Loi de comportement des milieux poreux : modèle de Barcelone

Résumé :

Le modèle de BARCELONE [bib1] décrit le comportement mécanique des sols non saturés couplé au comportement hydraulique (ce modèle doit donc être utilisé dans un environnement THHM [bib7]). Dans le cas particulier d'un sol complètement saturé en eau, il se réduit au modèle de CAM_CLAY modifié, également implémenté dans *Code_Aster* [bib5]. Il est particulièrement adapté à l'étude du comportement des argiles.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1Notations....4
2Introduction....7
2.1Phénoménologie du comportement des sols non saturés....7
2.1.1Courbe de rétention d'eau....7
2.1.2Extension de la définition des contraintes effectives aux sols non saturés....7
3Description du modèle original de Barcelone....8
3.1Comportement purement mécanique....8
3.1.1Chargement sphérique....8
3.1.1.1Elasticité....8
3.1.1.2Plasticité....9
3.1.2Chargement triaxial....10
3.1.2.1Elasticité....10
3.1.2.2Plasticité....10
3.2Couplage hydro-mécanique ou effet de la succion sur la mécanique....11
3.2.1Partie réversible....12
3.2.2Partie irréversible....12
3.3Comportement complet (chargement mécanique et hydrique)....14
3.3.1Comportement réversible....14
3.3.2Seuils d'écoulement....15
3.3.3Lois d'écoulement....16
3.3.4Lois d'écrouissage....16
3.3.5Inventaire des configurations de couplage mécanique et hydrique....16
3.3.5.1Réversibilité totale....16
3.3.5.2Comportement élasto-plastique....17
3.3.5.3Comportement hydrique engendrant des déformations irréversibles....18
3.4Données du modèle de Barcelone....19
4Intégration numérique des relations de comportement....20
4.1Rappel du problème....20
4.2Relations incrémentales....20
4.3Calcul des contraintes et des variables internes....21
5Opérateur tangent....22
5.1Opérateur tangent élastique non linéaire....23
5.2Opérateur tangent plastique en vitesse. Option RIGI_MECA_TANG....24
5.3Opérateur tangent en implicite. Option FULL_MECA....28
5.3.1Dans le cas où le critère mécanique est atteint....28
5.3.1.1Traitement de la partie déviatorique....28
5.3.1.2Traitement de la partie hydrostatique....33
5.3.1.3Opérateur tangent....36

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.3.2Opérateur tangent au point critique....37
5.3.2.1Traitement de la partie déviatorique....37
5.3.2.2Traitement de la partie hydrostatique....38
5.3.2.3Opérateur tangent....38
5.3.3Dans le cas où le critère hydrique est atteint....39
6Résumé du modèle de Barcelone....41
7Mise en œuvre du modèle....42
7.1Données matériau....42
7.2Initialisation du calcul....42
7.3Variables internes en sortie....42
8Perspectives de développement du modèle....42
9Bibliographie....44
10Vérification....44
11Description des versions du document....44

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Notations

σ^T désigne le tenseur des contraintes totales en petites perturbations, noté sous la forme du vecteur suivant :

$$\begin{pmatrix} \sigma^{T}_{11} \\ \sigma^{T}_{22} \\ \sigma^{T}_{33} \\ \sqrt{2}\,\sigma^{T}_{12} \\ \sqrt{2}\,\sigma^{T}_{23} \\ \sqrt{2}\,\sigma^{T}_{31} \end{pmatrix}$$

Le comportement est décrit dans un espace de contraintes à deux variables :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{T}} + p_{gz}\boldsymbol{I} \quad \text{et} \quad p_c = p_{gz} - p_{lq} \quad ,$$

avec p_{lq}, p_{gz}, p_c respectivement pression de liquide, pression de gaz, pression capillaire (ou encore succion)

On note :

$\boldsymbol{I}$ le tenseur unité d'ordre 2 dont la notation indicielle est δ_{ij}

$\boldsymbol{I_4}$ le tenseur unité d'ordre 4 dont la notation indicielle est δ_{ijkl}

$\underline{\underline{\boldsymbol{P} = -\frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma})}}$	contrainte de confinement
$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{PI}$	déviateur des contraintes
$I_2 = \frac{1}{2} tr(\boldsymbol{s}.\boldsymbol{s})$	deuxième invariant des contraintes
$Q = \sigma_{eq} = \sqrt{3\mathrm{I}_2}$	contrainte équivalente
$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u$	déformation totale
$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p + \varepsilon_{th}$	partition des déformations (élastique, plastique, thermique)
$\underline{\underline{\varepsilon_v = -tr(\varepsilon) + 3\alpha(T - T_0)}}$	déformation totale volumique
$\varepsilon_v^p = -tr(\varepsilon^p)$	déformation plastique volumique
$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon_v I$	déviateur des déformations
$\tilde{\varepsilon}^e = \tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^p$	déformation élastique déviatorique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\tilde{\varepsilon}^p = \varepsilon^p + \frac{1}{3}\varepsilon_v^p I$ déformation plastique déviatorique

$\varepsilon_{eq}^e = \sqrt{\frac{2}{3} tr\left(\tilde{\varepsilon}^e . \tilde{\varepsilon}^e\right)}$ déformation élastique équivalente

$\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3} tr\left(\tilde{\varepsilon}^p . \tilde{\varepsilon}^p\right)}$ déformation plastique équivalente

e indice des vides du matériau (rapport du volume des pores sur le volume des grains solides)

e_0 indice des vides initial

ϕ porosité (rapport du volume des vides sur le volume total (pores plus grains))

$\varphi_{lq}, \varphi_{lq}^e, \varphi_{lq}^p$ teneur en liquide totale, élastique et plastique

κ coefficient de gonflement (pente élastique dans un essai de compression hydrostatique)

κ_s coefficient de rigidité élastique dans un essai de variation de succion

$k_0 = \frac{(1+e_0)}{\kappa}$

$k_{0s} = \frac{(1+e_0)}{\kappa_s}$

$\lambda(p_c)$ coefficient de compressibilité (pente plastique dans un essai de compression hydrostatique)

λ^* coefficient de compressibilité en conditions de saturation

λ_s coefficient de compressibilité plastique dans un essai de variation de succion

$k = \frac{(1+e_0)}{(\lambda-\kappa)}$

$k_s = \frac{(1+e_0)}{(\lambda_s-\kappa_s)}$

M pente de la droite d'état critique

α coefficient de correction de la normalité de l'écoulement plastique

$P_{cons}(p_c)$ pression de consolidation

$P_{cr}(p_c)$ pression critique, variable interne du modèle, égale à la moitié de la pression de consolidation

P_{cr^*} pression critique en conditions de saturation

P_s cohésion (traction hydrostatique limite à succion donnée)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

P_0 pression de confinement de référence généralement égale à la pression atmosphérique P_a

k_c pente de la cohésion en fonction de la succion

β paramètre contrôlant l'accroissement de $\lambda(p_c)$ avec p_c

r paramètre définissant le pic de $\lambda(p_c)$ avec p_c

μ coefficient élastique de cisaillement (coefficient de Lamé)

f surface de charge dans l'espace (P,Q)

f_2 surface de charge en p_c

p_{c0} seuil d'irréversibilité de la succion

Λ multiplicateur plastique

S_{lq} saturation en eau, $S_{lq}=\frac{\varphi_{lq}}{\phi}$

ε_{vp}^{p} déformation plastique volumique due à un chargement en pression hydrostatique

ε_{vs}^{p} déformation plastique volumique due à un chargement en succion

$\tilde{\varepsilon}_{p}^{p}$ déformation plastique déviatorique due à un chargement en pression hydrostatique

b coefficient de Biot

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Introduction

Les concepts de plasticité utilisés pour les sols saturés sont étendus aux sols non saturés. Le modèle original de Barcelone est décrit à l'aide des variables $\boldsymbol{\sigma}$, p_c , ce qui le distingue des modèles de mécanique couplés à un comportement thermohydraulique qui sont décrits à l'aide d'une seule contrainte effective (contrainte de Bishop). On peut remarquer que ce modèle est réécrit dans un cadre poroplastique avec l'introduction d'une variable poroplastique supplémentaire qui est la teneur en eau [bib2], permettant de capter les phénomènes d'hystérésis qui apparaissent sur les cycles de séchage-mouillage. Ce phénomène n'est pas pris en compte dans le modèle original exposé ici.

2.1 Phénoménologie du comportement des sols non saturés

2.1.1 Courbe de rétention d'eau

Outre les principaux aspects mécaniques communs avec les sols saturés [bib3], les milieux poreux comportant des phases liquides et gazeuses (sols non saturés en eau) ont pour caractéristique spécifique d'être très sensibles aux phénomènes de capillarité. Ces derniers correspondent à la localisation de ménisques de liquide (de plus en plus petits au fur et à mesure que le sol se désature) dans lesquels la pression d'eau est plus faible que la pression d'air (et d'autant plus faible que le ménisque est petit et donc le sol désaturé). On voit donc apparaître la notion de pression capillaire ou succion $p_c=(p_{gz}-p_{lq})$. En séchant, un sol non saturé a une teneur en eau φ_{lq} plus faible ce qui correspond à une succion plus élevée. La correspondance entre ces deux grandeurs est la courbe de rétention d'eau (cf. [Figure 2.1.1-a]). Celle-ci est obtenue par séchage d'un sol initialement saturé (la succion est alors nulle) et mouillage à partir de l'état sec.

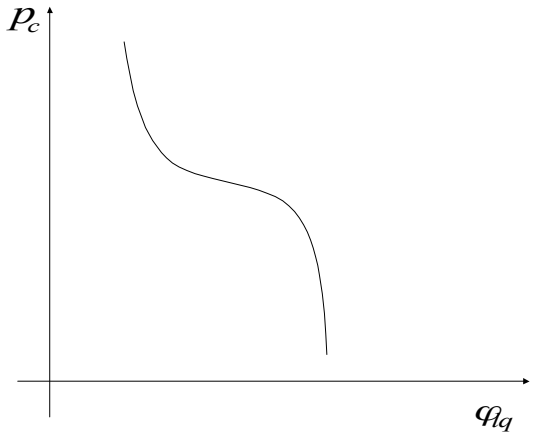


Figure 2.1.1-a : Courbe de rétention d'eau

2.1.2 Extension de la définition des contraintes effectives aux sols non saturés

Le comportement mécanique des sols non saturés est essentiellement observé en laboratoire à l'aide d'appareils à succion contrôlée (oedomètres et triaxiaux). La modélisation de ce comportement mécanique a d'abord été tentée en étendant la notion de contrainte effective aux milieux non saturés. Celle-ci est une fonction de la contrainte totale et de la pression intersticielle : $\boldsymbol{\sigma}' = f(\boldsymbol{\sigma}^T, p_{lq})$. Dans le cas saturé, on a simplement additivité de la pression et de la contrainte : $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}^T - p_{lq}\boldsymbol{I}$ car la pression de l'eau agit de la même façon dans l'eau et le solide dans toutes les directions. L'élargissement de cette notion aux milieux non saturés dans les années 1950 (tenant compte des

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

pressions des deux phases fluides) a amené la forme suivante de la contrainte effective : $\boldsymbol{\sigma}' = (\boldsymbol{\sigma}^T - p_{gz}\boldsymbol{I}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}_c)$ dont il est resté la contrainte proposée sous la forme :

$$d\sigma' = d(\sigma^T - p_{gz}) + bS_{lq}\, dp_c$$

où S_{lq} est le degré de saturation en eau et b le coefficient de Biot [bib7].

Dès les années 1960, l'observation expérimentale met en lumière certaines limitations de la notion de contrainte effective étendue aux sols non saturés. En particulier, l'essai d'effondrement à l'oedomètre met en défaut la contrainte de Bishop : Cet essai consiste à consolider un échantillon non saturé en maintenant la succion constante, puis à le remouiller à chargement constant. On observe alors un effondrement du sol. Si l'on poursuit la consolidation, la courbe correspond à un essai classique en saturé. Or, si l'on se réfère à la contrainte effective, celle-ci diminue pendant le remouillage (puisque la succion $p_c = (p_{gz} - p_{lq})$ s'annule) et comme elle est censée contrôler la déformation, il devrait y avoir gonflement ce qui est contradictoire avec l'observation expérimentale. La plupart des mécaniciens des sols s'accordent maintenant sur l'impossibilité de décrire complètement le comportement des sols non saturés à l'aide d'une seule contrainte et constatent la nécessité d'utiliser deux variables indépendantes (contrainte et succion).

3 Description du modèle original de Barcelone

Dans ce modèle, la courbe de rétention d'eau ne présente pas d'hystérésis, et elle n'est pas modifiée par la déformation mécanique comme c'est le cas dans la présentation faite par Dangla et coll. [bib2]. Il existe néanmoins un seuil en pression capillaire p_{c0} au delà duquel des déformations irréversibles apparaissent. Dans ce paragraphe on distingue une partie mécanique qui traite des déformations mécaniques induites par un chargement mécanique et une partie hydro-mécanique qui traite de l'effet de la succion sur la mécanique avant d'écrire les équations du comportement complet.

3.1 Comportement purement mécanique

On fait l'hypothèse que la succion p_c reste constante pendant la transformation mécanique. Les déformations résultant de la variation de la contrainte sont indicées $_p$.

On examine le comportement, sous chargement successivement sphérique et déviatorique, ce comportement étant considéré isotrope.

3.1.1 Chargement sphérique

3.1.1.1 Elasticité

L'état mécanique d'un sol non saturé sous sollicitation hydrostatique est déterminé par des essais oedométriques à succion contrôlée. Comme pour les sols saturés, le volume v de l'échantillon varie logarithmiquement avec la charge avec une pente κ de façon réversible jusqu'à une pression de consolidation $P_{cons}(p_c)$. On choisira κ indépendant de p_c , l'expérience montrant une faible dépendance de la pente élastique vis-à-vis de p_c .

La composante élastique de la déformation volumique varie alors comme :

$$\dot{\varepsilon}^e_{vp} = \frac{\kappa}{1+e_0}\frac{\dot{P}}{P} \text{ si } P < P_{cons}(p_c) \qquad \text{éq 3.1.1.1-1}$$

L'expression précédente est en fait dérivée d'un essai oedométrique à succion constante où l'on mesure la variation de l'indice des vides en fonction du chargement, d'où la loi élastique suivante :

$$P = P_0 \exp\left[k_0\left(\varepsilon_{vp} - \varepsilon^p_{vp}\right)\right] \qquad \text{éq 3.1.1.1-2}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

avec $k_0=\frac{(1+e_0)}{\kappa}$, où P_0 est la valeur de référence correspondante à $\varepsilon_{vp}^{e}=0$ et $e=e_0$, indice des vides initial.

3.1.1.2 Plasticité

Au delà de la pression de consolidation, le comportement du sol est plastique et la pente $\lambda(p_c)$ est dépendante de la succion (cf. [Figure 3.1.1.2-a]), cette dépendance étant estimée de la façon semi-empirique suivante :

$$\lambda(p_c)=\lambda(0)\left[(1-r)\exp(-\beta p_c)+r\right]$$

où $r=\frac{\lambda(p_c\to\infty)}{\lambda(0)}$ est une constante reliée au maximum de la rigidité du sol et β un paramètre qui contrôle l'évolution de la rigidité en fonction de la succion.

Le taux de déformation volumique est alors : $\dot{\varepsilon}_{vp}=\frac{\lambda(p_c)}{1+e_0}\frac{\dot{P}}{P}$ si $P>P_{cons}$,

d'où la composante plastique : $\dot{\varepsilon}_{vp}^{p}=\frac{(\lambda(p_c)-\kappa)}{1+e_0}\frac{\dot{P}}{P}$.

L'expression de P s'écrit donc :

$$P=P_0\exp\left[k\left(\varepsilon_{vp}^{p}\right)\right] \qquad \text{éq 3.1.1.2-1}$$

avec $k=\frac{(1+e_0)}{\lambda-\kappa}$

Remarque :

Les deux expressions [éq 3.1.1.1-2] et [éq 3.1.1.2-1] sont similaires à celles du modèle de Cam-Clay [bib5] avec le paramètre λ (ou k) dépendant de la pression capillaire. La compressibilité du sol diminue avec la succion.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Figure 3.1.1.2-a : Variation du volume spécifique sous chargement oedométrique

3.1.2 Chargement triaxial

3.1.2.1 Elasticité

La composante élastique de la déformation déviatorique est proportionnelle au chargement :

$$\tilde{\varepsilon}^e = \frac{s}{2\mu} \qquad \text{éq 3.1.2.1-1}$$

μ est indépendant de la succion.

3.1.2.2 Plasticité

Dans un essai triaxial de révolution, on introduit la contrainte de cisaillement $Q = \sigma_1 - \sigma_3$ (on pourra étendre la formulation qui suit au 3D en utilisant la norme au sens de von Mises de la contrainte). Quand la succion devient nulle (milieu saturé), le modèle est supposé se réduire au modèle Cam_Clay modifié [bib5] : le seuil de plasticité est alors une ellipse de centre $(P_{cr}^*, 0)$ qui coupe l'axe des contraintes hydrostatiques en zéro et en une valeur de pression de consolidation $P_{cons}^* = 2P_{cr}^*$. La surface de charge associée à une succion p_c non nulle est également une ellipse de centre $(P_{cr}(p_c) - \frac{P_s}{2}, 0)$ (cf. [Figure 3.1.2.2-a]) qui coupe l'axe hydrostatique en $P_{cons}(p_c) = 2P_{cr}(p_c)$ et $-P_s$, P_s représentant une cohésion variant linéairement avec la succion : $P_s = k_c p_c$. La ligne représentant les états critiques (variation volumique nulle) conserve la même pente M que celle en condition saturée mais décalée de P_s . L'équation de la surface de charge dans le diagramme (P, Q) pour p_c donnée s'écrit :

$$Q^2 - M^2 (P + P_s)(2P_{cr} - P) = 0 \qquad \text{éq 3.1.2.2-1}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'écoulement plastique dans le plan (P,Q) donc à p_c constante n'est pas associé à la surface de charge. Si c'était le cas, on aurait :

$$\dot{\varepsilon}_{vp}^{p}=\dot{\Lambda}\frac{\partial f_1}{\partial P} \qquad \dot{\tilde{\varepsilon}}^{p}=\dot{\Lambda}\frac{\partial f_1}{\partial s}$$

et le rapport suivant :

$$\frac{\dot{\tilde{\varepsilon}}_{eq^p}}{\dot{\varepsilon}_{vp}^{p}}=\frac{2\mathrm{Q}}{M^2\left(2\mathrm{P}+P_s-2\mathrm{P}_{cr}\right)}\ , \qquad \text{éq 3.1.2.2-2}$$

similaire au rapport obtenu dans le modèle de Cam-Clay (avec $P_s=0$). En fait dans ce modèle, on introduit un paramètre de correction α qui détruit le caractère de normalité, de façon que : $\frac{\dot{\tilde{\varepsilon}}_{eq^p}}{\dot{\varepsilon}_{vp}^{p}}=\frac{2\mathrm{Q}\alpha}{M^2\left(2\mathrm{P}+P_s-2\mathrm{P}_{cr}\right)}$. α est donné par les auteurs du modèle [bib1] comme étant :

$$\alpha=\frac{M\left(M-9\right)\left(M-3\right)}{9\left(6-M\right)}\left\{\frac{1}{\left[1-\frac{\kappa}{\lambda(0)}\right]}\right\} \qquad \text{éq 3.1.2.2-3}$$

Ce correcteur permet de mieux prendre en compte les résultats expérimentaux, et en particulier de mieux estimer le coefficient de poussée des terres.

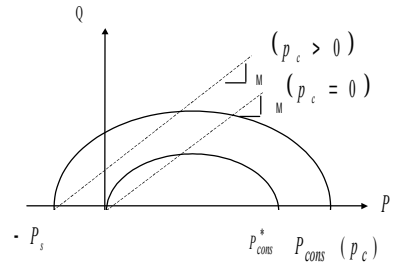


Figure 3.1.2.2-a : Critère dans l'espace (P,Q)

3.2 Couplage hydro-mécanique ou effet de la succion sur la mécanique

Les variations de succion (à charge constante) entraînent des déformations (celles-ci seront alors indicées par $_s$) réversibles quand $p_c<p_{c0}$ et irréversibles quand la succion dépasse le seuil p_{c0}.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.2.1 Partie réversible

Les essais oedométriques à contrainte constante et à succion contrôlée nous donnent la variation de l'indice des vides en fonction de la succion [Figure 3.2.1-a] réversible en dessous du seuil en succion :

$e - e_0 = -\kappa_s \, Ln \frac{p_c}{p_{atm}}$ si $p_c < p_{c0}$,

avec κ_s indépendant de l'état de confinement.

La déformation pouvant s'écrire : $\varepsilon_v - \varepsilon_{v0} = -\frac{e - e_0}{1 + e_0}$, on a :

$$\dot{\varepsilon}_{vs}^e = \frac{\kappa_s}{1 + e_0} \frac{\dot{p}_c}{p_c + p_{atm}} = \frac{1}{k_{0s}} \frac{\dot{p}_c}{\left(p_c + p_{atm} \right)} \qquad \text{éq 3.2.1-1}$$

L'évolution de la succion s'écrit alors :

$$p_c = p_{atm} \exp\left(k_{0s} \left(\varepsilon_{vs}^e - \varepsilon_{v0}^e \right) \right) \text{ , avec } k_{0s} = \frac{1 + e_0}{\kappa_s} \qquad \text{éq 3.2.1-2}$$

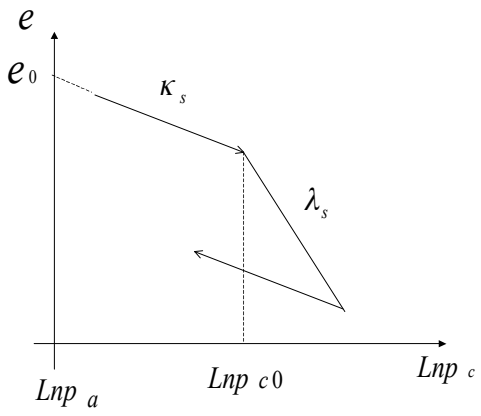


Figure 3.2.1-a : Evolution de la succion

3.2.2 Partie irréversible

Au delà du seuil p_{c_0} , des déformations irréversibles apparaissent, la pente dans l'essai oedométrique devenant λ_s. Cette pente peut en réalité dépendre de la contrainte hydrostatique appliquée à l'échantillon, mais elle est considérée constante dans le modèle original de Barcelone. Comme l'on peut le constater sur la [Figure 3.2.2], la pression de consolidation augmente avec la succion. La [Figure 3.2.2 (a)]) montre deux essais de consolidation en condition saturé $\left(p_c = 0 \right)$ et non saturé $\left(p_c > 0 \right)$. Une relation entre P_{cons}^* (point 3) valeur de la préconsolidation en saturé et P_{cons} (point 2) la pression de préconsolidation en non saturé est établie en comparant les volumes spécifiques obtenus sur des chemins suivant les points 1, 2, 3 [Figure 3.2.2(a)] qui décrivent une décharge de $P_{con.}$ à P_{cons}^* à succion constante suivie d'un remouillage d'une valeur p_c à 0 à pression constante P_{cons}^* , d'où l'équation suivante :

$$v_1 + \Delta v_{pression} + \Delta v_{succion} = v_3$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On fait l'hypothèse que la réduction de la succion $2 \rightarrow 3$ s'accompagne de déformations réversibles. La relation élastique est la suivante : $dv = -\kappa_s \frac{dp_c}{(p_c + p_{atm})}$, où p_{atm} est la pression atmosphérique. On écrit pour le point 1 et 3 l'expression du volume comme suit :

$$v = N(P_0) - \lambda(p_c) \ln \frac{P}{P_0}$$

où P_0 est une pression de référence correspondant à un volume initial $N(P_0)$. On combine cette expression et les relations élastiques :

$$N(P_0) - \lambda(p_c) \ln \frac{P_{cons}}{P_0} + \kappa \ln \frac{P_{cons}}{P^*_{cons}} + \kappa_s \ln \frac{p_c + p_{atm}}{p_{atm}} = N(0) - \lambda(0) \ln \frac{P^*_{cons}}{P_0}$$

En éliminant les volumes initiaux par la relation élastique :

$$\Delta v(P_0)|^0_{p_c} = N(0) - N(P_0) = \kappa_s \ln \frac{p_c + p_{atm}}{p_{atm}}$$

on détermine alors l'évolution suivante du seuil de consolidation en condition non saturée :

$$\left(\frac{P_{cons}}{P_0} \right) = \left(\frac{P^*_{cons}}{P_0} \right)^{\left[\frac{\lambda(0) - \kappa}{\lambda(p_c) - \kappa} \right]}$$

Comme $P_{cons} = 2P_{cr}$,

On trouve :

$$P_{cr} = \frac{P_0}{2} \left(\frac{2P^*_{cr}}{P_0} \right)^{\left[\frac{\lambda(0) - \kappa}{\lambda(p_c) - \kappa} \right]} \quad \text{éq 3.2.2-}$$

La [Figure 3.2.2] visualise le chemin 1-2-3 dans le plan (P, p_c) .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

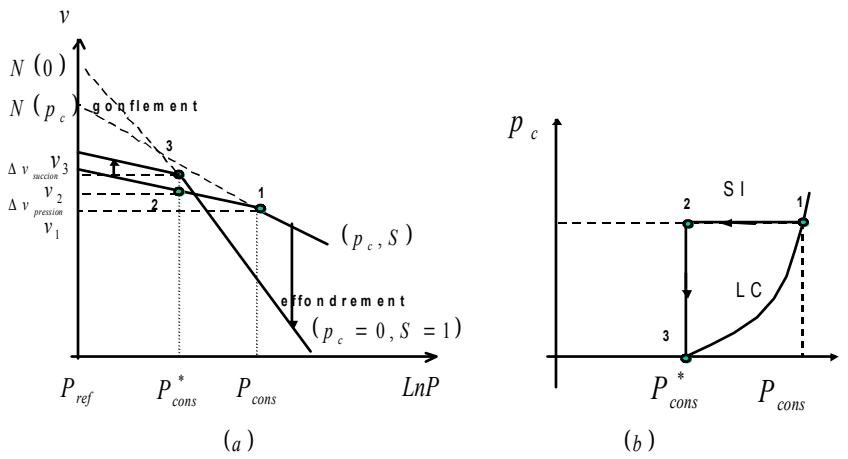


Figure 3.2.2 : (a) Courbes de compression pour sols saturé et non-saturé
(b) critère dans le diagramme (P, p_c)

La composante totale de la déformation volumique due à l'évolution de la succion est :

$$\dot{\varepsilon}_{vs}=\frac{\lambda_s}{(1+e_0)}\ \frac{\dot{p}_c}{p_c+p_{atm}}\ \text{si}\quad p_c>p_{atm} \qquad \text{éq 3.2.2-}$$

d'où la composante plastique qui s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_{vs}^{p}=\frac{(\lambda_s-\kappa_s)}{(1+e_0)}\ \frac{\dot{p}_c}{p_c+p_{atm}}=\frac{1}{k_s}\frac{\dot{p}_c}{p_c+p_{atm}} \qquad \text{éq 3.3.2-}$$

Remarque :

La variation de succion n'engendre pas de déformations déviatoriques.

3.3 Comportement complet (chargement mécanique et hydrique)

3.3.1 Comportement réversible

Sous chargement sphérique, l'évolution de la composante élastique volumique totale s'écrit donc :

$$\dot{\varepsilon}_v^e=\dot{\varepsilon}_{vp}^e+\dot{\varepsilon}_{vs}^e=\frac{1}{k_0}\frac{\dot{P}}{P}+\frac{1}{k_{0s}}\frac{\dot{p}_c}{(p_c+p_{atm})} \qquad \text{éq 3.3.1-1}$$

Les évolutions des parties hydrostatique et déviatorique de la contrainte σ s'écrivent donc :

$$\frac{\dot{P}}{P}=k_0\dot{\varepsilon}_v^e-\frac{k_0}{k_{0s}}\frac{\dot{p}_c}{(p_c+p_{atm})}\ , \qquad \text{éq 3.3.1-2}$$

$$\dot{s}_{ij}=2\mu\,\tilde{\dot{\varepsilon}}_{ij}^e\ , \qquad \text{éq 3.3.1-3}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3.2 Seuils d'écoulement

Les deux seuils du domaine réversible sont tels que :

Critère mécanique : $f_1(P,Q,P_{cr}(p_c),p_c)=Q^2+M^2\left(P+k_c\,p_c\right)\left(P-2\mathrm{P}_{cr}(p_c)\right)\leq 0$ éq 3.3.2-1

Critère hydrique : $f_2\left(p_c,p_{c_0}\right)=p_c-p_{c_0}\leq 0$ éq 3.3.2-2

Le domaine tridimensionnel de réversibilité dans l'espace (P,Q,p_c) est représenté sur [Figure 3.3.2-a].

Ces deux critères se réduisent dans le plan (P,p_c) aux courbes appelées LC (loading collapse) et SI (succion increase) (cf. [Figure 3.3.2-b]).

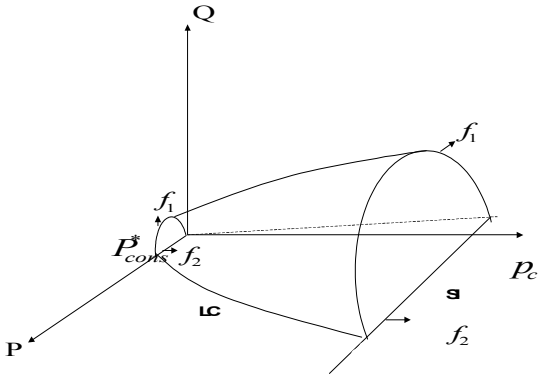


Figure 3.3.2-a : Surface de charge dans l'espace $\left(P,Q,p_c\right)$

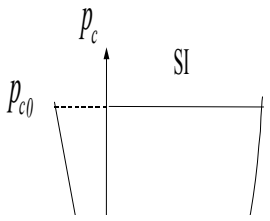


Figure 3.3.2-b : Surface de charge dans l'espace $\left(P,p_c\right)$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3.3 Lois d'écoulement

L'écoulement plastique est contrôlé par les deux critères en pression et en succion :

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\Lambda}\frac{\partial f_1}{\partial P} = \dot{\Lambda} M^2\left(2\mathrm{P} - 2\mathrm{P}_{cr} + \mathrm{k}_c\, p_c\right) \qquad \text{éq 3.3.3-1}$$

$$\tilde{\dot{\varepsilon}}^p = \alpha\,\dot{\Lambda}\frac{\partial f_1}{\partial s} = \alpha\,\dot{\Lambda}\frac{\partial f_1}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial s} = 3\alpha\,\dot{\Lambda}\, s \qquad \text{éq 3.3.3-2}$$

$$\text{ou} \quad \dot{\varepsilon}_v^p = \frac{1}{k_s}\,\frac{\dot{p}_c}{p_c + p_{atm}}\ ,\ \tilde{\dot{\varepsilon}}^p = 0 \qquad \text{éq 3.3.3-3}$$

3.3.4 Lois d'écrouissage

L'évolution des surfaces de charge est contrôlée par les forces d'écrouissage : P_{cr} et p_{c0}.
Les lois d'écrouissage de chacune des surfaces sont :

Sur f_1 , $\dfrac{\dot{P}_{cr}}{P_{cr}} = k\,\dot{\varepsilon}_v^p$ éq 3.3.4-1

Sur f_2 , $\dfrac{\dot{p}_{c0}}{p_{c0} + p_{atm}} = k_s\,\dot{\varepsilon}_v^p$ éq 3.3.4-2

3.3.5 Inventaire des configurations de couplage mécanique et hydrique

On examine les différentes configurations de chargement dans l'espace (P, p_c).

3.3.5.1 Réversibilité totale

Le chargement représenté par le point M (cf. [Figure 3.3.5.1-a]) se situe à l'intérieur du domaine de réversibilité : élasticité, et réversibilité hydrique. Cela se traduit par :

$f_1 < 0$, ou ($f_1 = 0,\ \dot{f}_1 < 0$), et $p_c < p_{c0}$, ou ($p_c = p_{c0}$, $\dot{p}_c < 0$).

Les relations exprimant cette réversibilité sont :

$$\frac{\dot{P}}{P} = k_0\,\dot{\varepsilon}_v - \frac{k_0}{k_{0s}}\frac{\dot{p}_c}{\left(p_c + p_{atm}\right)}$$

c'est-à-dire :

$$P = P_0\,\frac{\exp\left(k_0\left(\varepsilon_v - \varepsilon_{v0}\right)\right)}{\left(\dfrac{p_c + p_{atm}}{p_{atm}}\right)^{k_0/k_{0s}}}\ , \qquad \text{éq 3.3.5.1-1}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

et

$$s = 2\mu\,\tilde{\varepsilon} \qquad \text{éq 3.3.5.1-2}$$

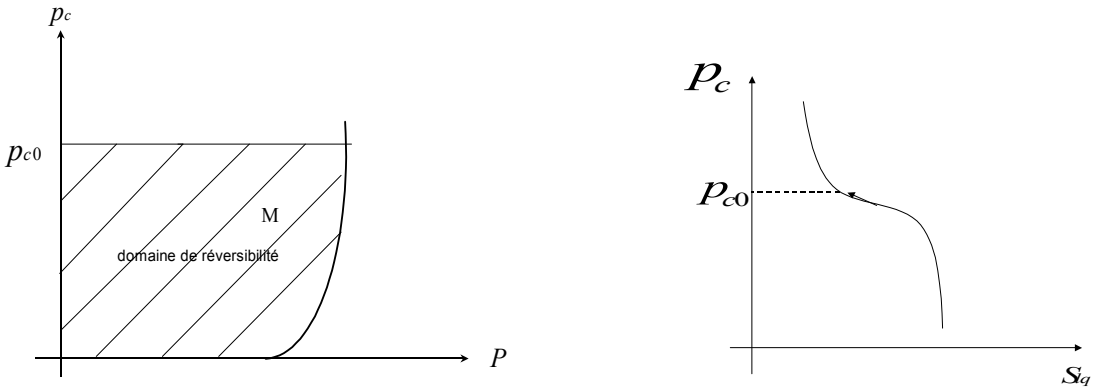


Figure 3.3.5.1-a : Domaine de réversibilité dans le plan (P, p_c)- courbe de rétention d'eau

3.3.5.2 Comportement élasto-plastique

Le point M touche le critère de mécanique seul (cf. [Figure 3.3.5.2-a]) :

$$f_1 = 0,\ \dot{f}_1 = 0, \text{ et } p_c < p_{c0} \text{ (ou } p_c = p_{c0} \text{ et } \dot{p}_c < 0 \text{)}$$

L'évolution élastique s'écrit donc :

$$\frac{\dot{P}}{P} = k_0\,\dot{\varepsilon}_v^e - \frac{k_0}{k_{0s}}\frac{\dot{p}_c}{(p_c + p_{atm})} \quad ,$$

c'est-à-dire :

$$P = P_0\,\frac{\exp\left(k_0\,(\varepsilon_v^e - \varepsilon_{v0}^e)\right)}{\left(\dfrac{p_c + p_{atm}}{p_{atm}}\right)^{k_0/k_{0s}}} \qquad \text{éq 3.3.5.2-1}$$

et

$$s = 2\mu\,\tilde{\varepsilon} \qquad \text{éq 3.3.5.2-2}$$

L'évolution des composantes de la déformation plastique est :

$$\tilde{\dot{\varepsilon}}^p = 3\alpha\Lambda s$$
$$\dot{\varepsilon}_v^p = \Lambda M^2\left[2P - 2P_{cr} + k_c\,p_c\right]$$

L'évolution du seuil mécanique s'écrit : $\dot{P}_{cr} = kP_{cr}\,\dot{\varepsilon}_{vp}^p = kP_{cr}\,\Lambda M^2\left[2P - 2P_{cr} + k_c\,p_c\right]$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Une spécificité du modèle de Barcelone original est l'hypothèse que l'écrouissage mécanique est complètement couplé à l'écrouissage hydrique (cf. [Figure 3.3.5.2-a]) d'où la relation :

$$\frac{\dot{p}_{c0}}{p_{c0}+p_{atm}}=\frac{k_s}{k}\frac{\dot{P}_{cr}}{P_{cr}} \qquad \text{éq 3.3.5.2-3}$$

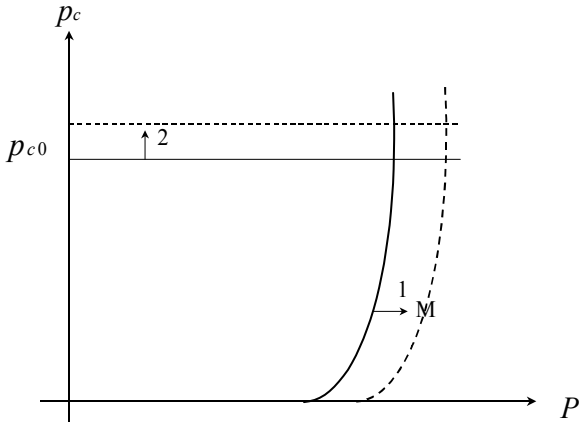


Figure 3.3.5.2-a : Couplage de l'écrouissage mécanique à l' écrouissage hydrique

3.3.5.3 Comportement hydrique engendrant des déformations irréversibles

Le point M atteint le seuil en succion (cf. [Figure 3.3.5.2-a]) :

$$p_c=p_{c0} \text{ et } \dot{p}_c>0$$

Le comportement mécanique est élastique :

$$P=P_0\frac{\exp\left(k_0\left(\varepsilon_v^e-\varepsilon_{v0}^e\right)\right)}{\left(\frac{p_c+p_{atm}}{p_{atm}}\right)^{k_0/k_{0s}}} \quad , \quad \dot{s}=2\mu\,\tilde{\dot{\varepsilon}} \qquad \text{éq 3.3.5.3-1}$$

mais comme le seuil mécanique est couplé à celui de la succion, il y a aussi écrouissage mécanique :

$$\frac{\dot{P}_{cr}}{P_{cr}}=\frac{k}{k_s}\frac{\dot{p}_{c0}}{p_{c0}+p_{atm}} \qquad \text{éq 3.3.5.3-2}$$

Le taux de déformation plastique s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_v^p=\frac{1}{k_s}\frac{\dot{p}_c}{p_c+p_{atm}}$$
$$\tilde{\dot{\varepsilon}}^p=0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

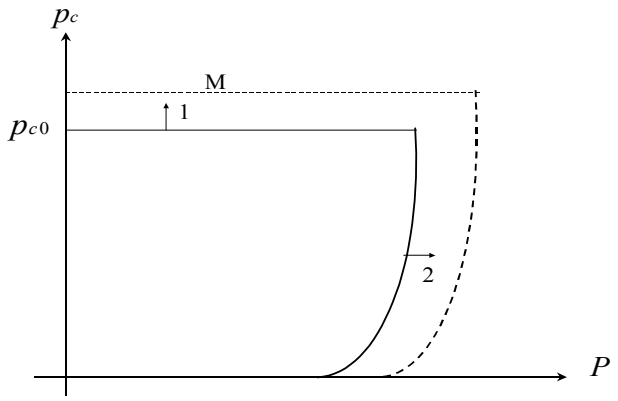


Figure 3.3.5.3-a : Couplage de l'écrouissage hydrique à l' écrouissage mécanique

3.4 Données du modèle de Barcelone

Le modèle nécessite les paramètres suivants :

1) Les paramètres élastiques fournis sous le mot clé ELAS :
Le coefficient de dilatation thermique α, les deux coefficients élastiques E, v fournis en données à partir desquels est calculé le coefficient de Lamé μ.

2) Sous le mot clé CAM_CLAY :
   1) P_0 Pression hydrostatique initiale égal à la pression atmosphérique notée PA sous le mot clé CAM_CLAY
   2) au lieu de donner l'indice des vides initial e_0 on donne la porosité initiale qui doit être de valeur égale à celle donnée sous le mot clé THM_INIT, notée PORO.
   3) Les paramètres associés à la surface seuil LC (contraintes isotropes) : P_{cr}^* , égale à la moitié de la pression de préconsolidation P_{cons}^* noté PRES_CRIT, λ^* , le coefficient de compressibilité pour un état saturé et κ le coefficient de compressibilité élastique, notés LAMBDA et KAPA.
   4) La pente critique M ,

3) Sous le mot clé BARCELONE :
   1) r et β, les coefficients permettant de calculer $\lambda(p_c)$, notés R et BETA.
   2) les paramètres liées à une variation de succion : λ_s, coefficient de compressibilité lié à une variation de succion dans le domaine plastique, κ_s coefficient associé au changement de succion dans le domaine élastique, notés LABDAS et KAPAS.
   3) k_c le paramètre qui contrôle l'augmentation de la cohésion avec la succion
   4) le seuil initial de la succion p_{c0}, noté PC0_INIT
   5) α le coefficient de normalité, noté ALPHAB.

Voici un jeu de valeurs de quelques uns de ces paramètres , issu de [bib1] :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\lambda(0)=0.2\,;\kappa=0.02\,;r=0.75\,;\beta=12.5\,MPa^{-1}\,;P_0=0.10\,MPa\,;$$
$$\lambda_s=0.08\,;\kappa_s=0.008\,;G=10\,MPa\,;M=1\,;k_c=0.6$$

4 Intégration numérique des relations de comportement

4.1 Rappel du problème

L'intégration numérique du modèle est similaire à celle effectuée pour la loi de Cam-Clay [bib5], en opérant une translation sur l'axe des pressions capillaires.
Ce modèle est obligatoirement couplé au comportement hydraulique, contrairement à Cam-Clay qui peut être utilisé dans un cadre purement mécanique (on simule alors un comportement drainé).
Le modèle de Barcelone n'est donc utilisable que dans le cadre des comportements THHM implantés dans *Code_Aster* [bib7] et [bib8]. Il sera plus particulièrement employé avec les modélisations KIT_HHM et KIT_THHM (dans ce dernier cas, il n'y a pas pour l'instant de dépendance des caractéristiques mécaniques spécifiques au modèle de Barcelone avec la température).
Les variables d'entrée du modèle sont Δu ou $\Delta\varepsilon$ et $\Delta P1$, $\Delta P2$, $P1$ et $P2$ étant égales dans les modélisations citées à Δp_c, Δp_{gz}, p_c et p_{gz} que ce soit avec les modélisations hydriques LIQU_VAPE_GAZ ou LIQU_GAZ.
Les variables de sortie du modèle sont : σ', P_{cr}, p_{c0}, P_s.
On emploie les notations suivantes : $A^-, A, \Delta A$ respectivement pour la quantité évaluée à l'instant connu t, à l'instant $t+\Delta t$ et son incrément. Les équations sont discrétisées de manière implicite, c'est-à-dire exprimées en fonction des variables inconnues à l'instant $t+\Delta t$.

On notera :

P_{cr}^- la quantité $P_{cr}^-(p_c^-)$,

$P_{cr}^-(p_c)$ la quantité $\frac{P_0}{2}\left(\frac{2\mathrm{P}_{cr}^-}{P_0}\right)^{\left[\frac{\lambda(p_c^-)-\kappa}{\lambda(p_c)-\kappa}\right]}$ et

$P_{cr}(p_c)=P_{cr}^-(p_c)\exp\left(k\Delta\varepsilon_v^p\right)$

4.2 Relations incrémentales

Les règles d'écoulement et la condition de consistance donnent les relations d'écoulement suivantes :
Si le seuil f_1 est atteint, l'incrément de déformation plastique volumique s'écrit :

$$\Delta\varepsilon_v^p=\frac{1}{k\left(P+k_c p_c\right)P_{cr}}\left[\frac{\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)}{2}\Delta P+\frac{Q}{M^2}\Delta Q-\frac{k_c}{2}\left(2\mathrm{P}_{cr}-P\right)\Delta p_c\right] \quad \text{éq 4.2-1}$$

L'incrément de la norme de la déformation plastique équivalente est alors :

$$\Delta\varepsilon_{eqp}^p=\frac{\alpha}{kP_{cr}\left(P+k_c p_c\right)}\left[\frac{Q}{M^2}\Delta P+\frac{2\mathrm{Q}^2}{M^4\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)}\Delta Q-\frac{k_c Q\left(2\mathrm{P}_{cr}-P\right)}{M^2\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)}\Delta p_c\right] \quad \text{éq 4.2-2}$$

et le tenseur déviatorique s'écrit :

$$\Delta\tilde{\varepsilon}^p=\frac{3\alpha\mathrm{s}}{M^2\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+P_s\right)}\Delta\varepsilon_v^p \quad \text{éq 4.2-3}$$

Si f_2 est atteint, l'incrément de déformation plastique volumique est déterminé par :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\Delta\varepsilon_v^p = \frac{1}{k_s} Ln\left(\frac{p_{c0}+p_{atm}}{p_{c0}^-+p_{atm}}\right) \quad \text{éq 4.2-4}$$

la déformation plastique étant purement volumique ($\Delta\tilde{\varepsilon}^p = 0$)

ε_v^p sera l'inconnue principale du problème et déterminée en résolvant $f_1(P^-, Q^-, P_{cr}^-(p_c), p_c, \Delta\varepsilon_v^p)=0$, ou $f_2(p_c, \Delta p_{c0})=0$, l'incrément de déformation plastique volumique étant obtenu à partir de Δp_{c0} .On en déduit alors l'évolution des contraintes et des seuils.

4.3 Calcul des contraintes et des variables internes

La prédiction élastique de la contrainte déviatorique s'écrit :

$$s^e = s^- + 2\mu\Delta\tilde{\varepsilon} \quad \text{éq 4.3-1}$$

On choisit la prédiction élastique $t+\Delta t$ de la manière suivante :

$$P^e = P^- \frac{\exp\left(k_0 \Delta\varepsilon_v\right)}{\left(\frac{p_c+_{atm}}{p_c^-+p_{atm}}\right)^{k_0/k_{0s}}} \quad \textbf{éq 4.3-2}$$

Si $f_1<0$ et $f_2<0$, alors $P=P^e, s=s^e, \Delta\varepsilon^p=0, P_{cr}=\frac{P_0}{2}\left(\frac{2P_{cr}^-}{P_0}\right)^{\left[\frac{\lambda(p_c^-)-\kappa}{\lambda(p_c)-\kappa}\right]}, \Delta p_{c0}=0$,

Sinon :

$$s = s^e - 2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}^p \quad \text{éq 4.3-3}$$

$$P = P^e \exp\left[-k_0 \Delta\varepsilon_v^p\right] \quad \text{éq 4.3-4}$$

$$P_{cr} = \frac{P_0}{2}\left(\frac{2P_{cr}^-}{P_0}\right)^{\left[\frac{\lambda(p_c^-)-\kappa}{\lambda(p_c)-\kappa}\right]} \exp\left[k\Delta\varepsilon_v^p\right] \quad \textbf{éq 4.3-5}$$

$$(p_{c0}+p_{atm}) = (p_{c0}^-+p_{atm})\exp\left[k_s \Delta\varepsilon_v^p\right] \quad \text{éq 4.3-6}$$

L'inconnue principale est donc $\Delta\varepsilon_v^p$.

Si $f_1>0$, alors

En remplaçant $\Delta\tilde{\varepsilon}^p$ par son expression en fonction de $\Delta\varepsilon_v^p$ [éq 4.2-3] on obtient :

$$s = \frac{s^e}{1+\frac{6\alpha\mu\Delta\varepsilon_v^p}{M^2\left(2P-2P_{cr}+k_c p_c\right)}} \quad \text{éq 4.3-7}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

et :

$$P = P^e \exp\left[-k_0 \Delta\varepsilon_v^p \right] \qquad \text{éq 4.3-8}$$

L'inconnue est déterminée en résolvant $f_1(P, Q, P_{cr}, p_c) = f_1(P^e, Q^e, P_{cr}^-(p_c), p_c, \Delta\varepsilon_v^p) = 0$,

C'est-à-dire :

$$Q^{e^2} = -M^2 \left[1 + \frac{6\alpha\mu\,\Delta\varepsilon_v^p}{M^2\left(2\mathrm{P} - 2\mathrm{P}_{cr} + k_c p_c\right)} \right]^2 \left(P + k_c p_c\right)\left(P - 2\mathrm{P}_{cr}\right) ,$$

ou encore :

$$Q^{e^2} = -M^2 \left[1 + \frac{6\alpha\mu\,\Delta\varepsilon_v^p}{M^2\left(2\mathrm{P}^e \exp\left(-k_0\Delta\varepsilon_v^p\right) - 2\mathrm{P}_{cr}^-(p_c)\exp\left(k\Delta\varepsilon_v^p\right) + k_c p_c\right)} \right]^2 \left[P^e \exp\left(-k_0\Delta\varepsilon_v^p\right) + k_c p_c \right] \left[P^e \exp\left(-k_0\Delta\varepsilon_v^p\right) - 2\mathrm{P}_{cr}^-(p_c)\exp\left(-k\Delta\varepsilon_v^p\right) \right] \qquad \text{éq 4.3-9}$$

Si $f_2 > 0$, alors : $\Delta p_{c0} = \Delta p_c$, l'inconnue est immédiatement donnée par :

$$\Delta\varepsilon_v^p = \frac{1}{k_s} Ln\left(\frac{p_{c0} + p_{atm}}{p^{-c0} + p_{atm}}\right) , \qquad \text{éq 4.3-10}$$

d'où $s = s^e$ et $P = P^e \exp\left[-k_0 \Delta\varepsilon_v^p \right]$ éq 4.3-11

On a de plus $P_{cr} = \frac{P_0}{2}\left(\frac{2\mathrm{P}_{cr}^-}{P_0}\right)^{\left[\frac{\lambda(p_c^-) - \kappa}{\lambda(p_c) - \kappa}\right]} \exp\left[k\Delta\varepsilon_v^p \right]$. éq 4.3-12

²

5 Opérateur tangent

Si l'option est : RIGI_MECA_TANG, option utilisée lors de la prédiction, l'opérateur tangent calculé en chaque point de Gauss est dit en vitesse :

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^{elp} \dot{\varepsilon}_{kl} ,$$

c'est-à-dire que D_{ijkl}^{elp} est calculé à partir des équations non discrétisées.

Si l'option est : FULL_MECA, option utilisée quand on réactualise la matrice tangente en mettant à jour les contraintes et les variables internes :

$$d\sigma_{ij} = A_{ijkl}\, d\varepsilon_{kl}$$

Dans ce cas, A_{ijkl} est calculé à partir des équations discrétisées implicitement.

L'opérateur tangent des contraintes généralisées est implémenté dans THHM sous le nom $D\Sigma DE$ et partitionné en plusieurs blocs. Les blocs concernés par le modèle sont [DMECDE], [DMECP1] [bib8]. On calcule la contribution du modèle à chacun de ces blocs pour l'opérateur tangent en élasticité, l'opérateur en vitesse et l'opérateur cohérent.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.1 Opérateur tangent élastique non linéaire

La relation élastique en vitesse du modèle de Barcelone s'écrit :

$$\dot{\sigma}_{ij} = -\dot{P}\delta_{ij} + \dot{s}_{ij} = k_0 P tr\{\dot{\varepsilon}\}\delta_{ij} + 2\mu\,\tilde{\dot{\varepsilon}}_{ij} + \frac{k_0}{k_{0s}} P \frac{\dot{p}_c}{p_c + p_{atm}}\delta_{ij} \quad \text{éq 5.1-1}$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left(k_0 P - \frac{2}{3}\mu\right) tr\,\dot{\varepsilon}\,\delta_{ij} + 2\mu\,\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{k_0}{k_{0s}} P \frac{\dot{p}_c}{p_c + p_{atm}}\delta_{ij} \quad \text{éq 5.1-2}$$

Le tenseur des contraintes utilisé dans le modèle de Barcelone (et dans les essais déterminant les données du modèle) est fonction de la contrainte totale et de la pression de gaz et s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{T}} + p_{gz}\boldsymbol{I} \quad \text{éq 5.1-3}$$

Le tenseur des contraintes de Bishop $\boldsymbol{\sigma}'$ utilisé dans le *Code_Aster* est tel que : $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{T}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \dot{\sigma}_P \boldsymbol{I}$ avec

$$\dot{\sigma}_P = -b\left(\dot{p}_{gz} - S_{lq}\dot{p}_c\right) \quad \text{éq 5.1-4}$$

D'où l'expression de la contrainte de Bishop en fonction de la contrainte du modèle de Barcelone :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \left((b-1)\dot{p}_{gz} - bS_{lq}\dot{p}_c\right)\boldsymbol{I} \quad \text{éq 5.1-5}$$

Remarque :

La contrainte de Bishop est généralement considérée comme une contrainte effective (contrôlée uniquement par la déformation). Ce n'est pas le cas du modèle de Barcelone où il faut deux contraintes ((σ, p_c) pour décrire le comportement. Par conséquent, dans l'opérateur tangent, le terme $\frac{\partial \dot{\sigma}'}{\partial p_c}$ ne se résume pas à $-\frac{\partial \dot{\sigma}_p}{\partial p_c}$.

La partie [DMECDE] de la matrice $D\Sigma\,DE$ correspondant à $\frac{\partial \sigma'}{\partial \varepsilon}$ est telle que :

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}'_{11} \\ \dot{\sigma}'_{22} \\ \dot{\sigma}'_{33} \\ \sqrt{2}\dot{\sigma}'_{12} \\ \sqrt{2}\dot{\sigma}'_{23} \\ \sqrt{2}\dot{\sigma}'_{31} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_0P + \frac{4}{3}\mu & k_0P - \frac{2}{3}\mu & k_0P - \frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 \\ k_0P - \frac{2}{3}\mu & k_0P + \frac{4}{3}\mu & k_0P - \frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 \\ k_0P - \frac{2}{3}\mu & k_0P - \frac{2}{3}\mu & k_0P + \frac{4}{3}\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}}_{D^e} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \\ \sqrt{2}\dot{\varepsilon}_{12} \\ \sqrt{2}\dot{\varepsilon}_{23} \\ \sqrt{2}\dot{\varepsilon}_{31} \end{bmatrix} \quad \text{éq 5.1-6}$$

La partie [DMECP1] de la matrice $D\Sigma\,DE$ se réduit à $\frac{\partial \sigma'}{\partial p_1}$ avec $(p_1 = p_c)$ qui est tel que :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}'_{11} \\ \dot{\sigma}'_{22} \\ \dot{\sigma}'_{33} \\ \sqrt{2}\dot{\sigma}'_{12} \\ \sqrt{2}\dot{\sigma}'_{23} \\ \sqrt{2}\dot{\sigma}'_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{k_0}{k_{0s}}\frac{P}{p_c+p_{atm}}-bS_{lq}\right) & \left(\frac{k_0}{k_{0s}}\frac{P}{p_c+p_{atm}}-bS_{lq}\right) & \left(\frac{k_0}{k_{0s}}\frac{P}{p_c+p_{atm}}-bS_{lq}\right) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\dot{p}_1\}$$

éq 5.1-7

5.2 Opérateur tangent plastique en vitesse. Option RIGI_MECA_TANG

L'opérateur tangent global est dans ce cas obtenu à partir des résultats connus à l'instant t_{i-} (l'option RIGI_MECA_TANG appelée à la première itération d'un nouvel incrément de charge).
Si à t_{i-} la frontière du domaine de réversibilité est atteinte, on écrit la condition : $\dot{f}=0$ qui doit être vérifiée conjointement avec la condition $f=0$. Si à t_{i-} on est strictement à l'intérieur du domaine, $f<0$, alors l'opérateur tangent est l'opérateur d'élasticité.

Dans le cas où le critère mécanique est atteint :

$\dot{f}_1=0$

$$\dot{f}_1=\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)\dot{\sigma}+\frac{\partial f_1}{\partial P_{cr}}\dot{P}_{cr}+\frac{\partial f_1}{\partial p_c}\dot{p}_c=0 \qquad \text{éq 5.2-1}$$

comme $\dot{P}_{cr}=\frac{\partial P_{cr}}{\partial \varepsilon_v^p}\dot{\varepsilon}_v^p+\frac{\partial P_{cr}}{\partial p_c}\dot{p}_c$, alors :

$$\dot{f}_1=\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)\dot{\sigma}+\frac{\partial f_1}{\partial P_{cr}}\left(\frac{\partial P_{cr}}{\partial \varepsilon_v^p}\dot{\varepsilon}_v^p+\frac{\partial P_{cr}}{\partial p_c}\dot{p}_c\right)+\frac{\partial f_1}{\partial p_c}\dot{p}_c=0 \qquad \text{éq 5.2-2}$$

On a par ailleurs : $\dot{\sigma}_{ij}=D^e_{ijkl}\dot{\varepsilon}^{e_{kl}}+k_0 P\frac{\dot{p}_c}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}\delta_{ij}$ **éq 5.2-3**

c'est-à-dire :

$$\dot{\sigma}_{ij}=D^e_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}-\Lambda D^e_{ijkl}\left(\alpha\frac{\partial f_1}{\partial s_{kl}}-\frac{1}{3}\frac{\partial f_1}{\partial P}\delta_{kl}\right)+k_0 P\frac{\dot{p}_c}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}\delta_{ij} \qquad \text{éq 5.2-4}$$

En écrivant le module d'écrouissage plastique :

$$H_p=-\frac{\partial f_1}{\partial P_{cr}}\frac{\partial P_{cr}}{\partial \varepsilon_v^p}\frac{\partial f_1}{\partial P}, \qquad \text{éq 5.2-5}$$

Les équations [éq 5.2-2] et [éq 5.2-5] donnent :

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{ij}\dot{\sigma}_{ij}-\Lambda H_p+\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_c}+\frac{\partial f_1}{\partial P_{cr}}\frac{\partial P_{cr}}{\partial p_c}\right)\dot{p}_c=0 \qquad \text{éq 5.2-6}$$

La multiplication de l'équation [éq 5.2-4] par $\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{ij}$ donne :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{ij}\dot{\sigma}_{ij}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{ij}D^e_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}-\Lambda\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{ij}D^e_{ijkl}\left(\alpha\frac{\partial f_1}{\partial s_{kl}}-\frac{1}{3}\frac{\partial f_1}{\partial P}\delta_{kl}\right)+\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{ij}k_0P\delta_{ij}\frac{\dot{p}_c}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}$$ éq 5.2-7

Les deux équations précédentes permettent de trouver :

$$H_p\Lambda=\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{ij}D^e_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}-\Lambda\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{ij}D^e_{ijkl}\left(\alpha\frac{\partial f_1}{\partial s_{kl}}-\frac{1}{3}\frac{\partial f_1}{\partial P}\delta_{kl}\right)_{kl}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{ij}k_0P\delta_{ij}\frac{\dot{p}_c}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_c}+\frac{\partial f_1}{\partial P_{cr}}\frac{\partial P_{cr}}{\partial p_c}\right)\dot{p}_c$$ **éq 5.2-8**

d'où et d'en déduire l'expression du multiplicateur plastique :

$$\Lambda=\frac{\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{ij}D^e_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}+\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{ij}k_0P\delta_{ij}\frac{1}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_c}+\frac{\partial f_1}{\partial P_{cr}}\frac{\partial P_{cr}}{\partial p_c}\right)\right]\dot{p}_c}{\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{ij}D^e_{ijkl}\left(\alpha\frac{\partial f_1}{\partial s_{kl}}-\frac{1}{3}\frac{\partial f_1}{\partial P}\delta_{kl}\right)+H_p}$$ éq 5.2-9

Soit H le module élastoplastique défini comme :

$$H=\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{ij}D^e_{ijkl}\left(\alpha\frac{\partial f_1}{\partial s_{kl}}-\frac{1}{3}\frac{\partial f_1}{\partial P}\delta_{kl}\right)+H_p$$ éq 5.2-10

Le multiplicateur plastique s'écrit :

$$\Lambda=\frac{\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{ij}D^e_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}+\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{ij}k_0P\delta_{ij}\frac{1}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_c}+\frac{\partial f_1}{\partial P_{cr}}\frac{\partial P_{cr}}{\partial p_c}\right)\right]\dot{p}_c}{H}$$ éq 5.2-11

En remplaçant Λ par son expression dans l'équation [éq 5.2-4], on obtient :

$$\dot{\sigma}_{ij}=D^e_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}-\frac{1}{H}\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{mn}D^e_{mnop}\dot{\varepsilon}_{op}\right].D^e_{ijkl}\left(\alpha\frac{\partial f_1}{\partial s_{kl}}-\frac{1}{3}\frac{\partial f_1}{\partial P}\delta_{kl}\right)-$$
$$\left[\frac{1}{H}\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{mn}k_0P\frac{1}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}\delta_{mn}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_c}+\frac{\partial f_1}{\partial P_{cr}}\frac{\partial P_{cr}}{\partial p_c}\right)\right]D^e_{ijkl}\left(\alpha\frac{\partial f_1}{\partial s_{kl}}-\frac{1}{3}\frac{\partial f_1}{\partial P}\delta_{kl}\right)-\frac{k_0P}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}\delta_{ij}\right]\dot{p}_c$$
éq 5.2-12

On en déduit donc l'opérateur élastoplastique $D^{elp}=D^e-D^p$:

$$\dot{\sigma}_{ij}=\underbrace{\left[D^e_{ijkl}-\frac{1}{H}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{op}D^e_{ijop}D^e_{mnkl}\left(\alpha\frac{\partial f_1}{\partial s_{mn}}-\frac{1}{3}\frac{\partial f_1}{\partial P}\delta_{mn}\right)\right]}_{D^p_{ijkl}}\dot{\varepsilon}_{kl}-$$
$$\underbrace{\left\{\frac{1}{H}\left(\alpha\frac{\partial f_1}{\partial s_{op}}-\frac{1}{3}\frac{\partial f_1}{\partial P}\delta_{op}\right)D^e_{ijop}\left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{mn}k_0P\delta_{mn}\frac{1}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}-\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_c}+\frac{\partial f_1}{\partial P_{cr}}\frac{\partial P_{cr}}{\partial p_c}\right)\right)-\frac{k_0P}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}\delta_{ij}\right\}}_{D^{p_c}_{ij}}\dot{p}_c$$
éq 5.2-13

avec,

$$D^p_{ijkl}=\frac{1}{H}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{op}D^e_{ijop}D^e_{mnkl}\left(\alpha\frac{\partial f_1}{\partial s_{mn}}-\frac{1}{3}\frac{\partial f_1}{\partial P}\delta_{mn}\right)$$

et

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$D_{ij}^{p_c}=-\frac{1}{H}\left(\alpha\frac{\partial f_1}{\partial s_{op}}-\frac{1}{3}\frac{\partial f_1}{\partial P}\delta_{op}\right)D_{ijop}^{e}\left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{mn}k_0 P\delta_{mn}\frac{1}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_c}+\frac{\partial f_1}{\partial P_{cr}}\frac{\partial P_{cr}}{\partial p_c}\right)\right)+\frac{k_0 P}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}\delta_{ij}$$

éq 5.2-14

Calcul de D_{ijkl}^{p} :

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma}\right)_{ij}=-\frac{1}{3}M^2\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)\delta_{ij}+3\mathrm{s}_{ij}\ ,$$ éq 5.2-15

qui s'écrit en notation vectorielle :

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}M^2\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)+3\mathrm{s}_{11}\\-\frac{1}{3}M^2\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)+3\mathrm{s}_{22}\\-\frac{1}{3}M^2\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)+3\mathrm{s}_{33}\\3\sqrt{2}s_{12}\\3\sqrt{2}s_{23}\\3\sqrt{2}s_{31}\end{bmatrix}$$ éq 5.2-16

d'où l'expression de :

$$D_{ijkl}^{e}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{kl}:\begin{bmatrix}-k_0M^2P\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)+6\mu\mathrm{s}_{11}\\-k_0M^2P\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)+6\mu\mathrm{s}_{22}\\-k_0M^2P\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)+6\mu\mathrm{s}_{33}\\6\mu\sqrt{2}s_{12}\\6\mu\sqrt{2}s_{23}\\6\mu\sqrt{2}s_{31}\end{bmatrix}$$ éq 5.2-17

et

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij}D_{ijkl}^{e}\left(\alpha\frac{\partial f_1}{\partial s_{kl}}-\frac{1}{3}\frac{\partial f_1}{\partial P}\delta_{kl}\right)=k_0M^4P\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)^2+12\alpha\mu Q^2$$ éq 5.2-18

Or le module plastique H s'écrit sous la forme :

$$H=\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij}D_{ijkl}^{e}\left(\alpha\frac{\partial f_1}{\partial s_{kl}}-\frac{1}{3}\frac{\partial f_1}{\partial P}\delta_{kl}\right)+H_p$$

$$H=M^4\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)\left[k_0P\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)+2kP_{cr}\left(P+k_c p_c\right)\right]+12\alpha\mu Q^2$$ éq 5.2-19

En posant :

$A_{ij}=-k_0M^2P\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)\delta_{ij}+6\mu\mathrm{s}_{ij}$, $A'_{ij}=-k_0M^2P\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)\delta_{ij}+6\alpha\mu s_{ij}$,éq 5.2-20

avec : $tr(A)=-3\mathrm{k}_0M^2P\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$D^p=\frac{1}{H}\begin{bmatrix} A_{11}A'_{11} & A_{11}A'_{22} & A_{11}A'_{33} & 6\sqrt{2}\,\mu\alpha A_{11}s_{12} & 6\sqrt{2}\,\mu\alpha A_{11}s_{23} & 6\sqrt{2}\,\mu\alpha A_{11}s_{31} \\ A'_{11}A_{22} & A_{22}A'_{22} & A_{22}A'_{33} & 6\sqrt{2}\,\mu\alpha A_{22}s_{12} & 6\sqrt{2}\,\mu\alpha A_{22}s_{23} & 6\sqrt{2}\,\mu\alpha A_{22}s_{31} \\ A_{33}A'_{113} & A_{22}A'_{33} & A_{33}A'_{33} & 6\sqrt{2}\,\mu\alpha A_{33}s_{12} & 6\sqrt{2}\,\mu\alpha A_{33}s_{23} & 6\sqrt{2}\,\mu\alpha A_{33}s_{31} \\ 6\sqrt{2}\,\mu A'_{11}s_{12} & 6\sqrt{2}\,\mu A'_{22}s_{12} & 6\sqrt{2}\,\mu A'_{33}s_{12} & 36\alpha\mu^2 s_{12}^2 & 36\alpha\mu^2 s_{12}s_{23} & 36\alpha\mu^2 s_{12}s_{31} \\ 6\sqrt{2}\,\mu A'_{11}s_{23} & 6\sqrt{2}\,\mu A'_{22}s_{23} & 6\sqrt{2}\,\mu A'_{33}s_{23} & . & 36\alpha\mu^2 s_{23}^2 & 36\alpha\mu^2 s_{23}s_{31} \\ 6\sqrt{2}\,\mu A'_{11}s_{31} & 6\sqrt{2}\,\mu A'_{22}s_{31} & 6\sqrt{2}\,\mu A'_{33}s_{31} & . & . & 36\alpha\mu^2 s_{31}^2 \end{bmatrix}_{SYM}$$

éq. 5.2-21

On peut écrire les composantes $\frac{\partial \sigma'}{\partial \varepsilon}$ du morceau [DMECDE] de la matrice $D\Sigma DE$ qui sont celles de l'opérateur $D^{elp}=D^e-D^p$.

D'après l'équation [éq 5.2.14]. Les composantes $\frac{\partial \sigma'}{\partial p_1}$ avec $(p_1=p_c)$ du morceau [$DMECP1$] de la matrice $D\Sigma DE$ sont :

$$\frac{-tr(A)}{3Hk_{0s}(p_c+p_{atm})}A'_{11}+\frac{M^2\left[k_c(2P_{cr}-P)-2P_{cr}(P+k_cp_c)Ln\left[\frac{2P^*_{cr}}{P_0}\right]\left[\frac{\lambda(0)-\kappa}{(\lambda(p_c)-\kappa)^2}\lambda'\right]\right]}{H}A'_{11}+\frac{k_0P}{k_{0s}(p_c+p_{atm})}-bS_{lq}$$

$$\frac{-tr(A)}{3Hk_{0s}(p_c+p_{atm})}A'_{22}+\frac{M^2\left[k_c(2P_{cr}-P)-2P_{cr}(P+k_cp_c)Ln\left[\frac{2P^*_{cr}}{P_0}\right]\left[\frac{\lambda(0)-\kappa}{(\lambda(p_c)-\kappa)^2}\lambda'\right]\right]}{H}A'_{22}+\frac{k_0P}{k_{0s}(p_c+p_{atm})}-bS_{lq}$$

$$\frac{-tr(A)}{3Hk_{0s}(p_c+p_{atm})}A'_{33}+\frac{M^2\left[k_c(2P_{cr}-P)-2P_{cr}(P+k_cp_c)Ln\left[\frac{2P^*_{cr}}{P_0}\right]\left[\frac{\lambda(0)-\kappa}{(\lambda(p_c)-\kappa)^2}\lambda'\right]\right]}{H}A'_{33}+\frac{k_0P}{k_{0s}(p_c+p_{atm})}-bS_{lq}$$

éq 5.2-22

$$\frac{-2\sqrt{2}\mu tr(A)}{Hk_{0s}(p_c+p_{atm})}alphas_{12}+\frac{6\sqrt{2}muM^2\left[k_c(2P_{cr}-P)-2P_{cr}(P+k_cp_c)Ln\left[\frac{2P^*_{cr}}{P_0}\right]\left[\frac{\lambda(0)-\kappa}{(\lambda(p_c)-\kappa)^2}\lambda'\right]\right]}{H}alphas_{12}$$

$$\frac{-2\sqrt{2}\mu tr(A)}{Hk_{0s}(p_c+p_{atm})}alphas_{23}+\frac{6\sqrt{2}muM^2\left[k_c(2P_{cr}-P)-2P_{cr}(P+k_cp_c)Ln\left[\frac{2P^*_{cr}}{P_0}\right]\left[\frac{\lambda(0)-\kappa}{(\lambda(p_c)-\kappa)^2}\lambda'\right]\right]}{H}alphas_{23}$$

$$\frac{-2\sqrt{2}\mu tr(A)}{Hk_{0s}(p_c+p_{atm})}alphas_{13}+6\sqrt{2}muM^2\left[k_c(2P_{cr}-P)-2P_{cr}(P+k_cp_c)Ln\left[\frac{2P^*_{cr}}{P_0}\right]\left[\frac{\lambda(0)-\kappa}{(\lambda(p_c)-\kappa)^2}\lambda'\right]\right]alphas_{13}$$

avec $\lambda'=\frac{\partial\lambda}{\partial p_c}=-\beta\lambda(0)\left[(1-r)\exp(-\beta p_c)\right]$

Dans le cas où le critère hydrique est atteint :

On part de nouveau de l'équation [éq 5.2.3] avec cette fois $\dot{\varepsilon}^p=\frac{\dot{p}_c}{k_s(p_c+p_{atm})}$,

On trouve une relation directe entre $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}, \dot{p}_c$ de la forme :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{e}}\,\dot{\varepsilon} + k_0 P\left(\frac{\dot{p}_c}{k_s\left(p_c + p_{atm}\right)} + \frac{\dot{p}_c}{k_{0s}\left(p_c + p_{atm}\right)}\right)\boldsymbol{I} \qquad \text{éq 5.2-23}$$

On déduit ensuite la contrainte de Bishop

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{e}}\,\dot{\varepsilon} + \left(\left(\frac{k_0 P}{k_s\left(p_c + p_{atm}\right)} + \frac{k_0 P}{k_{0s}\left(p_c + p_{atm}\right)}\right) - bS_{lq}\right)\boldsymbol{I}\,\dot{p}_c \qquad \text{éq 5.2-24}$$

Les composantes $\frac{\partial \sigma'}{\partial \varepsilon}$ du morceau [$DMECDE$] de la matrice $D\Sigma\, DE$ ne sont rien d'autres que ceux de la matrice D^e.

Les seules composantes du morceau [$DMECP1$] de la matrice $D\Sigma\, DE$ sont donc ceux de $\frac{\partial \sigma'}{\partial p_1}$ avec $\left(p_1 = p_c\right)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}'_{11} \\ \dot{\sigma}'_{22} \\ \dot{\sigma}'_{33} \\ \sqrt{2}\,\dot{\sigma}'_{12} \\ \sqrt{2}\,\dot{\sigma}'_{23} \\ \sqrt{2}\,\dot{\sigma}'_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_0 P}{\left(p_c + p_{atm}\right)}\left(\frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_{0s}}\right) - bS_{lq} & \frac{k_0 P}{\left(p_c + p_{atm}\right)}\left(\frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_{0s}}\right) - bS_{lq} & \frac{k_0 P}{\left(p_c + p_{atm}\right)}\left(\frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_{0s}}\right) - bS_{lq} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{\dot{p}_1\right\} \qquad \text{éq 5.2-25}$$

5.3 Opérateur tangent en implicite. Option FULL_MECA

Pour calculer l'opérateur tangent en implicite, on a choisi comme pour le modèle Cam Clay de séparer en premier lieu le traitement de la partie déviatorique de la partie hydrostatique pour ensuite les combiner afin de déduire l'opérateur tangent reliant la perturbation de la contrainte totale à la perturbation de la déformation totale.

5.3.1 Dans le cas où le critère mécanique est atteint

5.3.1.1 Traitement de la partie déviatorique

On considère ici que la variation de chargement est purement déviatorique $\left(\delta P = 0\right)$.
L'incrément de la contrainte déviatorique s'écrit sous la forme :

$$\Delta s_{ij} = 2\mu\left(\Delta\tilde{\varepsilon}_{ij} - \Delta\tilde{\varepsilon}^{p}_{ij}\right) \qquad \text{éq 5.3.1.1-1}$$

Autour du point d'équilibre $\left(\sigma^{-} + \Delta\sigma\right)$, on considère une variation δs de la partie déviatorique de la contrainte :

$$\delta s_{kl} = 2\mu\left(\delta\tilde{\varepsilon}_{kl} - \delta\tilde{\varepsilon}^{p}_{kl}\right) \qquad \text{éq 5.3.1.1-2}$$

Calcul de $\delta\tilde{\varepsilon}^{p}_{kl}$:

On sait que :

$$\Delta\tilde{\varepsilon}^{p}_{kl} = 3\Lambda\ \alpha s_{kl} \qquad \text{éq 5.3.1.1-3}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En dérivant cette équation par rapport à la contrainte déviatorique, on obtient :

$$\delta \tilde{\varepsilon}^{p}_{kl} = 3\alpha\ \delta\ \Lambda\ s_{kl} + 3\ \alpha\ \Lambda\ \delta\ s_{kl}$$ éq 5.3.1.1-4

Calcul de $\delta\ \Lambda$:

On a :

$$\Lambda = \frac{1}{H_p}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{mn} \Delta\sigma_{mn} + \left(\frac{\partial f}{\partial p_c} + \frac{\partial f}{\partial P_{cr}}\frac{\partial P_{cr}}{\partial p_c}\right)\Delta p_c\right] = \frac{1}{H_p}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{mn} \Delta s_{mn} + \frac{\partial f}{\partial P}\Delta P + \left(\frac{\partial f}{\partial p_c} + \frac{\partial f}{\partial P_{cr}}\frac{\partial P_{cr}}{\partial p_c}\right)\Delta p_c\right]$$

$$= \frac{1}{H_p}\left[3\mathrm{s}_{mn}\Delta s_{mn} + M^2\left(2\mathrm{P} - 2\mathrm{P}_{cr} + k_c p_c\right)\Delta P - M^2\left[k_c\left(2\mathrm{P}_{cr} - P\right) + 2\left(P + k_c p_c\right)P'_{cr}\right]\Delta p_c\right]$$

éq 5.3.1.1-5

Si on ne considère que l'évolution de la partie déviatorique de σ $(\delta P = 0)$, alors :

$$\delta\left(\Lambda\ H_p\right) = \delta\ \Lambda H_p + \Lambda\delta H_p = \left[3\delta\mathrm{s}_{mn}\Delta s_{mn} + 3\mathrm{s}_{mn}\delta s_{mn}\right] - 2\mathrm{M}^2\Delta P\delta P_{cr} +$$
$$M^2 k_c \Delta P\delta p_c - 2\mathrm{M}^2 k_c \delta P_{cr}\Delta p_c - M^2\left[k_c\left(2\mathrm{P}_{cr} - P\right) + 2\mathrm{P}'_{cr}\left(P + k_c\left(p_c + \Delta p_c\right)\right)\right]\delta p_c$$ éq. 5.3.1.1-6

avec $P'_{cr} = \frac{\partial P_{cr}}{\partial p_c}$

Or : $\delta\ P_{cr} = kP_{cr}\ \delta\ \varepsilon^{P}_{v}$.

Comme $\Delta\varepsilon^{p}_{v} = \Lambda M^2\left(2\mathrm{P} - 2\mathrm{P}_{cr} + k_c p_c\right)$, on a :

$$\delta\varepsilon^{p}_{v} = \delta\Lambda M^2\left(2\mathrm{P} - 2\mathrm{P}_{cr} + k_c p_c\right) - 2\mathrm{M}^2\Lambda\delta P_{cr} + k_c M^2\Lambda\delta p_c$$ éq. 5.3.1.1-7

D'où :

$$\delta\ \Lambda M^2\left(2\mathrm{P} - 2\mathrm{P}_{cr} + k_c p_c\right) = \left[\frac{1}{kP_{cr}} + 2\Lambda\mathrm{M}^2\right]\delta P_{cr} - k_c\Lambda M^2\delta p_c$$ éq 5.3.1.1-8

Par ailleurs,

$$H_p = 2\,kM^4 P_{cr}\left(P + k_c p_c\right)\left(2\mathrm{P} - 2\mathrm{P}_{cr} + k_c p_c\right)$$

et éq 5.3.1.1-9

$$\delta\ H_p = 2\,kM^4\left(P + k_c p_c\right)\left(2\mathrm{P} - 4\mathrm{P}_{cr} + k_c p_c\right)\delta\ P_{cr} + 2\,kP_{cr}M^4 k_c\left(3\mathrm{P} - 2\mathrm{P}_{cr} + 2\mathrm{k}_c p_c\right)\delta p_c$$

En injectant cette dernière équation dans l'équation [éq 5.3.1.1-6], on obtient :

$$\delta\ \Lambda H_p + \left[2\Lambda\,kM^4\left(P + k_c p_c\right)\left(2\mathrm{P} - 4\mathrm{P}_{cr} + k_c p_c\right) + 2\mathrm{M}^2\Delta P + 2\mathrm{M}^2 k_c\Delta p_c\right]\delta\ P_{cr} =$$
$$-\left[2\Lambda\,kP_{cr}M^4 k_c\left(3\mathrm{P} + 2\mathrm{k}_c p_c - 2\mathrm{P}_{cr}\right) + M^2\left[k_c\left(2\mathrm{P}_{cr} - \left(P + \Delta P\right) + 2\mathrm{P}'_{cr}\left(p_c + \Delta p_c\right)\right] + 2\mathrm{P}'_{cr}P\right]\delta p_c + \left[3\delta\mathrm{s}_{mn}\Delta s_{mn} + 3\mathrm{s}_{mn}\delta s_{mn}\right]$$ éq 5.3.1.1-10

En utilisant la relation [éq 5.3.1.1-8], il vient alors :

$$\delta\ \Lambda = \frac{\left[3\delta\mathrm{s}_{mn}\Delta s_{mn} + 3\mathrm{s}_{mn}\delta s_{mn}\right]}{\left(H_p + A\right)} - \frac{Z\delta p_c}{\left(H_p + A\right)}$$ éq 5.3.1.1-11

avec $A = \left[k\ \Lambda M^4\left(P + k_c p_c\right)\left(2\mathrm{P} - 4\mathrm{P}_{cr} + k_c p_c\right) + M^2\Delta P + M^2 k_c\Delta p_c\right]\left[\frac{M^2\left(2\mathrm{P} - 2\mathrm{P}_{cr} + k_c p_c\right)}{\frac{1}{2\,kP_{cr}} + \Lambda M^2}\right]$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$Z=M^2\Lambda\left(\frac{kk_c\,\Lambda M^2\left(P+k_c p_c\right)\left(2\mathrm{P}-4\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)}{\dfrac{1}{2kM^2P_{cr}}+\Lambda}+2kk_c P_{cr}M^2\left(3\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)\right)$$
$$-M^2k_c\Delta P+\frac{\left(M^2k_c\Delta P\Lambda+k_c^2\Lambda M^2\Delta p_c\right)}{\dfrac{1}{2kM^2P_{cr}}+\Lambda}+M^2k_c\left(2\mathrm{P}_{cr}-P\right)+2\mathrm{M}^2P'_{cr}\left(P+k_c\left(p_c+\Delta p_c\right)\right)$$

On obtient alors immédiatement la variation de la partie déviatorique de la déformation plastique :

$$\delta\tilde{\varepsilon}^p_{kl}=\frac{9\alpha}{H_p+A}\left(\Delta s_{mn}\delta s_{mn}s_{kl}+s_{mn}\delta s_{mn}s_{kl}\right)+\frac{9\alpha}{H_p}s_{mn}\Delta s_{mn}\delta s_{kl}$$
$$+\frac{3\alpha}{H_p}M^2\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)\Delta P\delta s_{kl}-\frac{3\alpha}{H_p}M^2k_c\left(2\mathrm{P}_{cr}-P\right)\Delta p_c\delta s_{kl}-\frac{3\alpha Z}{H_p+A}\delta p_c s_{kl}$$
$$-\frac{6\alpha}{H_p}M^2\left(P+k_c p_c\right)P'_{cr}\Delta p_c\delta s_{kl}$$

éq 5.3.1.1-12

δs_{ij} s'écrit alors :

$$\delta s_{ij}=2\mu\delta\{\tilde{\varepsilon}_{ij}-\frac{18\mu\alpha}{(H_p+A)}\left[\left(\Delta s_{kl}s_{ij}\delta s_{kl}+s_{kl}s_{ij}\delta s_{kl}\right)\right]-\frac{18\mu\alpha}{H_p}s_{kl}\Delta s_{kl}\delta s_{ij}$$
$$-\frac{6\mu\alpha}{H_p}M^2\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)\Delta P\delta s_{ij}+\frac{6\mu\alpha}{H_p}M^2k_c\left(2\mathrm{P}_{cr}-P\right)\Delta p_c\delta s_{ij}$$
$$+\frac{6\mu\alpha\,Z}{(H_p+A)}s_{ij}\delta p_c+\frac{12\mu\alpha}{H_p}M^2\left(P+k_c p_c\right)P'_{cr}\Delta p_c\delta s_{ij}$$

éq 5.3.1.1-13

c'est-à-dire :

$$\left(\begin{array}{l}\delta_{ijkl}+\delta_{ijkl}\dfrac{6\mu\alpha}{H_p}M^2\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)\Delta P+\dfrac{18\mu\alpha}{H_p+A}\left(\Delta s_{kl}s_{ij}+s_{kl}s_{ij}\right)+\dfrac{18\mu\alpha}{H_p}s_{mn}\Delta s_{mn}\delta_{ijkl}\\ -\delta_{ijkl}\dfrac{6\mu\alpha}{H_p}k_cM^2\left(2\mathrm{P}_{cr}-2\mathrm{P}\right)\Delta p_c-\dfrac{12\mu\alpha}{H_p}M^2\left(P+k_c p_c\right)P'_{cr}\Delta p_c\end{array}\right)\delta s_{kl}=$$
$$2\mu\,\delta\tilde{\varepsilon}_{ij}+\frac{6\mu\alpha\,Z}{H_p+A}s_{ij}\delta p_c$$

éq 5.3.1.1-14

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

ou en écriture tensorielle :

$$\left.\begin{array}{l} I_4^d\left(1+\frac{6\,\mu\alpha}{H_p}M^2\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c\,p_c\right)\Delta P+\frac{18\,\mu\alpha}{H_p}\Delta s:s-\frac{6\,\mu\alpha}{H_p}M^2k_c\left(2\mathrm{P}_{cr}-P\right)\Delta p_c\right) \\ +\frac{18\,\mu\alpha}{(H_p+A)}(s+\Delta s)\otimes s-\frac{12\,\mu\alpha}{H_p}M^2\left(P+k_c\,p_c\right)P'_{cr}\Delta p_c \end{array}\right\}\delta s=$$

éq 5.3.1.1-15

$$2\,\mu\delta\,\{\tilde{\varepsilon}\,¿+\frac{6\,\mu\alpha Z}{(H_p+A)}s\delta p_c$$

qu'on peut encore écrire en symétrisant le tenseur $(s+\Delta s)\otimes s$:

$$\left.\begin{array}{l} I_4^d\left(1+\frac{6\,\mu\,\alpha}{H_p}M^2\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c\,p_c\right)\Delta P-\frac{6\,\mu\,\alpha}{H_p}k_cM^2\left(2\mathrm{P}_{cr}-P\right)\Delta p_c\right. \\ \left.+\frac{18\,\mu\,\alpha}{H_p}\Delta s:s-\frac{12\,\mu\,\alpha}{H_p}M^2\left(P+k_c\,p_c\right)P'_{cr}\Delta p_c\right)+\frac{18\,\mu\,\alpha}{(H_p+A)}\aleph \end{array}\right\}\Delta s=2\,\mu\,\delta\,\tilde{\varepsilon}+\frac{6\,\mu\,\alpha Z}{(H_p+A)}s\,\delta\,p_c$$

éq 5.3.1.1-16

avec : $\aleph=\frac{1}{2}\left[((s+\Delta s)\otimes s)+(s\otimes(s+\Delta s))^T\right]$

Calcul de $\aleph$, en posant : $T_{ij}=s_{ij}+\Delta s_{ij}$

$$T\otimes s=\begin{bmatrix} T_{11}s_{11} & T_{11}s_{22} & T_{11}s_{33} & \sqrt{2}T_{11}s_{12} & \sqrt{2}T_{11}s_{23} & \sqrt{2}T_{11}s_{31} \\ T_{22}s_{11} & T_{22}s_{22} & T_{22}s_{33} & \sqrt{2}T_{22}s_{12} & \sqrt{2}T_{22}s_{23} & \sqrt{2}T_{22}s_{31} \\ T_{33}s_{11} & T_{33}s_{22} & T_{33}s_{33} & \sqrt{2}T_{33}s_{12} & \sqrt{2}T_{33}s_{23} & \sqrt{2}T_{33}s_{31} \\ \sqrt{2}T_{12}s_{11} & \sqrt{2}T_{12}s_{22} & \sqrt{2}T_{12}s_{33} & 2\mathrm{T}_{12}s_{12} & 2\mathrm{T}_{12}s_{23} & 2\mathrm{T}_{12}s_{31} \\ \sqrt{2}T_{23}s_{11} & \sqrt{2}T_{23}s_{22} & \sqrt{2}T_{23}s_{33} & 2\mathrm{T}_{23}s_{12} & 2\mathrm{T}_{23}s_{23} & 2\mathrm{T}_{23}s_{31} \\ \sqrt{2}T_{31}s_{11} & \sqrt{2}T_{31}s_{22} & \sqrt{2}T_{31}s_{33} & T_{31}s_{12} & 2\mathrm{T}_{31}s_{23} & 2\mathrm{T}_{31}s_{31} \end{bmatrix}$$

$$\aleph=\frac{1}{2}\left[(T\otimes s)+(T\otimes s)^T\right]$$

Soit :

$$C=I_4^d\left(\frac{1}{2\mu}+\frac{3\alpha}{H_p}M^2\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c\,p_c\right)\Delta P+\frac{9\alpha}{H_p}\Delta s:s-\frac{3\alpha k_c}{H_p}M^2\left(2\mathrm{P}_{cr}-P\right)\Delta p_c-\frac{6\alpha}{H_p}M^2\left(P+k_c\,p_c\right)P'_{cr}\Delta\right.$$
$$\left.+\frac{9\alpha}{(H_p+A)}\aleph\right.$$

on pose :

$$c=\frac{9\alpha}{H_p}(\Delta s:s)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$d=\frac{3\alpha}{H_p}M^2\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)\Delta P$$
$$g=\frac{-3\alpha}{H_p}M^2 k_c\left(2\mathrm{P}_{cr}-P\right)\Delta p_c$$
$$h=-\frac{6\alpha}{H_p}M^2\left(P+k_c p_c\right)P'_{cr}\Delta p_c$$

La matrice symétrique C de dimensions (6,6) est trop grande pour être présentée entière, on la décompose en 4 parties C_1 , C_2 , C_3 et C_4 :

$$C=\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix}$$

avec

$$C_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{2\mu}+c+d+g+h+\frac{9\alpha}{(H_p+A)}s_{11}T_{11} & \frac{9\alpha}{2(H_p+A)}(T_{11}s_{22}+T_{22}s_{11}) & \frac{9\alpha}{2(H_p+A)}(T_{11}s_{33}+T_{33}s_{11}) \\ \frac{9\alpha}{2(H_p+A)}(T_{22}s_{11}+T_{11}s_{22}) & \frac{1}{2\mu}+c+d+g+h+\frac{9\alpha}{(H_p+A)}T_{22}s_{22} & \frac{9\alpha}{2(H_p+A)}(T_{22}s_{33}+T_{33}s_{22}) \\ \frac{9\alpha}{2(H_p+A)}(T_{33}s_{11}+T_{11}s_{33}) & \frac{9\alpha}{2(H_p+A)}(T_{22}s_{33}+T_{33}s_{22}) & \frac{1}{2\mu}+c+d+g+h+\frac{9\alpha}{(H_p+A)}T_{33}s_{33} \end{bmatrix}$$

éq 5.3.1.1-17

$$C_2=\begin{bmatrix} \frac{9\alpha\sqrt{2}}{2(H_p+A)}(T_{11}s_{12}+s_{11}T_{12}) & \frac{9\alpha\sqrt{2}}{2(H_p+A)}(T_{11}s_{23}+s_{11}T_{23}) & \frac{9\alpha\sqrt{2}}{2(H_p+A)}(T_{11}s_{13}+s_{11}T_{13}) \\ \frac{9\alpha\sqrt{2}}{2(H_p+A)}(T_{22}s_{12}+s_{22}T_{12}) & \frac{9\alpha\sqrt{2}}{2(H_p+A)}(T_{22}s_{23}+s_{22}T_{23}) & \frac{9\alpha\sqrt{2}}{2(H_p+A)}(T_{22}s_{13}+s_{22}T_{13}) \\ \frac{9\alpha\sqrt{2}}{2(H_p+A)}(T_{33}s_{12}+s_{33}T_{12}) & \frac{9\alpha\sqrt{2}}{2(H_p+A)}(T_{33}s_{23}+s_{33}T_{23}) & \frac{9\alpha\sqrt{2}}{2(H_p+A)}(T_{33}s_{13}+s_{33}T_{13}) \end{bmatrix}$$

éq 5.3.1.1-18

$$C_3=C_2$$ éq 5.3.1.1-19

$$C_4=\begin{bmatrix} \frac{1}{2\mu}+c+d+g+h+\frac{18\alpha}{(H_p+A)}s_{12}T_{12} & \frac{9\alpha}{(H_p+A)}(T_{12}s_{23}+T_{23}s_{12}) & \frac{9\alpha}{(H_p+A)}(T_{12}s_{23}+T_{23}s_{12}) \\ \frac{9\alpha}{(H_p+A)}(T_{23}s_{12}+T_{12}s_{23}) & \frac{1}{2\mu}+c+d+g+h+\frac{18\alpha}{(H_p+A)}T_{23}s_{23} & \frac{9\alpha}{(H_p+A)}(T_{23}s_{13}+T_{13}s_{23}) \\ \frac{9\alpha}{(H_p+A)}(T_{13}s_{12}+T_{12}s_{13}) & \frac{9\alpha}{(H_p+A)}(T_{13}s_{23}+T_{23}s_{13}) & \frac{1}{2\mu}+c+d+g+h+\frac{18\alpha}{(H_p+A)}T_{13}s_{13} \end{bmatrix}$$

éq 5.3.1.1-20

Calcul du taux de variation de volume :

$$\Delta\varepsilon_v^p=M^2\Lambda\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right),$$

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_v^p&=M^2\delta\Lambda\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)-2\mathrm{M}^2\Lambda\delta P_{cr}+M^2\Lambda k_c\delta p_c\\&=B\delta\Lambda+D\delta p_c\\&=\frac{3\mathrm{B}}{(H_p+A)}(s+\Delta s).\delta s+\left(D-\frac{BZ}{(H_p+A)}\right)\delta p_c\end{aligned}$$ éq 5.3.1.1-21

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

avec : $B=M^2(2\mathrm{P}\text{-}2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c)\text{-}M^2\Lambda\dfrac{M^2(2\mathrm{P}\text{-}2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c)}{\dfrac{1}{2kP_{cr}}+M^2\Lambda}$.

et $D=k_c M^2\Lambda\text{-}M^2\Lambda\dfrac{k_c M^2\Lambda}{\dfrac{1}{2kP_{cr}}+M^2\Lambda}$.

On a donc :

$$\delta\varepsilon_v^p=\frac{3\mathrm{B}}{(H_p+A)}(s+\Delta s).\delta\ s\text{-}(\frac{BZ}{(H_p+A)}\text{-}D)\delta p_c \qquad \text{éq 5.3.1.1-22}$$

et finalement :

$$\delta\ \varepsilon_{ij}=(C_{ijkl}\text{-}\frac{B}{(H_p+A)}(s+\Delta s)_{kl}\delta_{ij})\ \delta\ s_{kl}\text{-}$$
$$(\text{-}\frac{BZ}{3(H_p+A)}\delta_{ij}+\frac{D}{3}\delta_{ij}+\frac{\delta_{ij}}{3\mathrm{k}_{0\mathrm{s}}(p_c+p_{atm})}+\frac{3\mathrm{Z}}{(H_p+A)}s_{ij})\delta p_c \qquad \text{éq 5.3.1.1-23}$$

5.3.1.2 Traitement de la partie hydrostatique

On considère maintenant que la variation de chargement est purement sphérique ($\delta\ s=0$).
L'incrément de P s'écrit sous la forme :

$$\Delta P=P^{\text{-}}\left[\frac{\exp\left(k_0\Delta\varepsilon_v^e\right)}{\left(\dfrac{p_c+p_{atm}}{p^{\text{-}c}+p_{atm}}\right)^{k_0/k_{0\mathrm{s}}}}\text{-}1\right] \qquad \text{éq 5.3.1.2-1}$$

La dérivation de cette équation donne :

$$\delta\ P=k_0 P\left(\delta\ \varepsilon_v\text{-}\delta\ \varepsilon_v^p\right)\text{-}\frac{k_0}{k_{0\mathrm{s}}}\frac{P}{p_c+p_{atm}}\ \delta p_c \qquad \text{éq 5.3.1.2-2}$$

Calcul de $\delta\varepsilon_v^p$:
On sait que :

$$\Delta\varepsilon_v^p=\Lambda M^2\left(2\mathrm{P}\text{-}2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right) \qquad \text{éq 5.3.1.2-3}$$

En différenciant cette équation, on obtient :

$$\delta\varepsilon_v^p=M^2\left(\delta\ \Lambda\left(2\mathrm{P}\text{-}2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)+\Lambda\left(2\delta\mathrm{P}\text{-}2\delta\mathrm{P}_{cr}+k_c\delta p_c\right)\right) \qquad \text{éq 5.3.1.2-4}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On connaît l'expression de Λ :

$$\Lambda=\frac{M^2\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)\Delta P+3\mathrm{s}\Delta\mathrm{s}-M^2\left[k_c(2\mathrm{P}_{cr}-P)+2(P+k_c p_c)P'_{cr}\right]\Delta p_c}{H_p}=\frac{b}{H_p}$$ éq 5.3.1.2-5

en posant

$$b=M^2\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)\Delta P+3\mathrm{s}\Delta\mathrm{s}-M^2\left[k_c(2\mathrm{P}_{cr}-P)+2(P+k_c p_c)P'_{cr}\right]\Delta p_c$$

En différenciant $\Delta\Lambda$, il vient :

$$\delta\Lambda=\frac{M^2}{H_p}\left[\begin{array}{l}\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)\delta P+\left(2\delta\mathrm{P}-2\delta\mathrm{P}_{cr}+k_c\delta p_c\right)\Delta P-k_c(2\mathrm{P}_{cr}-P)\delta p_c-k_c(2\delta\mathrm{P}_{cr}-\delta P)\Delta p_c\\ -2(P+k_c p_c)P'_{cr}\delta p_c-2(\delta P+k_c\delta p_c)P'_{cr}\Delta p_c\end{array}\right]$$
$$-\frac{2kM^4 b}{H_p^2}\left[\begin{array}{l}2\delta PP_{cr}\left(2\mathrm{P}-P_{cr}+\frac{3}{2}k_c p_c\right)+\delta P_{cr}\left(2\mathrm{P}^2-4PP_{cr}-4\mathrm{P}_{cr}k_c p_c+3Pk_c p_c+k_c^2 p_c^2\right)\\ +k_c P_{cr}\left(3\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+2\mathrm{k}_c p_c\right)\delta p_c\end{array}\right]$$ éq 5.3.1.2-6

On cherche l'expression de δP_{cr} en fonction de $\delta\Lambda$:

On a :

$$\delta P_{cr}=kP_{cr}\delta\varepsilon_v^p$$ éq 5.3.1.2-7

On peut écrire :

$$\frac{\delta P_{cr}}{kP_{cr}}=\delta\Lambda M^2\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)+\Lambda M^2\left(2\delta\mathrm{P}-2\delta\mathrm{P}_{cr}+k_c\delta p_c\right)$$ éq 5.3.1.2-8

$$\delta P_{cr}\left(\frac{1+\Lambda 2M^2 kP_{cr}}{kP_{cr}}\right)=\delta\Lambda M^2\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)+\Lambda 2M^2\delta P+\Lambda M^2 k_c\delta p_c$$

$$\delta P_{cr}=\left(\frac{M^2\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)kP_{cr}}{1+2kP_{cr}\Lambda M^2}\right)\delta\Lambda+\left(\frac{2\Lambda\mathrm{M}^2 kP_{cr}}{1+2kP_{cr}\Lambda M^2}\right)\delta P+\left(\frac{\Lambda M^2 k_c kP_{cr}}{1+2kP_{cr}\Lambda M^2}\right)\delta p_c$$ éq 5.3.1.2-9

On pose

$$c=\frac{M^2 kP_{cr}\left(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c p_c\right)}{\left[1+2\mathrm{M}^2 kP_{cr}\Lambda\right]},\quad a=\frac{2\mathrm{M}^2 kP_{cr}\Lambda}{\left[1+2\mathrm{M}^2 kP_{cr}\Lambda\right]},\quad d=\frac{k_c M^2 kP_{cr}\Lambda}{\left[1+2\mathrm{M}^2 kP_{cr}\Lambda\right]}$$

On a alors :

$$\delta P_{cr}=a\delta P+c\delta\Lambda+d\delta p_c$$ éq 5.3.1.2-10

En remplaçant l'expression de δP_{cr} dans $\delta\Lambda$ [éq 5.3.1.1-6], on trouve :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\delta\Lambda=\left[\begin{array}{l}(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c\,p_c+2\Delta\mathrm{P}+k_c\Delta p_c-2\mathrm{a}\Delta\mathrm{P}-2\,ak_c\Delta p_c-2\mathrm{P}'_{cr}\Delta p_c)\,\delta P-2\mathrm{c}\,(\Delta P+k_c\Delta p_c)\,\delta\Lambda\\+(k_c(P+\Delta P-2\mathrm{P}_{cr})-2\mathrm{d}\,(\Delta P+k_c\Delta p_c)-2\mathrm{P}'_{cr}(P+k_c(p_c+\Delta p_c)))\delta p_c\end{array}\right]\cdot\frac{M^2}{H_p}$$
$$-\frac{2\,kM^4b}{H_p^2}\left[P_{cr}(4\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+3\mathrm{k}_c\,p_c)+a(2\mathrm{P}-4\mathrm{P}_{cr}+k_c\,p_c)(P+k_c\,p_c)\right]\delta P$$
$$-\frac{2\,kM^4b}{H_p^2}\left[c(2\mathrm{P}-4\mathrm{P}_{cr}+k_c\,p_c)(P+k_c\,p_c)\right]\delta\Lambda$$
$$-\frac{2\,kM^4b}{H_p^2}\left[k_cP_{cr}(3\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+2\mathrm{k}_c\,p_c)+d(2\mathrm{P}-4\mathrm{P}_{cr}+k_c\,p_c)(P+k_c\,p_c)\right]\delta p_c$$

éq 5.3.1.2-11

En regroupant les termes en $\delta\Lambda$ et ceux en δP, on trouve :

$$\delta\Lambda=\frac{f}{e}\delta P+\frac{h}{e}\delta p_c$$

éq 5.3.1.2-12

avec,

$$f=\frac{M^2}{H_p}\left[2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c(p_c+(1-2\mathrm{a})\Delta p_c)+2\Delta\mathrm{P}-2\mathrm{a}\Delta\mathrm{P}-2\mathrm{P}'_{cr}\Delta p_c\right]$$
$$-\frac{2\,kM^4b}{H_p^2}\left[(4\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+3\mathrm{k}_c\,p_c)\,P_{cr}+a(2\mathrm{P}^2-4\,PP_{cr}-4\mathrm{P}_{cr}k_c\,p_c+3\,Pk_c\,p_c+k_c^2\,p_c^2)\right]$$
$$h=\frac{M^2}{H_p}\left[-2\mathrm{d}\Delta\mathrm{P}-2\,dk_c\Delta p_c+k_c\Delta P-2\mathrm{k}_c\,P_{cr}+k_c\,P-2\mathrm{P}'_{cr}(P+k_c(p_c+\Delta p_c))\right]$$
$$-\frac{2\,kM^4b}{H_p^2}\left[d(2\mathrm{P}-4\mathrm{P}_{cr}+k_c\,p_c)(P+k_c\,p_c)+k_c\,P_{cr}(3\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+2\mathrm{k}_c\,p_c)\right]$$

$$e=1+\frac{2\,cM^2(\Delta P+k_c\,p_c)}{H_p}+\frac{2\,bckM^4}{H_p^2}(2\mathrm{P}^2-4\,PP_{cr}-4\mathrm{P}_{cr}k_c\,p_c+3\,Pk_c\,p_c+k_c^2\,p_c^2)$$

L'expression de $\delta\varepsilon_v^p$ devient donc :

$$\delta\varepsilon_v^p=X\delta P+Y\delta p_c$$

éq 5.3.1.2-13

avec,

$$X=M^2(2\Lambda-2\mathrm{a}\Lambda-2\Lambda\mathrm{c}\frac{f}{e}+\frac{f}{e}(2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c\,p_c))$$
$$Y=M^2((2\mathrm{P}-2\mathrm{P}_{cr}+k_c\,p_c)\frac{h}{e}-(2\mathrm{c}\frac{h}{e}+2\mathrm{d}-k_c)\,\Lambda)$$

d'où l'expression de δP en fonction de $\delta\varepsilon_v$ et δp_c :

$$\delta P\,(1+k_0\,PX)=k_0\,P(\delta\varepsilon_V-\left[Y+\frac{1}{k_{0\mathrm{s}}(p_c+p_{atm})}\right]\delta p_c)$$

éq 5.3.1.2-14

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Calcul de la variation de déformation déviatorique :

$$\delta\ \tilde{\varepsilon}_{ij} = \delta\ \tilde{\varepsilon}^{p} = 3\delta\ \Lambda\ s = 3\frac{f}{e}\ \delta\ Ps_{ij} + 3\frac{h}{e}\ \delta\ p_c s \qquad \text{éq 5.3.1.2-15}$$

On a donc finalement :

$$\delta\varepsilon_{ij} = F_{ij}\,\delta P + K_{ij}\,\delta p_c \qquad \text{éq 5.3.1.2-16}$$

avec

$$F = \frac{3\mathrm{f}}{e}\,s - \frac{1 + k_0 PX}{3\mathrm{k}_0 P}\,1^{d},$$
$$K = \frac{3\mathrm{h}}{e}\,s - \left(\frac{k_0 PY}{3} + \frac{k_0 P}{3\mathrm{k}_{0\mathrm{s}}(p_c + p_{atm})}\right)1^{d} \qquad \text{éq 5.3.1.2-17}$$

5.3.1.3 Opérateur tangent

L'opérateur tangent relie la variation de contrainte totale à la variation de la déformation et de la succion. Etant donné que l'incrément de la déformation totale sous chargement déviatorique s'écrit :

$$\delta\ \varepsilon_{ij} + H_{ij}\,\delta p_c = \left(C_{ijkl} - \frac{B}{(H_p + A)}(s + \Delta s)_{kl}\,\delta_{ij}\right) D^{1}_{klmn}\,\delta\ \sigma_{mn}\ , \qquad \text{éq 5.3.1.3-1}$$

avec :

$$D^{1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{éq 5.3.1.3-2}$$

la projection dans l'espace déviatorique,

et que sous chargement sphérique on a :

$$\delta\ \varepsilon_{ij} - K_{ij}\,\delta p_c = F_{ij}\ D^{2}_{kl}\ \delta\ \sigma_{kl} \qquad \text{éq 5.3.1.3-3}$$

avec :

$$D^{2} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{éq 5.3.1.3-4}$$

la projection hydrostatique, on a alors :

$$\delta\sigma_{ij} = A_{ijkl}\,\delta\varepsilon_{kl} + B_{ij}\,\delta p_c \qquad \text{éq 5.3.1.3-5}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

avec :

$$A_{ijkl}=\left[(C_{ijmn}-\frac{B}{(H_p+A)}(s+\Delta s)_{mn}\delta_{ij})\ D_{mnkl'}+F_{ij}D^2_{kl}\right]^{-1}$$ éq 5.3.1.3-6

$$B_{ij}=\left[(C_{ijmn}-\frac{B}{(H_p+A)}(s+\Delta s)_{mn}\delta_{ij})\ D_{mnkl'}+F_{ij}D^2_{kl}\right]^{-1}(H_{kl}-K_{kl})$$ éq 5.3.1.3-7

La contrainte de Bishop s'écrit donc :

$$\delta\sigma'_{ij}=A_{ijkl}\,\delta\varepsilon_{kl}+\left(B_{ij}-bS_{lq}\right)\delta p_c$$

5.3.2 Opérateur tangent au point critique

Comme pour le modèle CAM_CLAY on écrit un opérateur tangent spécifique au point critique. Comme pour le cas général, on fait un traitement de la partie déviatorique et un autre pour la partie hydrostatique.

5.3.2.1 Traitement de la partie déviatorique

D'après l'équation [éq 4.3.3] on trouve :

$$s=s^e-2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}^p=s^e-2\mu\Lambda\frac{\partial f}{\partial s}=s^e-6\,\mu\alpha\,\Lambda s$$ éq 5.3.2.1-1

Les expressions du multiplicateur plastique Λ et de sa dérivation $\delta\Lambda$ s'écrivent de la façon suivante :

$$\Lambda=\left(\frac{Q^e}{Q}-1\right)/6\,\mu\alpha \quad \text{et} \quad \delta\Lambda=\frac{\delta Q^e}{6\,\mu\alpha Q}-\frac{Q^e\,\delta Q}{6\,\mu\alpha Q^2}$$ éq 5.3.2.1-2

avec,

$$\delta Q^e=\frac{3}{2}\frac{s^e\,\delta s^e}{Q^e} \quad \text{et} \quad \delta Q=\frac{3}{2}\frac{s\delta s}{Q}$$

d'où l'expression de $\delta\Lambda$:

$$\delta\Lambda=\frac{1}{6\mu}\frac{3}{2\alpha}\left[\frac{s^e\,\delta s^e}{Q^e Q}-\frac{Q^e\,s\delta s}{Q^3}\right]$$ éq 5.3.2.1-3

Rappelons de même l'expression de δs :

$$\delta s_{ij}=2\mu\left(\delta\tilde{\varepsilon}_{ij}-3\delta\Lambda s_{ij}-3\Lambda\delta s_{ij}\right)$$

En remplaçant Λ et $\delta\Lambda$ par leurs expressions, on peut écrire :

$$\delta s_{ij}=2\,\mu\delta\{\tilde{\varepsilon}¿_{ij}-\frac{3}{2\alpha}\frac{s^e_{kl}\delta s^e_{kl}}{Q^e Q}s_{ij}+\frac{3}{2\alpha}\frac{Q^e}{Q^3}s_{kl}\delta s_{kl}s_{ij}-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{Q^e}{Q}-1\right)\delta s$$ éq 5.3.2.1-4

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\delta s_{kl}\left[\delta_{ijkl}+\frac{1}{\alpha}\frac{Q^e}{Q}\delta_{ijkl}-\frac{1}{\alpha}\delta_{ijkl}-\frac{3}{2\alpha}\frac{Q^e}{Q^3}s_{kl}.s_{ij}\right]=2\mu\left[\delta_{ijkl}-\frac{3}{2\alpha}\frac{s^e_{kl}.s_{ij}}{Q^eQ}\right]\delta\tilde{\varepsilon}_{kl}$$ éq 5.3.2.1-5

ou en écriture tensorielle :

$$\delta s\left[\frac{Q^e}{Q\alpha}I_4^d+I_4^d\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)-\underbrace{\frac{3}{2\alpha}\frac{Q^e}{Q^3}s\otimes s}_{G}\right]=2\mu\underbrace{\left[I_4^d-\frac{3}{2\alpha}\frac{s^e\otimes s}{Q^eQ}\right]}_{H}\delta\tilde{\varepsilon}$$ éq 5.3.2.1-6

Comme δs ne dépend pas de $\delta\varepsilon_v$, on peut confondre $\delta\tilde{\varepsilon}$ avec $\delta\varepsilon$.

En utilisant le tenseur de projection dans l'espace des contraintes déviatoriques D^1 [éq 5.3.1.3-2] , on peut écrire :

$$\delta\varepsilon=\frac{D^1.G.H^{-1}}{2\mu}.\delta\sigma$$ éq 5.3.2.1-7

5.3.2.2 Traitement de la partie hydrostatique

En écriture tensorielle, on a d'après l'équation [éq 5.3.1.2-2] la relation suivante :

$$I^d\,\delta P=k_0P\,\delta\varepsilon_v-\frac{k_0}{k_{0s}}\frac{P}{p_c+p_{atm}}I^d\,\delta p_c$$ éq 5.3.2.2-1

sachant qu'au point critique, $\delta\varepsilon_v^p=0$.

Comme δP ne dépend pas de $\delta\tilde{\varepsilon}$ alors on peut confondre $\delta\varepsilon_v$ avec $\delta\varepsilon$.

$$I^d\,\delta P=k_0P\,\delta\varepsilon-\frac{k_0}{k_{0s}}\frac{P}{p_c+p_{atm}}I^d\,\delta p_c$$ **éq 5.3.2.2-2**

En utilisant le tenseur de projection dans l'espace des contraintes hydrostatiques D^2 [éq 5.3.1.3-3], on peut écrire :

$$I^d\,D^2\,\delta\sigma=k_0P\,\delta\varepsilon-\frac{k_0}{k_{0s}}\frac{P}{p_c+p_{atm}}I^d\,\delta p_c$$

d'où

$$\delta\varepsilon=\frac{I^d\,D^2}{k_0P}\delta\sigma+\frac{I^d}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}\delta p_c$$ éq 5.3.2.2-3

5.3.2.3 Opérateur tangent

En combinant les contributions des deux parties déviatorique et hydrostatique, on trouve l'écriture de l'opérateur tangent qui relie la variation de la contrainte totale à la variation de la déformation totale au point critique :

$$\delta\varepsilon=\left[\frac{D^1.G.H^{-1}}{2\mu}+\frac{I^d\,D^2}{k_0P}\right].\delta\sigma+\frac{I^d}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}\delta p_c$$

$$\delta\sigma_{ij}=A_{ijkl}\,\delta\varepsilon_{kl}-B_{ij}\,\delta p_c$$ éq 5.3.2.3-1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

avec

$$A_{ijkl}=\left[\frac{D^1.G.H^{-1}}{2\mu}+\frac{I^d D^2}{k_0 P}\right]^{-1}$$ éq 5.3.2.3-2

et

$$B_{ij}=-\frac{I^d}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}$$ **éq 5.3.2.3-3**

Comme il faut déduire la variation de la contrainte de Bishop, on trouve :

$$B_{ij}=-\frac{I^d}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}-bS_{lq}$$ **éq 5.3.2.3-4**

5.3.3 Dans le cas où le critère hydrique est atteint

La variation de la déformation élastique s'écrit sous la forme :

$$\delta\varepsilon^e_{kl}=\delta\tilde{\varepsilon}^e_{kl}-\frac{1}{3}\delta\varepsilon^e_v\delta_{kl}$$ éq 5.3.3-1

soit :

$$\delta\varepsilon^e_{kl}=\frac{\delta s_{kl}}{2\mu}-\frac{\delta P}{3k_0 P}\delta_{kl}-\frac{\delta p_c}{3k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}\delta_{kl}$$ éq 5.3.3-2

Dans ce cas la déformation déviatorique plastique est nulle donc la déformation plastique a l'expression suivante:

$$\delta\varepsilon^p_{kl}=-\frac{1}{3}\delta\varepsilon^p_v\delta_{kl}$$ éq 5.3.3-3

soit :

$$\delta\varepsilon^p_{kl}=-\frac{\delta p_c}{3k_s\left(p_{c0}+p_{atm}\right)}\delta_{kl}$$ éq 5.3.3-4

En combinant chacune des composantes élastique et plastique on trouve :

$$\delta\varepsilon_{kl}=\delta\varepsilon^e_{kl}+\delta\varepsilon^p_{kl}=\frac{\delta s_{kl}}{2\mu}-\frac{\delta P}{3k_0 P}\delta_{kl}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}+\frac{1}{k_s\left(p_{c0}+p_{atm}\right)}\right)\delta p_c\delta_{kl}$$ éq 5.3.3-5

En utilisant les matrices de projection dans l'espace des contraintes déviatoriques et hydrostatiques on aboutit à l'expression suivante :

$$\delta\varepsilon_{kl}=\left(\frac{D^1_{ijkl}}{2\mu}-\frac{D^2_{ij}\delta_{kl}}{3k_0 P}\right)\delta\sigma_{ij}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}+\frac{1}{k_s\left(p_{c0}+p_{atm}\right)}\right)\delta p_c\delta_{kl}$$ éq 5.3.3-6

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

donc on peut écrire :

$$\delta\sigma_{ij}=\left(\frac{D^1_{ijkl}}{2\mu}-\frac{D^2_{ij}\delta_{kl}}{3k_0P}\right)^{-1}\delta\varepsilon_{kl}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}+\frac{1}{k_s\left(p_{c0}+p_{atm}\right)}\right)\left(\frac{D^1_{ijkl}}{2\mu}-\frac{D^2_{ij}\delta_{kl}}{3k_0P}\right)^{-1}\delta_{kl}\,\delta p_c \qquad \text{éq 5.3.3-7}$$

on pose $A_{ijkl}=\left(\frac{D^1_{ijkl}}{2\mu}-\frac{D^2_{ij}\delta_{kl}}{3k_0P}\right)$

ou $$A_{ijkl}=\frac{1}{2\mu}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}+\frac{2\mu}{9k_0P} & -\frac{1}{3}+\frac{2\mu}{9k_0P} & -\frac{1}{3}+\frac{2\mu}{9k_0P} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{3}+\frac{2\mu}{9k_0P} & \frac{2}{3}+\frac{2\mu}{9k_0P} & -\frac{1}{3}+\frac{2\mu}{9k_0P} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{3}+\frac{2\mu}{9k_0P} & -\frac{1}{3}+\frac{2\mu}{9k_0P} & \frac{2}{3}+\frac{2\mu}{9k_0P} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \textbf{éq 5.3.3-8}$$

et en déduisant la contrainte de Bishop, on trouve :

$$\delta\sigma'_{ij}=A^{-1}_{ijkl}\delta\varepsilon_{kl}+\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k_{0s}\left(p_c+p_{atm}\right)}+\frac{1}{k_s\left(p_{c0}+p_{atm}\right)}\right)A^{-1}_{ijkl}\,\delta_{kl}-bS_{lq}\right]\delta p_c \qquad \text{éq 5.3.3-9}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Résumé du modèle de Barcelone

Modélisations THHM :

KIT_HHM et KIT_THHM (dans ce dernier cas, il n'y a pas de dépendance des caractéristiques mécaniques avec la température).

Variables d'entrée :

$$\sigma^{'}, p_c^+, p_{gz}^+, P_{cr}^-, p_{c0}^-, \quad \Delta\varepsilon, \ \Delta p_c \text{et } \Delta p_{gz}$$

Variables de sortie :

1) $\Delta\sigma^{'}$, plus opérateurs tangents (nécessaires à l'opérateur STAT_NON_LINE).
2) Variables internes P_{cr}^+ , plus nouvelles variables p_{c0}^+ : seuil en succion et P_s^+ : pression de cohésion, et indicateurs d'écrouissage mécanique I_1 et hydrique I_2 .

Prédiction élastique :

$$P^e = P^- \frac{\exp\left(k_0 \Delta\varepsilon_v\right)}{\left(\frac{p_c + p_{atm}}{p^{-}{}_c + p_{atm}}\right)^{k_0/k_{s_0}}}, \quad s^e = s^- + 2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}$$

1) $f_1 < 0$ et $f_2 < 0$ $(p_c < p_{c0})$: comportement réversible

$$P = P^e, \ s = s^e, \varepsilon^p = 0 \quad , P_{cr} = P_{cr}^-, p_{c0} = p_{c0}^-$$

1) $f_1 > 0$ ou $f_2 > 0$ plastification et écrouissage mécanique et hydrique

$$P = P^e \exp\left[-k_0 \Delta\varepsilon_v^p\right],$$

$$s = \frac{s^e}{1 + \frac{6\alpha\mu\,\Delta\varepsilon_v^p}{M^2\left(2\mathrm{P} - 2\mathrm{P}_{cr} + k_c\, p_c\right)}}$$

$$P_{cr} = P_{cr}^- \exp\left[k\Delta\varepsilon_v^p\right] \ ,$$

$$p_{c0} + p_{atm} = \left(p_{c0} + p_{atm}\right)\exp\left[k_s \Delta\varepsilon_v^p\right]$$

L'unique inconnue est $\Delta\varepsilon_v^p$ déterminée par $f_1 = 0$ (on a alors : $\Delta\tilde{\varepsilon}^p = \frac{2\mathrm{Q}\alpha\Delta\varepsilon_v^p}{M^2\left(2\mathrm{P} + P_s - 2\mathrm{P}_{cr}\right)}$)

ou $f_2 = 0$ (et $\Delta\tilde{\varepsilon}^p = 0$)

Remarque :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La contrainte issue des données du modèle de Barcelone est $\sigma=\sigma_{tot}+p_{gz}1^{d}$, ce sera donc la variable utilisée dans la routine décrivant le comportement, la contrainte de sortie fournie à STAT_NON_LINE étant la contrainte de Bishop : $\sigma'=\sigma_{tot}-\sigma_{p}$.

Opérateurs tangents :

L'opérateur tangent des contraintes généralisées est implémenté dans THHM sous le nom $D\Sigma DE$ et partitionné en plusieurs blocs. Les composantes concernées par le modèle sont $\frac{\partial\dot{\sigma}'}{\partial\varepsilon}$ et $\frac{\partial\dot{\sigma}'}{\partial\dot{p}_c}$ des blocs [$DMECDE$] et [$DMECP1$] correspondant à : $\begin{bmatrix}\frac{\partial\dot{\sigma}'}{\partial\dot{\varepsilon}}\\ \frac{\partial\dot{\sigma}_p}{\partial\dot{\varepsilon}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{\partial\dot{\sigma}'}{\partial\dot{p}_c} & \frac{\partial\dot{\sigma}'}{\partial\nabla\dot{p}_c}\\ \frac{\partial\dot{\sigma}_{p'}}{\partial\dot{p}_c} & \frac{\partial\dot{\sigma}_{p'}}{\partial\nabla\dot{p}_c}\end{bmatrix}$.

7 Mise en œuvre du modèle

7.1 Données matériau

L'utilisation du modèle de BARCELONE nécessite d'enrichir les données du modèle de CAM_CLAY par des données supplémentaires propres aux sols non saturés. Ceci se concrétise par l'adoption simultanée des deux mots-clé CAM_CLAY et BARCELONE sous la commande DEFI_MATERIAU.

7.2 Initialisation du calcul

Il est nécessaire que l'état initial du matériau soit plastiquement admissible (la contrainte et la pression capillaire sont donc telles que le point de chargement initial soit à l'intérieur de la surface de charge). Il faut donc d'une part que la succion soit inférieure au seuil hydrique, et d'autre part que la contrainte soit à l'intérieur de l'ellipse définie dans le plan de succion initiale. En particulier, si le chargement mécanique initial est purement hydrostatique, il doit être compris entre les bornes représentées par la cohésion ($-k_c p_c$) et la pression de consolidation ($2\mathrm{P}_{cr}$). La contrainte σ utilisée pour décrire le comportement (contrainte totale plus pression de gaz) est différente de la contrainte à initialiser en ETAT_INIT (contrainte de Bishop σ'). La relation entre les deux types de contrainte est :

$$\dot{\sigma}'=\dot{\sigma}+\left[(b-1)\dot{p}_{gz}I-bS_{lq}\dot{p}_c\right]$$

7.3 Variables internes en sortie

Le modèle produit cinq variables internes :

$V_1=P_{cr}$: pression critique
$V_2=I_1$: indicateur d'irréversibilité mécanique
$V_3=p_{c0}$: seuil d'irréversibilité hydrique
$V_4=I_2$: indicateur d'irréversibilité hydrique
$V_5=P_S$: pression de cohésion

8 Perspectives de développement du modèle

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Un des phénomènes non étudié dans le modèle original de Barcelone est la non réversibilité de la courbe de pression capillaire [Figure 8-a] et sa dépendance à l'état de contrainte. Ceci est traité par Dangla et coll. [bib2] en intégrant le modèle de Barcelone dans un cadre poroplastique avec l'introduction de la teneur en eau comme variable poroplastique supplémentaire, dont l'évolution est directement reliée non seulement à la variation de pression capillaire par l'intermédiaire de la courbe de drainage-imbibition, mais aussi à l'évolution mécanique du milieu. Il faut distinguer là deux aspects distincts mais néanmoins couplés du phénomène. La non réversibilité de la courbe drainage-imbibition est un phénomène purement hydraulique et donc indépendant de la loi mécanique adoptée dans une modélisation THHM, mais cette courbe dépend de l'indice des vides donc de l'état mécanique du milieu. La partition de la teneur en eau en partie élastique et plastique et des considérations thermodynamiques [bib2] permet de déduire l'évolution à la fois de la teneur en eau (et donc du degré de saturation) et de la contrainte en fonction de la déformation et de la pression capillaire. Par exemple, l'évolution dans le domaine de réversibilité est donnée par :

$$d\varphi_{lq}^{e} = -N(\varepsilon^{e}, p_c)\, dp_c + b(\varepsilon^{e}, p_c)\, dtr(\varepsilon^{e})$$
$$dP = b(\varepsilon^{e}, p_c)\, dp_c + K(\varepsilon^{e}, p_c)\, dtr(\varepsilon^{e})$$

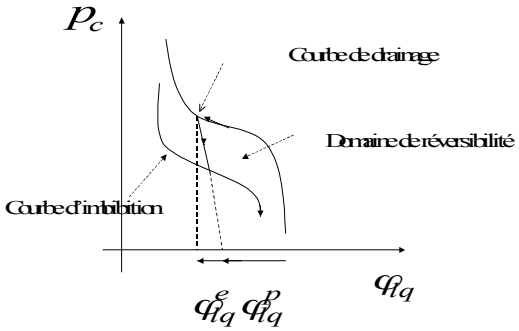


Figure 8-a

Où (N, b) sont les coefficients de Biot généralisés [bib6]. Enrichir le modèle de Barcelone dans ce sens implique donc deux développements séparés :

1) L'introduction d'une courbe de drainage-imbibition dans les développements THHM.
2) La complétude du modèle de Barcelone par le calcul du degré de saturation en plus de la contrainte.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Bibliographie

1) E.E. ALONSO, A. GENS, A. JOSA : A constitutive model for partially saturated soils. Géotechnique 40. No 3, 405 – 430., 1990.

2) P. DANGLA, L. MALINSKY , O. COUSSY , : Plasticity and imbibition – drainage curves for unsaturated soils : a unified approach. (1997). International Symposium on Numerical Models in Geomechanics. Pietruszczak & Pande (eds) Balkema, Rotterdam.

3) P. DELAGE : Le comportement des sols non-saturés. (2000). ENPC. Cours dispensé à la DER, Clamart.

4) N. TARDIEU, I. VAUTIER, E. LORENTZ : Algorithme non linéaire quasi-statique. Documentation de Référence Aster [R5.03.01].

5) J. EL GHARIB, G. DEBRUYNE : Loi de comportement Cam_Clay, Doc [R7.01.14], *Code_Aster* (2002).

6) T. LASSABATERE : Couplages hydromécaniques en milieu poreux non saturé avec changement de phase : application au rtrait de dessication. Thèse de doctorat de l'ENPC, Paris (1994).

7) C. CHAVANT : Modèles de comportement THHM, Doc [R7.01.11], *Code_Aster* (2001).

8) C. CHAVANT : Modélisations Thermo-Hydro-Mécaniques THHM. Généralités et alogorithmes, Doc [R7.01.10], *Code_Aster* (2001).

10 Vérification

La loi de comportement de BARCELONE est vérifiée par les cas tests suivants :

WTNV123	Essai triaxial à succion fixée avec le modèle de Barcelone	[V7.31.123]
WTNV124	Essai de désaturation-consolidation avec le modèle de Barcelone	[V7.31.124]
WTNV126	Réponse à des chemins mixtes de saturation-consolidation avec le modèle de Barcelone	[V7.31.126]

11 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
7,4	G.Debruyne, J.El-Gharib EDF-R&D/AMA	Texte initial

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)