loi:

$$\boxed{\begin{cases}\mathbf{s}=\mathbf{s}^{e}-3\mu\frac{\mathbf{s}}{\sigma_{eq}}\Delta\lambda=\mathbf{s}^{e}\left(1-3\mu\frac{\Delta\lambda}{\sigma_{eq}^{e}}\right)\\ I_{1}=I_{1}^{e}-9K\eta(\gamma)\Delta\lambda\\ \sigma_{eq}=\sigma_{eq}^{e}-3\mu\Delta\lambda\end{cases}}$$

Enfin, $\Delta\gamma^{p}=\sqrt{\frac{2}{3}\Delta\mathbf{e}^{p}:\Delta\mathbf{e}^{p}}=\sqrt{\frac{2}{3}\Delta\lambda^{2}\left(\frac{3}{2}\frac{\mathbf{s}}{\sigma_{eq}}\right):\left(\frac{3}{2}\frac{\mathbf{s}}{\sigma_{eq}}\right)}=\Delta\lambda$. Ainsi, en reprenant le résultat obtenu dans le paragraphe 3.2.3, on voit que $\Delta\gamma=\Delta\lambda[\eta(\gamma)\pm1]$ et comme $\Delta\gamma,\Delta\lambda\geq0$, on a nécessairement $\boxed{\Delta\gamma=\Delta\lambda[\eta(\gamma)+1]\geq0.}$

Remarque : Le calcul de $\Delta\lambda$ est le même dans toutes les formulations.

4.1 Calcul de $\Delta\lambda$

On note $\mathbf{P}$ la matrice de passage telle que :

$\tilde{\mathbf{P}}.\mathbf{s}^{e}.\mathbf{P}=\bar{\mathbf{s}}^{e}$ avec $\bar{\mathbf{s}}^{e}=diag(s_{1}^{e},s_{2}^{e},s_{3}^{e})$, ou encore

$\tilde{\mathbf{P}}.\boldsymbol{\sigma}^{e}.\mathbf{P}=\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{e}$ avec $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{e}=diag(\sigma_{1}^{e},\sigma_{2}^{e},\sigma_{3}^{e})$ et $\sigma_{i}^{e}=s_{i}^{e}+\frac{I_{1}^{e}}{3}$

Alors :

$$\tilde{\mathbf{P}}.\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{P}=\tilde{\mathbf{P}}.\left(\mathbf{s}+\frac{I_{1}}{3}\mathbf{I}\right).\mathbf{P}=\tilde{\mathbf{P}}.\left(\mathbf{s}^{e}\left(1-3\mu\frac{\Delta\lambda}{\sigma_{eq}^{e}}\right)+\frac{1}{3}\left(I_{1}^{e}-9K\eta(\gamma)\Delta\lambda\right)\mathbf{I}\right).\mathbf{P}$$

$$=\left(1-3\mu\frac{\Delta\lambda}{\sigma_{eq}^{e}}\right)\bar{\mathbf{s}}^{e}+\frac{1}{3}\left(I_{1}^{e}-9K\eta(\gamma)\Delta\lambda\right)\mathbf{I}$$

$$=diag(\sigma_{1},\sigma_{2},\sigma_{3})$$

avec $\sigma_{i}=\left(1-3\mu\frac{\Delta\lambda}{\sigma_{eq}^{e}}\right)s_{i}^{e}+\frac{1}{3}\left(I_{1}^{e}-9K\eta(\gamma)\Delta\lambda\right)=\sigma_{i}^{e}-3\Delta\lambda\left(\frac{\mu\,s_{i}^{e}}{\sigma_{eq}^{e}}+K\eta(\gamma)\right)$

Ainsi, si $\left(1-3\mu\frac{\Delta\lambda}{\sigma_{eq}^{e}}\right)>0$, c'est-à-dire $s_{II}>0$, les σ_{i} sont ordonnés comme les s_{i}^{e} . Si $\left(1-3\mu\frac{\Delta\lambda}{\sigma_{eq}^{e}}\right)=0$, c'est-à-dire $s_{II}=0$, les σ_{i} sont tous égaux à

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\frac{1}{3}\left(I_1^e - 9K\eta\Delta\lambda\right) = \frac{1}{3}\left(I_1^e - 3K\eta\frac{\sigma_{eq}^e}{\mu}\right)$. On peut ainsi écrire le critère F en fonction de $\Delta\lambda$ ou $\Delta\gamma$ seulement, les s_i^e étant donnés et ordonnés, en prenant :

$$\sigma_3 - \sigma_1 = \left(1 - 3\mu\frac{\Delta\lambda}{\sigma_{eq}^e}\right)(s_3^e - s_1^e)$$

$$\sigma_3 = s_3^e\left(1 - 3\mu\frac{\Delta\lambda}{\sigma_{eq}^e}\right) + \frac{1}{3}\left(I_1^e - 9K\eta(\gamma)\Delta\lambda\right)$$

On obtient alors une fonction non linéaire $F(\Delta\lambda)$ résolue par un algorithme de Newton, donnée par :

$$F(\Delta\gamma) = 0 = (s_3^e - s_1^e)\left[1 - \frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}h(\Delta\gamma)\Delta\gamma\right] - b(\Delta\gamma)\left[1 - \frac{1}{\sigma_3^{b-d}}\left(s_3^e + \frac{I_1^e}{3} - g(\Delta\gamma)\Delta\gamma\right)\right]$$
$$- \left(S(\Delta\gamma)\sigma_c^2(\Delta\gamma) - m(\Delta\gamma)\sigma_c(\Delta\gamma)\left[s_3^e + \frac{I_1^e}{3} - g(\Delta\gamma)\Delta\gamma\right]\right)^{\frac{1}{2}} \quad \textbf{Eq 3.1}$$

où on a noté :

¿

$$h(\Delta\gamma) = \frac{1}{\eta+1} = \frac{3+\sin\phi(\gamma^- + \Delta\gamma)}{3(1+\sin\phi(\gamma^- + \Delta\gamma))} \quad \text{et} \quad g(\Delta\gamma) = \frac{3+\sin\phi(\gamma^- + \Delta\gamma)}{3(1+\sin\phi(\gamma^- + \Delta\gamma))}\left(\frac{6K\sin\phi(\gamma^- + \Delta\gamma)}{3+\sin\phi(\gamma^- + \Delta\gamma)} + \frac{3\mu s_3^e}{\sigma_{eq}^e}\right)$$

En pratique, on appliquera l'algorithme de Newton à la fonction

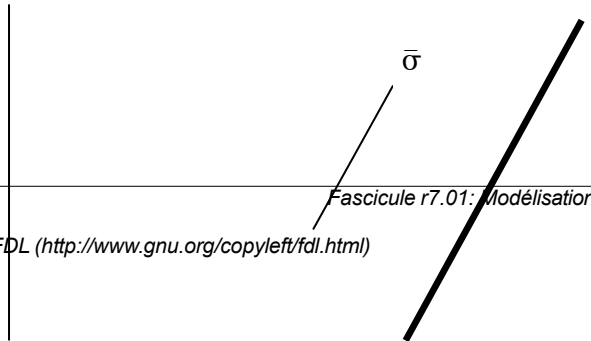
$$\bar{F}(\Delta\gamma) = \left[(\sigma_3 - \sigma_1) - b\left(1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_3^{b-d}}\right)\right]^2 - \left(S\sigma_c^2 - m\sigma_c\sigma_3\right)$$

$$= \left[(s_3^e - s_1^e)\left[1 - \frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}h(\Delta\gamma)\Delta\gamma\right] - b(\Delta\gamma)\left[1 - \frac{1}{\sigma_3^{b-d}}\left(s_3^e + \frac{I_1^e}{3} - g(\Delta\gamma)\Delta\gamma\right)\right]\right]^2$$
$$- S(\Delta\gamma)\sigma_c^2(\Delta\gamma) + m(\Delta\gamma)\sigma_c(\Delta\gamma)\left[s_3^e + \frac{I_1^e}{3} - g(\Delta\gamma)\Delta\gamma\right]$$

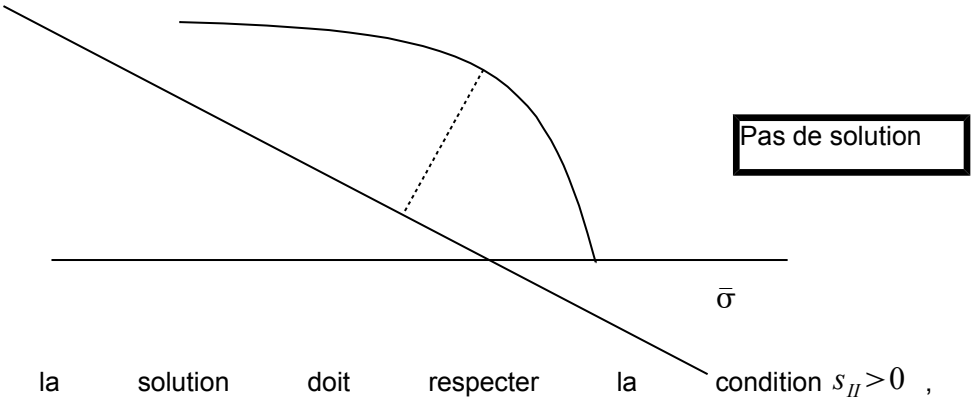
afin de s'affranchir des difficultés liées au signe de l'élément sous la racine lors des itérations. La dérivée de $\bar{F}$ par rapport à $\Delta\gamma$ est donnée dans l'Annexe 2.

4.2 Existence de la solution

Le principe de la résolution analytique consiste à déterminer le point $(I_1, \mathbf{s})$ comme la projection du point $(I_1^e, \mathbf{s}^e)$ sur la surface de charge par rapport au potentiel d'écoulement plastique :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



Or, la solution doit respecter la condition $s_{II}>0$, c'est-à-dire $F(\bar{\sigma},\gamma)=(\bar{\sigma}_3-\bar{\sigma}_1)-\sqrt{-\bar{\sigma}_3.m\sigma_c+S\sigma_c^2}-b.\left(1-\frac{\bar{\sigma}_3}{\sigma_3^{b-d}}\right)$: on voit donc qu'il existe une zone dans laquelle le problème n'admet pas de solution, qui correspond à $\frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_i}=\delta_{i3}$.

5 Calcul des dérivées

5.1 Dérivée du critère par rapport aux contraintes

On a : $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ où $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes exprimé dans la base des vecteurs propres. Si les valeurs propres sont ordonnées dans $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, le critère F va s'écrire :

$$P(\sigma)=\begin{pmatrix}X_1(\sigma) & X_2(\sigma) & X_3(\sigma)\end{pmatrix} \quad F(\bar{\boldsymbol{\sigma}},\gamma)=(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_3-\bar{\boldsymbol{\sigma}}_1)-\sqrt{-\bar{\boldsymbol{\sigma}}_3.m\boldsymbol{\sigma}_c+S\boldsymbol{\sigma}_c^2}-b.\left(1-\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_3}{\boldsymbol{\sigma}_3^{b-d}}\right)$$

et $X_2(\sigma)\neq X_3(\sigma)$ $\frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_i}=\delta_{i3}-\delta_{i1}+\frac{1}{2}\delta_{i3}\boldsymbol{\sigma}_c m\left[-\bar{\boldsymbol{\sigma}}_3.m\boldsymbol{\sigma}_c+S\boldsymbol{\sigma}_c^2\right]^{\frac{1}{2}}+b\frac{\delta_{i3}}{\boldsymbol{\sigma}_3^{b-d}}$.

5.2 Dérivée du tenseur des contraintes par rapport aux contraintes principales

On peut montrer (voir Annexe 1) que :

Si $\tilde{\boldsymbol{P}}(\sigma).\sigma.P(\sigma)=\bar{\sigma}$
où $P(\sigma)=$matrice de passage (matrice des vecteurs propres)
et $\bar{\boldsymbol{\sigma}}=$ matrice diagonale des valeurs propres de σ
alors $\frac{\partial \bar{\sigma}_k}{\partial \sigma_{ij}}=P_{ik}P_{jk}$ (sans sommation sur les indices)

5.2.1 Cas particulier de valeurs propres multiples

Dans le cas particulier où plusieurs des contraintes principales sont égales, par exemple $\sigma_2=\sigma_3$, le résultat précédent va s'appliquer sur les domaines $\sigma_2<\sigma_3$ et $\sigma_2>\sigma_3$. On aura donc, dans le premier domaine, $\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})=\begin{pmatrix}\mathbf{X}_1(\boldsymbol{\sigma}) & \mathbf{X}_2(\boldsymbol{\sigma}) & \mathbf{X}_3(\boldsymbol{\sigma})\end{pmatrix}$ où $\mathbf{X}_2\neq\mathbf{X}_3$ et, dans le deuxième domaine, $\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})=\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{X}}_1(\boldsymbol{\sigma}) & \bar{\mathbf{X}}_2(\boldsymbol{\sigma}) & \bar{\mathbf{X}}_3(\boldsymbol{\sigma})\end{pmatrix}$. Ainsi, quand $\sigma_2-\sigma_3\to 0^-$ (resp. $\sigma_2-\sigma_3\to 0^+$), la matrice

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

de passage va tendre vers $\mathbf{P}^{-}=\left(\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2 \quad \mathbf{X}_3\right)$ (resp. vers $\mathbf{P}^{+}=\left(\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_3 \quad \mathbf{X}_2\right)$) avec $\mathbf{X}_2 \neq \mathbf{X}_3$, les vecteurs $(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ définissant le sous-espace propre associé à $\sigma_2=\sigma_3$. On voit donc que le tenseur $\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ n'est pas défini de manière unique en ce point.

De plus, le vecteur $\frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_{ij}}=\frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_{ij}}$ n'est défini qu'à partir de l'un des deux vecteurs $\mathbf{X}_2$ ou $\mathbf{X}_3$ (il est égal à $\mathbf{P}_{i3}\mathbf{P}_{j3}$ ou $\mathbf{P}_{i2}\mathbf{P}_{j2}$), et ne correspond donc en fait qu'à une seule des deux dérivées directionnelles. Cette remarque s'applique de la même façon à $\frac{\partial s_3^e}{\partial \sigma_{ij}}$ pour le calcul de $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon_{ij}}$ dans la matrice tangente cohérente (voir paragraphe 6).

5.3 Dérivée du critère par rapport à la variable d'écrouissage

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial(m\sigma_c)}{\partial \gamma}\sigma_3+\frac{\partial(S\sigma_c^2)}{\partial \gamma}\right)\left[-\sigma_3 . m\sigma_c+S\sigma_c^2\right]^{-\frac{1}{2}}-\frac{\partial b}{\partial \gamma}.\left(1-\frac{\sigma_3}{\sigma_3^{b-d}}\right)$$

$$=\begin{cases}-\frac{1}{2}\left(-p_{m\sigma}\sigma_3+p_{S\sigma^2}\right)\left[-\sigma_3 . m\sigma_c+S\sigma_c^2\right]^{-\frac{1}{2}} & \text{si } \gamma<\gamma^{rup} \\ -(2a\gamma+d).\left(1-\frac{\sigma_3}{\sigma_3^{b-d}}\right) & \text{si } \gamma^{rup}<\gamma<=\gamma^{res} \\ 0 & \text{si } \gamma>=\gamma^{res}\end{cases} \qquad \frac{\partial \sigma'}{\partial \varepsilon}$$

5.4 Dérivée des paramètres par rapport à la variable d'écrouissage

[1] $$\frac{\partial(m\sigma_c)}{\partial \gamma}(\gamma)=\begin{cases}\frac{(m\sigma_c)^{rup}-(m\sigma_c)^{end}}{\gamma^{rup}}=p_{m\sigma} & si \quad \gamma<\gamma^{rup} \\ 0 & si \quad \gamma>\gamma^{rup}\end{cases}$$

[2] $$\frac{\partial(S\sigma_c^2)}{\partial \gamma}(\gamma)=\begin{cases}\frac{(S\sigma_c^2)^{rup}-(S\sigma_c^2)^{end}}{\gamma^{rup}}=p_{S\sigma^2} & si \quad \gamma<\gamma^{rup} \\ 0 & si \quad \gamma>\gamma^{rup}\end{cases}$$

[3] $$\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}(\gamma)=\begin{cases}\frac{\phi^{rup}-\phi^{end}}{\gamma^{rup}} & \text{si } \gamma\leq\gamma^{rup} \\ \frac{\phi^{res}-\phi^{rup}}{\gamma^{res}-\gamma^{rup}} & \text{si } \gamma^{rup}\leq\gamma\leq\gamma^{res} \\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial p_g}$$

[4] $$\frac{\partial b}{\partial \gamma}(\gamma)=\begin{cases}0 & \text{si } \gamma<\gamma^{rup} \\ 2a\gamma+d & \text{si } \gamma^{rup}<\gamma\leq\gamma^{res} \\ 0 & \text{si } \gamma\geq\gamma^{res}\end{cases} \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial p_c}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Calcul de l'opérateur tangent cohérent

En mécanique pure ou en modélisation THM avec la loi Hoek-Brown utilisée selon son premier aspect, le tenseur des contraintes représente le tenseur des contraintes effectives qui dépend uniquement du tenseur des déformations. La loi de comportement mécanique fournit ainsi seulement la dérivée $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$ en mécanique pure noté $\frac{\partial \sigma'}{\partial \varepsilon}$ en modélisation thermo-hydro-mécanique.

Le calcul de la quantité $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$ $\frac{\partial \sigma}{\partial p_c}=\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_p}\frac{\partial \sigma_p}{\partial p_c}$ **de la matrice tangente cohérente est le même pour les deux aspects de la loi.** Le détail de cette dérivée est présenté dans le sous paragraphe 6.1.

En modélisation THM avec la loi Hoek-Brown utilisée selon son deuxième aspect, le tenseur des contraintes représentant le tenseur des contraintes totales, la variation du tenseur des contraintes dépend de la variation du tenseur des déformations $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$, de la variation de la pression de gaz $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p_g}$ ainsi que de la variation de la pression capillaire $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p_c}$.
La pression de gaz et la pression capillaire n'interviennent pas toujours dans le calcul mais selon le cas de la simulation. Dans le code, on calculera donc plutôt $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p_p}$ puis $\frac{\partial \sigma}{\partial p_g}=\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_p}\frac{\partial \sigma_p}{\partial p_g}$ et .

$\frac{\partial \sigma_p}{\partial p_c}$ et $\frac{\partial \sigma_p}{\partial p_g}$ dépendent de la simulation hydraulique, et sont indépendantes de la loi mécanique (11).

6.1 Calcul de $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$

On cherche à calculer la matrice cohérente : $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}+\frac{1}{3}\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{I}$ $\frac{\partial s_i^e}{\partial \varepsilon_{pq}}$. Or :

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{\partial \mathbf{s}^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\left(1-\frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}\Delta\lambda\right)+\frac{3\mu\Delta\lambda}{(\sigma_{eq}^e)^2}\mathbf{s}^e\frac{\partial \sigma_{eq}^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}-\frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}\mathbf{s}^e\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{\partial I_1^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}-9K\left(\frac{\partial \eta}{\partial \Delta\lambda}\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\Delta\lambda+\eta\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)$$

avec :

$$\tilde{P}.s^e.P=\bar{s}^e$$

$$\frac{\partial s_{ij}^e}{\partial \varepsilon_{pq}}=2\mu\left(\delta_{ip}\delta_{jq}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{pq}\right)$$

$$\frac{\partial I_1^e}{\partial \varepsilon_{pq}}=3K\delta_{pq}$$

$$\frac{\partial \sigma_{eq}^e}{\partial \varepsilon_{pq}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\partial s_{II}^e}{\partial \varepsilon_{pq}}=\frac{3}{2\sigma_{eq}^e}\sum_{i,j}s_{ij}^e\frac{\partial s_{ij}^e}{\partial \varepsilon_{pq}}=\frac{3}{2\sigma_{eq}^e}2\mu\sum_{i,j}s_{ij}^e\left(\delta_{ip}\delta_{jq}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{pq}\right)=\frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}s_{pq}^e$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \Delta\lambda}=\frac{\partial \eta}{\partial \Delta\gamma}\frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \Delta\lambda}=(\eta+1)\frac{\partial \eta}{\partial \Delta\gamma}$$

$$\bar{s}^e=diag(s_1^e,s_2^e,s_3^e)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

d'où :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \mathbf{s}^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\left(1 - \frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}\Delta\lambda\right) + \frac{9\mu^2\Delta\lambda}{(\sigma_{eq}^e)^3}\mathbf{s}^e.\mathbf{s}^e - \frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}\mathbf{s}^e.\frac{\partial\Delta\lambda}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{3}\frac{\partial I_1^e}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} - 3K\left(\frac{\partial\eta}{\partial\Delta\lambda}\frac{\partial\Delta\lambda}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\Delta\lambda + \eta\frac{\partial\Delta\lambda}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right)$$

P

Pour calculer $\frac{\partial\Delta\lambda}{\partial\varepsilon_{pq}}$, on utilise l'équation $\dot{F}(\Delta\lambda)=0$ $\frac{\partial s^e}{\partial\varepsilon_{pq}} = P.\frac{\partial\bar{s}^e}{\partial\varepsilon_{pq}}.\tilde{P}$. On obtient :

$$\frac{\partial\Delta\lambda}{\partial\varepsilon_{pq}} = \frac{\begin{array}{l} -(s_3^e - s_1^e)\frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e} - \frac{\partial b}{\Delta\lambda}\left[1 + \frac{1}{\sigma_3^{b-d}}\left[s_3^e + \frac{I_1^e}{3} - \left(3K\eta + s_3^e\frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}\right)\Delta\lambda\right]\right] \\ + \frac{b}{\sigma_3^{b-d}}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\Delta\gamma}3K(\eta+1)\Delta\lambda + \left(3K\eta + s_3^e\frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}\right)\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\begin{array}{l}\frac{\partial(S\sigma_c^2)}{\partial\Delta\lambda} - \frac{\partial(m\sigma_c)}{\partial\Delta\lambda}\left(s_3^e + \frac{I_1^e}{3} - \left(3K\eta + s_3^e\frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}\right)\Delta\lambda\right) \\ + \sigma_c m\left(\frac{\partial\eta}{\partial\Delta\gamma}3K(\eta+1)\Delta\lambda + \left(3K\eta + s_3^e\frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}\right)\right)\end{array}\right)\times \\ \left(S\sigma_c^2 - m\sigma_c\left(s_3^e + \frac{I_1^e}{3} - \left(3K\eta = s_3^e\frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}\Delta\lambda\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\end{array}}{}$$

$$= -\left(\frac{\partial s_3^e}{\partial\varepsilon_{pq}} - \frac{\partial s_1^e}{s_3^e}\right)\left[1 - \frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}\Delta\lambda\right] - (s_3^e - s_1^e)\frac{3\mu}{(\sigma_{eq}^e)^2}\frac{\partial\sigma_{eq}^e}{\partial\varepsilon_{pq}}\Delta\lambda$$
$$+\left(\frac{\partial s_3^e}{\partial\varepsilon_{pq}} + \frac{1}{3}\frac{\partial I_1^e}{\partial\varepsilon_{pq}} - \left(-\frac{1}{\sigma_{eq}^e}\frac{\partial\sigma_{eq}^e}{\partial\varepsilon_{pq}}s_3^e + \frac{\partial s_3^e}{\partial\varepsilon_{pq}}\right)\frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}\right)\times$$
$$\left(\frac{b}{\sigma_3^{b-d}} - \frac{1}{2}\sigma_c m\left(S\sigma_c^2 - m\sigma_c\left(s_3^e + \frac{I_1^e}{3} - \left(3K\eta + s_3^e\frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}\right)\Delta\lambda\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Il nous reste donc à calculer $\frac{\partial s_i^e}{\partial\varepsilon_{pq}}$. En reprenant les notations du paragraphe 4.1, on a : $\tilde{\mathbf{P}}.\mathbf{s}^e.\mathbf{P} = \bar{\mathbf{s}}^e$ où $\bar{\mathbf{s}}^e = diag(s_1^e, s_2^e, s_3^e)$ et $\mathbf{P}$ est la matrice des vecteurs propres associés. Par suite, $\frac{\partial\mathbf{s}^e}{\partial\varepsilon_{pq}} = \tilde{\mathbf{P}}.\frac{\partial\bar{s}^e}{\partial\varepsilon_{pq}}.\mathbf{P} + \frac{\partial\tilde{\mathbf{P}}}{\partial\varepsilon_{pq}}.\bar{s}^e.\mathbf{P} + \tilde{\mathbf{P}}.\bar{s}^e.\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\varepsilon_{pq}}$.

En reprenant le même raisonnement que dans l'Annexe 1, on peut montrer que $\frac{\partial\mathbf{s}^e}{\partial\varepsilon_{pq}} = \mathbf{P}.\frac{\partial\bar{\mathbf{s}}^e}{\partial\varepsilon_{pq}}.\tilde{\mathbf{P}}$

et finalement : $.\ \tilde{\mathbf{P}}.\frac{\partial\mathbf{s}^e}{\partial\varepsilon_{pq}}.\mathbf{P} = \frac{\partial\bar{\mathbf{s}}^e}{\partial\varepsilon_{pq}}$

6.2 Cas particulier de valeurs propres multiples pour $\mathbf{s}^e$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans le cas où la matrice $\mathbf{s}^e$ possède des valeurs propres multiples, les remarques faites dans le paragraphe 5.2.1 s'appliquent. Dans le cas $\mathbf{s}_3^e = \mathbf{s}_2^e$ par exemple, le vecteur $\frac{\partial s_3^e}{\partial \varepsilon_{pq}}$ ne prend donc en compte qu'une seule des deux dérivées directionnelles de $\mathbf{s}_3^e = \mathbf{s}_2^e$. D'où l'idée d'écrire $s_2^e = s_3^e = \frac{1}{2}(s_2^e + s_3^e)$ et donc $\frac{\partial s_2^e}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial s_3^e}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_2^e}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial s_3^e}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)$.

6.3 Calcul de $\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_p}$

1) Élasticité :

On a : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{H}\,\boldsymbol{\varepsilon} + \sigma_p \mathbf{I}$ et par suite $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \sigma_p} = \mathbf{I}$.

2) Plasticité :

On a : $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \sigma_p} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \sigma_p} + \frac{1}{3}\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_p}\mathbf{I}$ avec :

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \sigma_p} = \frac{\partial \mathbf{s}^e}{\partial \sigma_p}\left(1 - \frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}\Delta\lambda\right) + \frac{3\mu\Delta\lambda}{(\sigma_{eq}^e)^2}\mathbf{s}^e\frac{\partial \sigma_{eq}^e}{\partial \sigma_p} - \frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}\mathbf{s}^e\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \sigma_p}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_p} = \frac{\partial I_1^e}{\partial \sigma_p} - 9K\left(\frac{\partial \eta}{\partial \Delta\lambda}\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \sigma_p}\Delta\lambda + \eta\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \sigma_p}\right)$$

Or :

$$\frac{\partial \mathbf{s}^e}{\partial \sigma_p} = 2\mu\frac{\partial \Delta\mathbf{e}}{\partial \sigma_p} = 0$$

$$\frac{\partial I_1^e}{\partial \sigma_p} = 3K\frac{\partial \Delta\varepsilon_v}{\partial \sigma_p} + 3 = 3$$

$$\frac{\partial \sigma_{eq}^e}{\partial \varepsilon_{pq}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\partial s_{II}^e}{\partial \varepsilon_{pq}} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \Delta\lambda} = \frac{\partial \eta}{\partial \Delta\gamma}\frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \Delta\lambda} = (\eta + 1)\frac{\partial \eta}{\partial \Delta\gamma}$$

d'où : $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \sigma_p} = -\frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}\mathbf{s}^e . \frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \sigma_p} + \mathbf{I} - 3K\left(\frac{\partial \eta}{\partial \Delta\lambda}\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \sigma_p}\Delta\lambda + \eta\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \sigma_p}\right)\mathbf{I}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour calculer $\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \sigma_p}$, on utilise l'équation $\dot{F}(\Delta\lambda)=0$. On obtient :

$$\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \sigma_p}\left[\begin{array}{l}\frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}(s_3^e-s_1^e)+\frac{\partial B}{\partial \Delta\lambda}\left(1-\frac{\sigma_3}{\sigma_3^{b-d}}\right)+3\frac{B}{\sigma_3^{b-d}}\left(\frac{\mu s_3^e}{\sigma_{eq}^e}+K\eta+K\frac{\partial \eta}{\partial \Delta\lambda}\Delta\lambda\right)\\ +\left(\frac{\partial S\sigma_c^2}{\partial \Delta\lambda}-\frac{\partial m\sigma_c}{\partial \Delta\lambda}\sigma_3+3m\sigma_c\left[\frac{\mu s_3^e}{\sigma_{eq}^e}+K\eta+K\frac{\partial \eta}{\partial \Delta\lambda}\Delta\lambda\right]\right)\times\left(S\sigma_c^2-\sigma_3.m\sigma_c\right)^{-1/2}\end{array}\right]$$
$$=\frac{B}{\sigma_3^{b-d}}+\frac{m\sigma_c}{2\sqrt{S\sigma_c^2-\sigma_3.m\sigma_c}}$$

3) Dans l'opérateur tangent c'est la dérivée $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \sigma_p}=\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \sigma_p}-\mathbf{I}$ qui doit être renvoyée.

7 Calcul de l'opérateur tangent en vitesse

L'opérateur tangent en vitesse est donné à titre indicatif. Dans la programmation, on calcule l'opérateur correspondant à `RIGI_MECA` par les mêmes formules que celles fournissant `FULL_MECA` dans lesquelles on pose : $\Delta\lambda=0$, H et $\gamma^+=\gamma^-$.

Si le tenseur de contraintes représente la contrainte effective :

La condition $\dot{F}=0$ s'écrit : $\dot{F}=\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}+\frac{\partial F}{\partial \gamma}\dot{\gamma}=0$. Ceci nous donne donc :

$$\dot{\gamma}=-\frac{\sum_{ij}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}}{\frac{\partial F}{\partial \gamma}}$$

Or, on a $\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{H}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$ où $\mathbf{H}$ est la matrice de Hooke. De plus, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\dot{\lambda}\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\frac{\dot{\gamma}}{(\eta(\gamma)+1)}\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$, d'où

$$\dot{\gamma}=-\frac{\sum_{ijkl}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}H_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}}{\frac{\partial F}{\partial \gamma}-\frac{1}{\eta(\gamma)+1}\sum_{ijkl}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}H_{ijkl}\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}} \qquad \text{avec} \quad \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}=\eta(\gamma)\delta_{ij}+\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{s_{ij}}{s_{II}},$$

et finalement

$$\dot{\sigma}_{ab}=H_{abcd}\left(\dot{\varepsilon}_{cd}-\dot{\lambda}\frac{\partial G}{\partial \sigma_{cd}}\right)=\sum_{cd}D_{abcd}\dot{\varepsilon}_{cd}$$

$$\text{où} \quad D_{abcd}=H_{abcd}+\frac{\left(\sum_{kl}H_{abkl}\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}\right)\left(\sum_{ij}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}H_{ijcd}\right)}{(\eta(\gamma)+1)\frac{\partial F}{\partial \gamma}-\sum_{pqmn}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}}H_{pqmn}\frac{\partial G}{\partial \sigma_{mn}}}.$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Si le tenseur de contraintes représente la contrainte totale :

On a $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = H(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) + \dot{\sigma}_p \mathbf{I}$ où $\mathbf{H}$ est la matrice de Hooke. En notation indicée, on peut écrire:

$$\dot{\sigma}_{ij} = H_{ijkl}\left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}^p_{kl}\right) + \dot{\sigma}_p \delta_{ij}$$

De plus, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\dot{\gamma}}{(\eta(\gamma)+1)}\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$,

La condition $\dot{F} = 0$ s'écrit : $\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma}\dot{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \gamma}\dot{\gamma} = 0$. Ceci nous donne donc :

$$\dot{\gamma} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}}{\frac{\partial F}{\partial \gamma}}$$

en remplaçant $\dot{\sigma}_{ij}$ et $\dot{\varepsilon}^p_{kl}$ par leurs expressions on peut déduire :

$$\dot{\gamma}\frac{\partial F}{\partial \gamma} = -\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} H_{ijkl}\left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{\dot{\gamma}}{\left(\eta(\gamma)+1\right)}\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}\right) - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_p \delta_{ij}$$

et ensuite l'expression de $\dot{\gamma}$:

$$\dot{\gamma} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} H_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{\left(\eta(\gamma)+1\right)}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} H_{ijkl}\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}} - \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_p \delta_{ij}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{\left(\eta(\gamma)+1\right)}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} H_{ijkl}\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}}$$

avec $\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} = \eta(\gamma)\delta_{ij} + \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{s_{ij}}{s_{II}}$,

et finalement

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\dot{\sigma}_{ab}=H_{abcd}\left(\dot{\varepsilon}_{cd}-\dot{\lambda}\frac{\partial G}{\partial \sigma_{cd}}\right)+\dot{\sigma}_p\delta_{ab}=D_{abcd}\dot{\varepsilon}_{cd}+E_{ab}\dot{\sigma}_p$$

$$\dot{\sigma}_{ab}=H_{abcd}\left(\dot{\varepsilon}_{cd}+\frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}H_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}\frac{\partial G}{\partial \sigma_{cd}}}{\left(\eta(\gamma)+1\right)\frac{\partial F}{\partial \gamma}-\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}H_{ijkl}\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}}+\frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\delta_{ij}\frac{\partial G}{\partial \sigma_{cd}}\dot{\sigma}_p}{\left(\eta(\gamma)+1\right)\frac{\partial F}{\partial \gamma}-\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}H_{ijkl}\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}}\right)+\dot{\sigma}_p\delta_{ab}$$

où

$$D_{abcd}=H_{abcd}+\frac{H_{abkl}\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}H_{ijcd}}{\left(\eta(\gamma)+1\right)\frac{\partial F}{\partial \gamma}-\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}H_{ijkl}\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}}$$

et

$$E_{ab}=\frac{H_{abcd}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\delta_{ij}\frac{\partial G}{\partial \sigma_{cd}}}{\left(\eta(\gamma)+1\right)\frac{\partial F}{\partial \gamma}-\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}H_{ijkl}\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}}+\delta_{ab}$$

8 Algorithme

8.1 Variables internes

La loi de comportement de Hoek-Brown modifiée est régie par les trois variables internes suivantes :

1) *le paramètre d'écrouissage* γ correspondant à la déformation irréversible majeure.
2) *la déformation volumique plastique cumulée* ε_v^p dont la loi d'évolution est donnée par
$$d\,\varepsilon_v^p=3\,\eta\,d\lambda=\frac{3\eta}{\eta+1}d\gamma\ .$$
3) *l'état de plastification* ; il vaut 0 si le point de Gauss est en charge élastique ou en décharge, et 1 si le point de Gauss est en charge plastique.

8.2 Algorithme

On retient une formulation implicite par rapport au critère et à la direction d'écoulement. On se place en un point matériel et on suppose connus à t^- :

- Le tenseur d'accroissement des déformations $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ d'où l'on déduit $\Delta\mathbf{e}$, $\Delta\varepsilon_v$
- Les contraintes au début du pas de temps $\boldsymbol{\sigma}^-$ dont on déduit $\mathbf{s}^-, I_1^-$
- La valeur des variables internes γ^- et ε_v^{p-} au début du pas de temps qui nous donnent

$(S\sigma_c^2)^-, (m\sigma_c)^-, b^-, \phi^-$

Le but de l'algorithme est alors de calculer :

- Les contraintes en fin de pas de temps σ
- Les variables internes en fin de pas de temps
- Le comportement tangent en fin de pas de temps : $\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}$ si la loi est en contraintes effectives

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Le comportement tangent en fin de pas de temps : $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ et $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \sigma_p}$ si la loi est en contraintes totales.

Algorithme :

Calcul de la solution élastique :

Si la loi est en contraintes effectives :

$$\begin{cases} \mathbf{s}^e = \mathbf{s}^- + 2\mu \Delta \mathbf{e} \\ I_1^e = I_1^- + 3K \Delta \varepsilon_v \end{cases}$$

Si la loi est en contraintes totales :

$$\begin{cases} \mathbf{s}^e = \mathbf{s}^- + 2\mu \Delta \mathbf{e} \\ I_1^e = I_1^- + 3K \Delta \varepsilon_v + 3\Delta \sigma_p \end{cases}$$

Calcul du critère élastique $F(\boldsymbol{\sigma}^e, \gamma^-)$. Si $S\sigma_c^2 - \sigma_3^e . m\sigma_c < 0$, la fonction F n'est pas définie au point $(\boldsymbol{\sigma}^e, \gamma^-)$. On considère alors que l'on est dans le cas plastique.

Résolution : calcul de $\boldsymbol{\sigma}, \gamma$

Si $F(\boldsymbol{\sigma}^e, \gamma^-) \leq 0$, alors $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e, \gamma^p = \gamma^{p^-}, \Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$.

Sinon, on cherche $\boldsymbol{\sigma}, \gamma$ tels que $F(\boldsymbol{\sigma}, \gamma) \leq 0$, ce qui revient à chercher $\Delta\gamma$ tel que $F(\Delta\gamma) = \bar{F}(\Delta\gamma) = 0$. Ce problème est résolu en utilisant une méthode de Newton sur $\bar{F}$.

Algorithme de Newton :

Initialisation : $\Delta\gamma^0 = 0$

Après chaque itération :

- si $\Delta\gamma^{n+1} \leq 0$, il n'y a pas eu convergence : on subdivise le pas de temps
- si $\Delta\gamma^{n+1} \leq \frac{\sigma_{eq}^e}{3\mu[\eta(\Delta\gamma^{n+1}) + 1]}$, il n'y a pas de solution (voir paragraphe 4.2) : on subdivise le pas de temps

Mise à jour des variables : contraintes, variables internes

Calcul de la matrice tangente cohérente $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \varepsilon}$ *si la loi est en contraintes effectives et* $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \varepsilon}$ *et* $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \sigma_p}$ *si la loi est en contraintes totales pour l'option* `RIGI_MECA_TANG` ou `FULL_MECA` .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Bibliographie

• Souley M., K. Su, M. Ghoreychi & G. Armand - 2003 - Constitutive models for rock mass :numerical implementation, verification and validation in FLAC and Numerical Modeling in Geomechanics, Brummer et al. (eds), 2003 Swets & Zeitlinger B.V., Lisse, ISBN 90 5809 5819, pp. 71-80.

• François Laigle Modèle conceptuel pour le développement de lois de comportement adaptées à la conception des ouvrages souterrains. Thèse École Centrale de Lyon

10 Fonctionnalités et vérification

La loi de comportement peut être définie par le mot-clé HOEK_BROWN (commande STAT_NON_LINE, mot clé facteur COMPORTEMENT). Elle est associée au matériau HOEK_BROWN (commande DEFI_MATERIAU).

La loi HOEK_BROWN est vérifiée par les cas tests suivants :

SSNA116	[V6.01.116]	Essai triaxial avec le modèle de Hoek-Brown modifié en axisymétrique
SSNV184	[V6.04.184]	Essai triaxial avec le modèle de Hoek-Brown modifié
WTNV128	[V7.31.128]	Essai triaxial non drainé avec le modèle de Hoek-Brown modifié en contraintes effectives
WTNV129	[V7.31.129]	Essai triaxial non drainé avec le modèle de Hoek-Brown modifié en contraintes totales

11 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
8,5	C.Chavant, J.El-Gharib EDF-R&D/AMA V.Gervais, CS	Texte initial

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 1Dérivation des contraintes principales

Soit $\boldsymbol{\sigma}$ un tenseur symétrique et $\boldsymbol{\sigma}_d$ ce tenseur dans la base qui le diagonalise. Désignons par $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\sigma})$ la matrice de passage qui diagonalise le tenseur σ : $\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}).\boldsymbol{\sigma}_d.\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma})$. En écriture indicielle, nous adoptons la convention suivante pour les écritures matricielles :

$M^{i\leftarrow ligne}_{j\leftarrow colonne}$

si bien que le produit matriciel s'écrit : $(\mathbf{A}.\mathbf{B})^i_j=A^i_m\mathbf{B}^m_j$ avec la règle de sommation des indices répétés.
Alors on a la relation :

$$\frac{\partial\sigma_d}{\partial\sigma^i_j}=\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}).\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^i_j}.\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})$$

$\frac{\partial\sigma_{d_k}}{\partial\sigma^i_j}=P^i_kP^j_k$ ou sous forme indicielle **sans sommation sur l'indice** k

Démonstration :
Dans ce qui suit, nous noterons σ une composante quelconque du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ sans en préciser les indices lorsqu'ils ne jouent aucun rôle.
On a $\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}).\boldsymbol{\sigma}_d.\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma})$, et par suite :

1) $\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_d}{\partial\sigma}=\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}).\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\sigma}.\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})+\frac{\partial\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\sigma}.\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})+\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}).\boldsymbol{\sigma}.\frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\sigma}$

2) .

En reportant dans les deux derniers termes l'égalité $\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}).\boldsymbol{\sigma}_d.\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma})$, on obtient :

1) $\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_d}{\partial\sigma}=\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}).\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\sigma}.\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})+\frac{\partial\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\sigma}.\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}).\boldsymbol{\sigma}_d.\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}).\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma})+\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}).\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}).\boldsymbol{\sigma}_d.\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}).\frac{\partial\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\sigma}$

c'est à dire :

1) $\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_d}{\partial\sigma}=\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}).\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\sigma}.\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})+\frac{\partial\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\sigma}.\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}).\boldsymbol{\sigma}_d+\boldsymbol{\sigma}_d.\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}).\frac{\partial\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\sigma}$

En écriture matricielle, ceci s'écrit :

$$\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}^i_d}{\partial\sigma}=\left(\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}).\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\sigma}.\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})+\frac{\partial\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\sigma}.\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}).\boldsymbol{\sigma}_d+\boldsymbol{\sigma}_d.\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}).\frac{\partial\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\sigma}\right)^i$$

Montrons que la somme des deux derniers termes de cette expression est nulle :

- $\left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\sigma}.\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}).\boldsymbol{\sigma}_d+\boldsymbol{\sigma}_d.\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}).\frac{\partial\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\sigma}\right)^i_j=\partial\tilde{P}^i_m.P^m_l.\sigma_{d^l_j}+\sigma_{d^i_m}.\tilde{P}^m_l.\partial P^l_j$

où ∂a désigne $\frac{\partial a}{\partial\sigma}$ afin d'alléger l'écriture.

Nous écrivons alors que $i=j$ et que seuls les termes $\sigma^p_{d_p}$ sont non nuls.
On obtient :

$$\left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\sigma}.\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}).\boldsymbol{\sigma}_d+\boldsymbol{\sigma}_d.\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}).\frac{\partial\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\sigma}\right)^i_i=\partial\tilde{P}^i_m.P^m_i.\sigma_{d^i_i}+\sigma_{d^i_i}.\tilde{P}^i_l.\partial P^l_i$$

$$=\left(\partial\tilde{P}^i_m.P^m_i+\tilde{P}^i_m.\partial P^m_i\right)\sigma_{d^i_i}\ \underline{\text{sans sommation sur l'indice } i}$$

qui est clairement nul puisque $\tilde{\mathbf{P}}.\mathbf{P}=\mathbf{I}$. D'où finalement $\frac{\partial\sigma_{d_k}}{\partial\sigma^i_j}=\frac{\partial\sigma_{d^k_k}}{\partial\sigma^i_j}=P^i_kP^j_k$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 2 Dérivée de la fonction $\bar{F}(\Delta\lambda)$

$$\frac{\partial h}{\partial \Delta\gamma}=\frac{\partial}{\partial \Delta\gamma}\left(\frac{3+\sin\phi(\gamma^{-}+\Delta\gamma)}{3(1+\sin\phi(\gamma^{-}+\Delta\gamma))}\right)=\begin{cases}-\dfrac{2\dfrac{\partial\phi}{\partial\gamma}\cos\phi(\gamma)}{3(1+\sin\phi(\gamma))^{2}} & \text{si } \gamma<\gamma^{res}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \Delta\gamma}=\frac{\partial}{\partial \Delta\gamma}\left[\frac{3+\sin\phi(\gamma^{-}+\Delta\gamma)}{3(1+\sin\phi(\gamma^{-}+\Delta\gamma))}\left(\frac{6K\sin\phi(\gamma^{-}+\Delta\gamma)}{3+\sin\phi(\gamma^{-}+\Delta\gamma)}+\frac{3mus_3^e}{\sigma_{eq}^e}\right)\right]$$

$$=\frac{6K\dfrac{\partial\phi}{\partial\gamma}\cos\phi(\gamma)}{(3+\sin\phi(\gamma))(1+\sin\phi(\gamma))}-\frac{2\dfrac{\partial\phi}{\partial\gamma}\cos\phi(\gamma)}{3(1+\sin\phi(\gamma))^{2}}\left(\frac{6K\sin\phi(\gamma)}{3+\sin\phi(\gamma)}+\frac{3mus_3^e}{\sigma_{eq}^e}\right)$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \Delta\gamma}=2\left[-(s_3^e-s_1^e)\frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}\left(\frac{\partial h}{\partial\Delta\gamma}\Delta\gamma+h\right)-\frac{\partial b}{\partial\Delta\gamma}\left(1-\frac{1}{\sigma_3^{b-d}}\left[s_3^e+\frac{I_1^e}{3}-g\Delta\gamma\right]\right)-\frac{b}{\sigma_3^{b-d}}\left(\frac{\partial g}{\partial\Delta\gamma}\Delta\gamma+g\right)\right]$$

$$\times\left[(s_3^e-s_1^e)\left[1-\frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e}h\Delta\gamma\right]-b\left[1-\frac{1}{\sigma_3^{b-d}}\left(s_3^e+\frac{I_1^e}{3}-g\Delta\gamma\right)\right]\right]$$

$$-\left(\frac{\partial(S\sigma_c^2)}{\partial\Delta\gamma}-\frac{\partial(m\sigma_c)}{\partial\Delta\gamma}\left(s_3^e+\frac{I_1^e}{3}-g\Delta\gamma\right)+\sigma_c m\left(\frac{\partial g}{\partial\Delta\gamma}\Delta\gamma+g\right)\right)$$

Annexe 3Calcul des dérivées $\frac{\partial\sigma_p}{\partial p_g}$ et $\frac{\partial\sigma_p}{\partial p_c}$

- LIQU_SATU (PRE1= p_{lq}) : $\frac{\partial\sigma_p}{\partial p_c}=-\frac{\partial\sigma_p}{\partial p_{lq}}=bS$
- LIQU_GAZ_ATM (PRE1=- p_{lq}): $\frac{\partial\sigma_p}{\partial p_c}=-\frac{\partial\sigma_p}{\partial p_{lq}}=bS$
- GAZ (PRE1= p_g) : $\frac{\partial\sigma_p}{\partial p_g}=-b(1-S)$
- LIQU_VAPE_GAZ (PRE1= p_c , PRE2= p_g) : $\frac{\partial\sigma_p}{\partial p_g}=-b$, $\frac{\partial\sigma_p}{\partial p_c}=bS$
- LIQU_GAZ (PRE1= p_c , PRE2= p_g) : $\frac{\partial\sigma_p}{\partial p_g}=-b$, $\frac{\partial\sigma_p}{\partial p_c}=bS$
- LIQU_VAPE (PRE1= p_{lq}) : $\frac{\partial\sigma_p}{\partial p_c}=-\frac{\partial\sigma_p}{\partial p_{lq}}=bS$
- LIQU_AD_GAZ_VAPE (PRE1= p_c , PRE2= p_g) : $\frac{\partial\sigma_p}{\partial p_g}=-b$, $\frac{\partial\sigma_p}{\partial p_c}=bS$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)