Loi CJS en géomécanique

Résumé :

On présente ici la loi CJS qui s'applique à la mécanique des sols. On précise :

- la description du modèle,
- l'intégration de la loi dans *Code_Aster*,
- la description des routines introduites.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Notations....4
2 Introduction....5
3 Description de la loi CJS....5
3.1 Partition des déformations....5
3.2 Mécanisme élastique....5
3.3 Mécanisme plastique isotrope....5
3.4 Mécanisme plastique déviatoire....6
3.4.1 écrouissage isotrope....7
3.4.2 écrouissage cinématique....8
3.4.3 Loi d'évolution du mécanisme plastique déviatoire....9
3.4.4 Surface de rupture....11
3.5 Hiérarchisation du modèle....12
3.5.1 Description sommaire des trois niveaux CJS....12
3.5.2 Bilan des paramètres CJS....12
3.5.3 Correspondance avec la cohésion et l'angle de frottement....13
4 Intégration de la loi CJS....13
4.1 Choix des variables internes....14
4.2 Intégration du mécanisme élastique non linéaire....15
4.3 Intégration des mécanismes élastique non linéaire et plastique isotrope....16
4.3.1 Initialisation et solution d'essai....16
4.3.2 Itérations de Newton....17
4.3.3 Test de convergence....17
4.4 Intégration des mécanismes élastique non linéaire et plastique déviatoire....18
4.4.1 Initialisation et solution d'essai....18
4.4.2 Itérations de Newton....19
4.4.3 Test de convergence....26
4.5 Intégration des mécanismes élastique non linéaire, plastique isotrope et plastique déviatoire…26
4.5.1 Initialisation et solution d'essai....27
4.5.2 Itérations de Newton....28
4.5.3 Test de convergence....29
4.6 Procédure de relaxation basée sur une estimation des normales à la surface de charge déviatoire....29
4.7 Redécoupage du pas de temps....30
4.8 Remarques diverses....30
4.8.1 Calcul du terme....30
4.8.2 Calcul de....31
4.8.3 Traction....31
5 Opérateur tangent....31

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.1 Opérateur tangent du mécanisme élastique non linéaire....31
5.2 Opérateur tangent des mécanismes élastique et plastique isotropes....32
5.3 Opérateur tangent des mécanismes élastique et plastique déviatoire....33
5.4 Opérateur tangent des mécanismes élastique, plastiques isotrope et déviatoire....34
6 Sources Aster....35
6.1 Liste des routines modifiées et ajoutées....35
6.2 Organigramme général des principales routines....36
6.3 Détails des fonctionnalités des routines FORTRAN développées....37
6.3.1 Routine : CJSC3Q....37
6.3.2 Routine : CJSCI1....37
6.3.3 Routine : CJSDTD....37
6.3.4 Routine : CJSELA....37
6.3.5 Routine : CJSIDE....39
6.3.6 Routine : CJSIID....39
6.3.7 Routine : CJSJDE....40
6.3.8 Routine : CJSJID....41
6.3.9 Routine : CJSJIS....41
6.3.10 Routine : CJSMAT....43
6.3.11 Routine : CJSMDE....43
6.3.12 Routine : CJSMID....44
6.3.13 Routine : CJSMIS....44
6.3.14 Routine : CJSNOR....45
6.3.15 Routine : CJSPLA....45
6.3.16 Routine : CJSQCO....46
6.3.17 Routine : CJSQIJ....46
6.3.18 Routine : CJSSMD....46
6.3.19 Routine : CJSSMI....46
6.3.20 Routine : CJST....47
6.3.21 Routine : CJSTDE....47
6.3.22 Routine : CJSTEL....47
6.3.23 Routine : CJSTID....48
6.3.24 Routine : CJSTIS....48
6.3.25 Routine : LCDETE....48
6.3.26 Routine : NMCJS....48
7 Bibliographie....50
8 Fonctionnalités et vérification....50
9 Description des versions du document....50

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Notations

Les notations utilisées ici sont les notations usuelles de la mécanique des sols, auxquelles s'ajoutent les notations propres à l'écriture des paramètres de la loi CJS.

On donne également la correspondance, si elle a lieu, entre les paramètres de la loi et leurs notations dans Aster.

A	paramètre du modèle	A_CJS
b	paramètre du modèle	B_CJS
c	paramètre du modèle	C_CJS
n	paramètre du modèle	N_CJS
K	module de déformation volumique élastique	
K_o^e	paramètre du modèle	
K_o^p	paramètre du modèle	KP
G	module de cisaillement élastique	
G_o^e	paramètre du modèle	
$\boldsymbol{G}^d$	fonction pilotant l'évolution des déformations plastiques déviatoires	
$\boldsymbol{s}$	déviateur du tenseur des contraintes	
I_1	premier invariant des contraintes	
p_{co}	pression de critique initiale	PCO
P_a	pression de référence du modèle	PA
$f^i,\ f^d$	seuils des mécanismes plastiques isotrope et déviatoire	
Q_{iso}	variable interne du modèle correspondant à la limite admissible du plan déviatoire	
$\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}$	tenseurs du modèle	
$R, \boldsymbol{X}$	variables internes du modèle correspondant au rayon moyen et au centre de la surface de charge dans le plan déviatoire	
R_m	paramètre du modèle	RM
R_c	paramètre du modèle	RC
λ^i, λ^d	multiplicateurs plastiques des mécanismes isotrope et déviatoire	
$\varepsilon, \varepsilon^e, \varepsilon^{ip}, \varepsilon^{dp}$	tenseurs des déformations respectivement totales, élastiques, plastiques isotropes et plastiques déviatoires	
ε_v	déformations volumiques	
β	paramètre du modèle	BETA_CJS
γ	paramètre du modèle	GAMMA_CJS
θ	angle de Lode	
φ	fonction limitant l'évolution de $\boldsymbol{X}$	
μ	paramètre du modèle	MU_CJS
Q_{init}	paramètre du modèle	Q_INIT

Remarque :

> *Avertissement aux lecteurs : Contrairement à l'usage de la géomécanique, la convention de signe retenue est celle de la mécanique des milieux continus, i.e. les tractions sont comptées positivement.*

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Introduction

Le modèle CJS est une loi de comportement élasto-plastique adaptée à la modélisation des matériaux granulaires. Elle a été développée à l'École Centrale de Lyon ([bib1], [bib2], [bib3]).

La version CJS implantée dans *Code_Aster* est un modèle hiérarchisé comprenant plusieurs niveaux de complexité. Dans son expression la plus complète, le modèle possède deux surfaces de charge : l'une est activée par les sollicitations isotropes, l'autre par les sollicitations déviatoires. La première subit un écrouissage isotrope et la seconde un écrouissage mixte (isotrope et cinématique). La loi élastique est de type hypoélastique non linéaire.

3 Description de la loi CJS

3.1 Partition des déformations

L'incrément de déformation globale se décompose en trois parties, relatives à chacun des mécanismes mis en jeu :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{e}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{ip}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{dp}_{ij}$$

où $\dot{\varepsilon}^{e}_{ij}$, $\dot{\varepsilon}^{ip}_{ij}$ et $\dot{\varepsilon}^{dp}_{ij}$ sont respectivement les incréments de déformation élastique, de déformation plastique isotrope et de déformation plastique déviatoire.

3.2 Mécanisme élastique

La partie élastique de la loi est de type hypoélastique, dont l'expression générale est :

$$\dot{\varepsilon}^{e}_{ij} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2\,G} + \frac{\dot{I}_1}{9\,K}\delta_{ij}$$

où I_1 est le premier invariant des contraintes : $I_1 = tr(\sigma)$, $\boldsymbol{s}$ est la partie déviatoire du tenseur des contraintes, et où K et G sont respectivement le module de déformation volumique et le module de cisaillement élastiques. Ceux-ci dépendent de l'état de contraintes selon :

$$K = K^{e}_{o}\left(\frac{I_1 + Q_{init}}{3\,P_a}\right)^{n} \ , \ G = G^{e}_{o}\left(\frac{I_1 + Q_{init}}{3\,P_a}\right)^{n}$$

K^{e}_{o} , G_o , P_a et n sont des paramètres du modèle. P_a est une pression de référence égale à -100 kPa.

3.3 Mécanisme plastique isotrope

La surface de charge correspondante f^i est, dans l'espace des contraintes principales, un plan perpendiculaire à l'axe hydrostatique, soit :

$$f^{i}(\sigma,\, Q_{iso}) = -\frac{(I_1 + Q_{init})}{3} + Q_{iso}$$

où Q_{iso} est la force thermodynamique qui dépend de la variable interne q selon :

$$\dot{Q}_{iso} = K^{p}\,\dot{q} = K^{p}_{o}\left(\frac{Q_{iso}}{P_a}\right)^{n}\dot{q}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

K_o^p , P_a et n sont les paramètres du mécanisme plastique déviatoire (P_a et n sont identiques à ceux du mécanisme élastique). La règle de normalité permet d'exprimer l'évolution de la déformation plastique et de la variable d'écrouissage en fonction de l'évolution du multiplicateur plastique λ^i :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{ip}=\dot{\lambda}^i \frac{\partial f^i}{\partial \sigma_{ij}}=-\frac{1}{3}\dot{\lambda}^i \delta_{ij} \text{ et } \dot{q}=-\dot{\lambda}^i \frac{\partial f^i}{\partial Q_{iso}}=-\dot{\lambda}^i$$

Compte tenu de la seconde équation, la loi d'écrouissage peut se mettre également sous la forme :

$$\dot{Q}_{iso}=-\dot{\lambda}^i K_o^p \left(\frac{Q_{iso}}{P_a}\right)^n$$

3.4 Mécanisme plastique déviatoire

La surface de charge de ce second mécanisme plastique est une surface convexe à symétrie ternaire définie par l'équation :

$$f^d(\sigma, R, \boldsymbol{X})=q_{II} h(\theta_q)+R(I_1+Q_{init})$$

avec $q_{ij}=s_{ij}-I_1 X_{ij}$

$$q_{II}=\sqrt{q_{ij} q_{ij}}$$

$$h(\theta_q)=(1+\gamma \cos(3\theta_q))^{1/6}=\left(1+\gamma \sqrt{54}\frac{\det(\boldsymbol{q})}{q_{II}^3}\right)^{1/6}.$$

Le scalaire R et le tenseur $\boldsymbol{X}$ représentent respectivement le rayon moyen et le centre de la surface de charge dans le plan déviatoire.

$\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{X}$ sont des tenseurs déviatoires. γ est un paramètre qui traduit le comportement dissymétrique des sols en compression et en extension. θ est l'angle de Lode.

Cette surface de charge évolue selon deux types d'écrouissage : écrouissage isotrope et écrouissage cinématique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Remarque :

L'expression de l'angle de Lode se retrouve de la manière suivante :
Dans un repère $(H, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ *du plan déviatoire le vecteur* $\mathbf{HM}$ *peut être déterminé à partir de la distance* $HM=\rho$ *et de l'angle de Lode* θ_s *(cf. [Figure 3.4-a]). Les coordonnées de* $\mathbf{HM}$ *sont :*

$$\mathbf{HM}=(\rho \sin\theta_s, \rho\cos\theta_s)$$

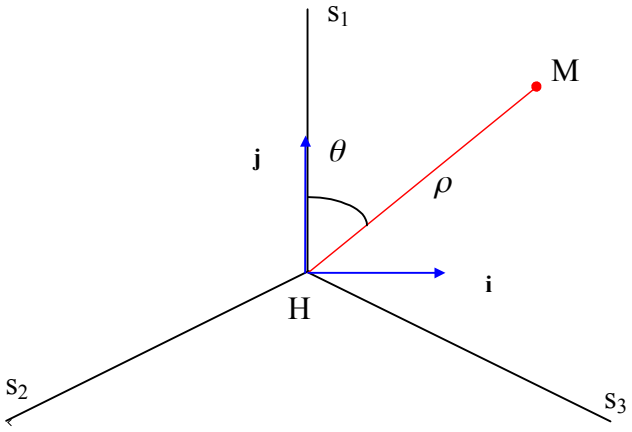


Figure 3.4-a : Angle de Lode dans le plan déviatoire

Les composantes principales du déviateur sont donc :

$$s_1=\rho\cos\theta_s \ , \ s_2=\rho\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\theta_s\right) \text{ et } s_3=\rho\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta_s\right)$$

Par conséquent, on a : $s_{II}=\sqrt{\frac{3}{2}}\rho$ *et*

$$\det(\boldsymbol{s})=\frac{1}{4}\rho^3\cos\theta_s\left(\cos^2\theta_s-3\sin^2\theta_s\right)=\frac{1}{4}\rho^3\cos(3\theta_s)$$

on en déduit alors la relation :

$$\cos(3\theta_s)=2^{1/2}\,3^{3/2}\frac{\det(s)}{s_{II}^3}$$

L'angle θ_q *se calcule de la même façon.*

3.4.1 Écrouissage isotrope

La loi d'écrouissage isotrope s'écrit comme suit :

$$\dot{R}=\frac{A\,R_m^2\,\dot{r}}{(R_m+A\,r)^2}$$

La force thermodynamique R est fonction de r dont l'évolution est donnée par :

$$\dot{r}=-\dot{\lambda}^d\frac{\partial f^d}{\partial R}\left(\frac{I_1+Q_{init}}{3\,P_a}\right)^{-1.5}=-\dot{\lambda}^d\,(I_1+Q_{init})\left(\frac{I_1+Q_{init}}{3\,P_a}\right)^{-1.5}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Par intégration directe de la loi d'écrouissage, il vient :

$$R=\frac{A\ R_m\ r}{R_m+A\ r}\ \text{, soit aussi }\ r=\frac{R\ R_m}{A\left(R_m-R\right)}$$

La loi d'écrouissage peut donc également s'exprimer par :

$$\dot{R}=-\dot{\lambda}^d\ A\left(1-\frac{R}{R_m}\right)^2\left(I_1+Q_{init}\right)\left(\frac{I_1+Q_{init}}{3\ P_a}\right)^{-1.5}=\dot{\lambda}^d G^R\left(\sigma\ ,\ R\right)$$

avec $G^R\left(\sigma\ ,\ R\right)=-A\left(1-\frac{R}{R_m}\right)^2\left(I_1+Q_{init}\right)\left(\frac{I_1+Q_{init}}{3\ P_a}\right)^{-1.5}$

et où R_m (qui est le rayon moyen du domaine élastique en rupture) et A sont des paramètres du modèle.

3.4.2 Écrouissage cinématique

La loi d'écrouissage cinématique est donnée par :

$$\dot{X}_{ij}=\frac{1}{b}\ \dot{\alpha}_{ij}$$

La force thermodynamique $\boldsymbol{X}$ est fonction de la variable α dont l'évolution non linéaire est donnée par :

$$\dot{\alpha}_{ij}=-\dot{\lambda}^d\left[dev\left(\frac{\partial f^d}{\partial X_{ij}}\right)-\left(I_1+Q_{init}\right)\varphi\ X_{ij}\right]\left(\frac{I_1+Q_{init}}{3\ P_a}\right)^{-1.5}$$

Le terme $-\left(I_1+Q_{init}\right)\varphi X$ permet d'obtenir l'écrouissage cinématique non linéaire, traduisant la limitation de l'évolution de la surface de charge.

En tenant compte de $\frac{\partial f^d}{\partial X_{ij}}=\frac{\partial f^d}{\partial q_{kl}}\ \frac{\partial q_{kl}}{\partial X_{ij}}=-\left(I+Q_{init_1}\right)\frac{\partial f^d}{\partial q_{ij}}$, et en posant : $Q_{ij}=dev\left(\frac{\partial f^d}{\partial q_{ij}}\right)$, il vient finalement pour la loi d'écrouissage :

$$\dot{X}_{ij}=\dot{\lambda}^d\ \frac{1}{b}\left(Q_{ij}+\varphi\ X_{ij}\right)\left(I_1+Q_{init}\right)\left(\frac{I_1+Q_{init}}{3\ P_a}\right)^{-1.5}=\dot{\lambda}^d\ G_{ij}^X\left(\sigma\ ,\boldsymbol{X}\right)$$

avec $G_{ij}^X\left(\sigma\ ,\boldsymbol{X}\right)=\frac{1}{b}\left(Q_{ij}+\varphi\ X_{ij}\right)\left(I_1+Q_{init}\right)\left(\frac{I_1+Q_{init}}{3\ P_a}\right)^{-1.5}$.

où φ une fonction qui limite l'évolution de $\boldsymbol{X}$ et est un paramètre du modèle.

Le tenseur $\boldsymbol{Q}$ se calcule selon la formule :

$$Q_{ij}=\frac{1}{h\left(\theta\right)^5}\left[\left(1+\frac{\gamma}{2}\cos\left(3\,\theta\right)\right)\frac{q_{ij}}{q_{II}}+\frac{\gamma\sqrt{54}}{6q_{II}^2}dev\left(\frac{\partial\det\left(\boldsymbol{q}\right)}{\partial q_{ij}}\right)\right]$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'expression précédente s'obtient de la façon suivante. On a :

$$\frac{\partial f^d}{\partial q_{ij}} = h\left(\theta_q\right) \frac{\partial q_{II}}{\partial q_{ij}} + q_{II} \frac{\partial h\left(\theta_q\right)}{\partial q_{ij}}$$

où $\frac{\partial q_{II}}{\partial q_{ij}}$ et $\frac{\partial h\left(\theta_q\right)}{\partial q_{ij}}$ sont respectivement donnés par :

$$\frac{\partial q_{II}}{\partial q_{ij}} = \frac{q_{ij}}{q_{II}}$$

$$\frac{\partial h\left(\theta_q\right)}{\partial q_{ij}} = \frac{1}{6\, h\left(\theta_q\right)^5} \frac{\partial}{\partial q_{ij}} \left(1 + \gamma \sqrt{54} \frac{\det\left(\boldsymbol{q}\right)}{q_{II}^3} \right) = \frac{-\gamma \cos\left(3\,\theta_q\right)}{2\mathrm{h}\left(\theta_q\right)^5} \frac{q_{ij}}{q_{II}^2} + \frac{\gamma \sqrt{54}}{6\mathrm{h}\left(\theta_q\right)^5 q_{II}^3} \frac{\partial \det\left(\boldsymbol{q}\right)}{\partial q_{ij}}$$

d'où

$$\frac{\partial f^d}{\partial q_{ij}} = \frac{1}{h\left(\theta_q\right)^5} \left[\left(1 + \frac{\gamma}{2} \cos\left(3\,\theta_q\right) \right) \frac{q_{ij}}{q_{II}} + \frac{\gamma \sqrt{54}}{6 q_{II}^2} \left(\frac{\partial \det\left(\boldsymbol{q}\right)}{\partial q_{ij}} \right) \right]$$

La fonction φ est, quant à elle donnée par :

$$\varphi = \varphi_o\, h\left(\theta_s\right)\, Q_{II}$$

où $Q_{II} = \sqrt{Q_{ij}\, Q_{ij}}$ et $h\left(\theta_s\right) = \left(1 + \gamma \cos\left(3\,\theta_s\right)\right)^{1/6} = \left(1 + \gamma \sqrt{54} \frac{\det\left(\boldsymbol{s}\right)}{s_{II}^3} \right)^{1/6}$. Le terme φ_o s'exprime en fonction de caractéristique à la rupture du matériau.

3.4.3 Loi d'évolution du mécanisme plastique déviatoire

Dans les matériaux granulaires, une variation de volume peut se produire pour un chargement purement déviatoire. Cette variation de volume est liée à l'aspect discontinu du matériau et aux conditions cinématique qui résultent lors du chargement. Ce phénomène particulier ne permet pas de définir les déformations plastiques déviatoires à partir de la seule règle de normalité. C'est pourquoi le mécanisme plastique déviatoire est non associé. Il existe donc une fonction potentielle pilotant l'évolution des déformations :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{dp} = \dot{\lambda}^d\, G_{ij}^d$$

La fonction potentielle est définie à partir de la condition cinématique suivante :

$$\dot{\varepsilon}_v^{dp} = -\beta \left(\frac{s_{II}}{s_{II}^c} - 1 \right) \frac{\left| s_{ij}\, \dot{e}_{ij}^{dp} \right|}{s_{II}}$$

où β est un paramètre du modèle et s_{II}^c représente l'état de contrainte caractéristique. Une surface, de forme identique à la surface de charge dans l'espace des contraintes, sépare les états contractants des états dilatants. Cette surface, dite caractéristique, a pour équation :

$$f^c = s_{II}^c\, h\left(\theta_s\right) + R_c \left(I_1 + Q_{init} \right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

où R_c est un paramètre correspondant au rayon moyen de cette surface caractéristique. La condition cinématique peut aussi se mettre sous la forme :

$$\dot{\varepsilon}_v^{dp}+\beta\left(\frac{s_{II}}{s_{II}^c}-1\right)\frac{|s_{ij}\,\dot{e}_{ij}^{dp}|}{s_{II}}=\dot{\varepsilon}_v^{dp}+\beta\left(\frac{s_{II}}{s_{II}^c}-1\right)\frac{|s_{ij}\,\dot{e}_{ij}^{dp}|}{s_{ij}\,\dot{e}_{ij}^{dp}}\frac{s_{ij}\,\dot{e}_{ij}^{dp}}{s_{II}}$$
$$=\dot{\varepsilon}_v^{dp}+\frac{\beta'}{s_{II}}\,s_{ij}\,\dot{e}_{ij}^{dp}$$
$$=\dot{\varepsilon}_v^{dp}+\frac{\beta'}{s_{II}}\,s_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{dp}=0$$

où $\beta'=\beta\left(\frac{s_{II}}{s_{II}^c}-1\right)signe\left(s_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{dp}\right)$.

Il est alors possible de chercher à exprimer cette condition cinématique à partir d'un tenseur n sous la forme :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{dp}\,n_{ij}=0$$

c'est-à-dire, après décomposition de chaque terme en parties déviatoire et hydrostatique :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{dp}\,n_{ij}=\left(\dot{e}_{ij}^{dp}+\frac{1}{3}\,\dot{\varepsilon}_v^{dp}\,\delta_{ij}\right)\left(n_1\,s_{ij}+n_2\,\delta_{ij}\right)=n_1\,s_{ij}\,\dot{e}_{ij}^{dp}+n_2\,dt\,\varepsilon_v^{dp}=0$$

On en déduit la relation $\frac{n_1}{n_2}=\frac{\beta'}{s_{II}}$, qui ajouté à la condition de normalisation $\boldsymbol{n}:\boldsymbol{n}=1$, conduit aux expressions :

$$n_1=\frac{\frac{\beta'}{s_{II}}}{\sqrt{\beta'^2+3}}\quad\text{et}\quad n_2=\frac{1}{\sqrt{\beta'^2+3}}\ ,\ \text{soit}\quad n_{ij}=\frac{\beta'\,\frac{s_{ij}}{s_{II}}+\delta_{ij}}{\sqrt{\beta'^2+3}}$$

La loi d'évolution de $\dot{\varepsilon}_{ij}^{dp}$ doit être telle que la condition cinématique soit satisfaite. Il est donc proposé de prendre la projection de $\dot{\varepsilon}_{ij}^{dp}$ sur l'hypersurface de déformation de normale $\boldsymbol{n}$, soit :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{dp}=\dot{\lambda}^d\left(\frac{\partial f^d}{\partial\sigma_{ij}}-\left(\frac{\partial f^d}{\partial\sigma_{kl}}\,n_{kl}\right)n_{ij}\right)=\dot{\lambda}^d\,G_{ij}^d$$

avec $G_{ij}^d=\frac{\partial f^d}{\partial\sigma_{ij}}-\left(\frac{\partial f^d}{\partial\sigma_{kl}}\,n_{kl}\right)n_{ij}$.

Par ailleurs, pour le calcul du potentiel, on peut noter que :

$$\frac{\partial f^d}{\partial\sigma_{ij}}=\frac{\partial f^d}{\partial q_{kl}}\,\frac{\partial q_{kl}}{\partial\sigma_{ij}}+R\,\delta_{ij}$$
$$=\left[dev\left(\frac{\partial f^d}{\partial q_{kl}}\right)+\frac{1}{3}\,\frac{\partial f^d}{\partial q_{mm}}\,\delta_{kl}\right]\left[\delta_{ik}\,\delta_{jl}-\delta_{ij}\left(\frac{1}{3}\,\delta_{kl}+X_{kl}\right)\right]+R\,\delta_{ij}$$
$$=Q_{kl}\,\delta_{ik}\,\delta_{jl}-\delta_{ij}\left(\frac{1}{3}\,Q_{kl}\,\delta_{kl}+Q_{kl}\,X_{kl}\right)+\frac{1}{3}\,\frac{\partial f^d}{\partial q_{mm}}\left[\delta_{ik}\,\delta_{jl}\,\delta_{kl}-\delta_{ij}\left(\frac{1}{3}\,\delta_{kl}\,\delta_{kl}+\delta_{kl}\,X_{kl}\right)\right]+R\,\delta_{ij}$$
$$=Q_{ij}-\left(Q_{kl}\,X_{kl}-R\right)\delta_{ij}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.4.4 Surface de rupture

L'état de rupture résulte de la nature non linéaire des lois d'écrouissage et de l'existence de valeurs limites associées aux variables d'écrouissage R et $\boldsymbol{X}$. La limite de R, notée R_m, est atteinte lorsque r tend vers l'infini. La limite de X_{ij} est atteinte lorsque $\dot{X}_{ij}$ devient nul.
Dans ces conditions :

$$Q_{ij}=\varphi\ X_{ij} \text{ et } Q_{II}=\varphi\ X_{II\,\mathbf{lim}} \Rightarrow X_{II\,\mathbf{lim}}=\frac{1}{\varphi_o\ h\left(\theta_s\right)}$$

À l'état de rupture on a donc [Figure 3.4.4-a] :

$$q_{II}=\frac{s_{II}+I_1\ X_{II\,\mathbf{lim}}\ \cos\alpha}{\cos\left(\theta_s-\theta_q\right)}$$

En remplaçant cette expression et la valeur de R en rupture, dans l'équation de la surface de charge en rupture, on obtient l'équation d'une enveloppe limite pour les surfaces de charge :

$$f^r=s_{II}\ h\left(\theta_s\right)+R_r\left(I_1+Q_{init}\right)=0$$

avec $R_r=\frac{\cos\alpha}{\varphi_o}+\frac{h\left(\theta_s\right)}{h\left(\theta_q\right)}\ R_m\ \cos\left(\theta_s-\theta_q\right)$, rayon moyen de l'enveloppe, qui se détermine à partir des caractéristiques mécaniques à la rupture du matériau. La valeur de φ_o peut alors en être déduite :

$$\varphi_o=\frac{\cos\alpha}{R_r-\frac{h\left(\theta_s\right)}{h\left(\theta_q\right)}\ R_m\ \cos\left(\theta_s-\theta_q\right)}$$

avec $\cos\alpha=\frac{q_{II}^2-s_{II}^2-\left(I_1\ X_{II}\right)^2}{2\ s_{II}\ I_1\ X_{II}}$

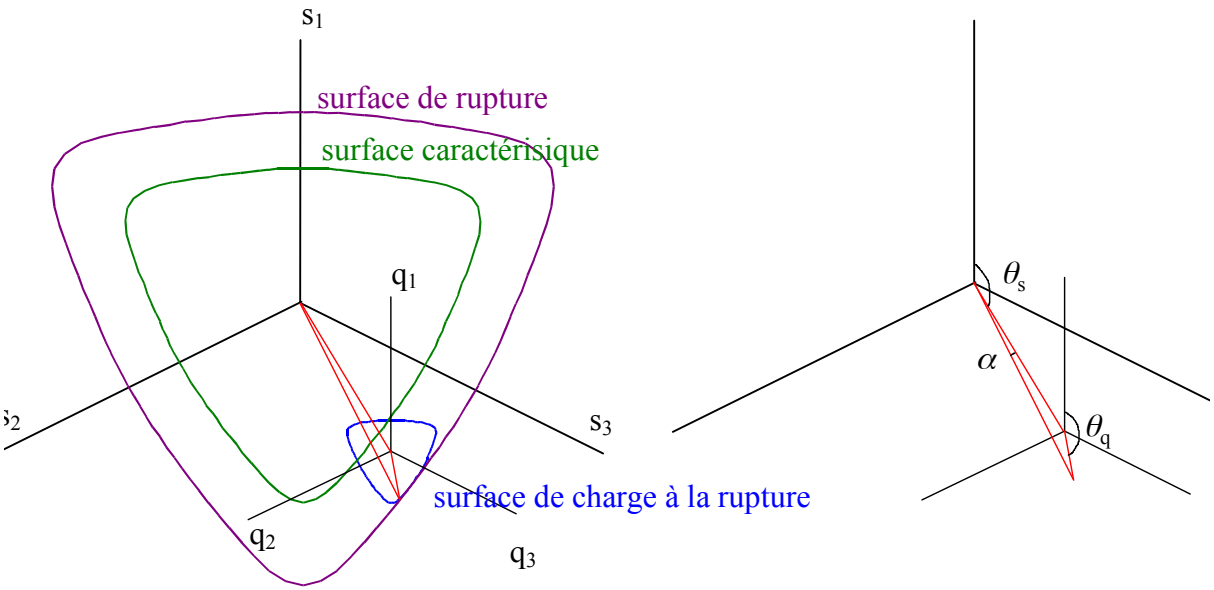


Figure 3.4.4-a : Représentation des surfaces de rupture, caractéristique et de charge dans le plan déviatoire

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Par ailleurs, R_r est lié à l'angle de frottement maximal et dépend de la contrainte moyenne et de la densité relative. Pour prendre en compte la dépendance de l'angle de frottement maximal en fonction de la contrainte moyenne et de la densité relative, on considère la relation :

$$R_r = R_c + \mu \ln\left(\frac{3\ p_c}{I_1 + Q_{init}}\right)$$

où R_c et μ sont des paramètres du modèle. p_c est la contrainte moyenne critique, c'est-à-dire la contrainte moyenne minimale (elle est négative avec notre convention de signe) connue par le matériau au cours de son histoire. Elle dépend de la densité relative initiale selon la notion classique de droite critique dans le plan $\left(e,\ \ln|p|\right)$:

$$p_c = p_{co} \exp\left(-c\ \varepsilon_v\right)$$

où p_{co} est la pression critique initiale et $1/c$ est la pente de la droite d'état critique dans le plan $\left(|\varepsilon_v|,\ \ln|p|\right)$.

3.5 Hiérarchisation du modèle

3.5.1 Description sommaire des trois niveaux CJS

À partir de la description complète du modèle donnée ci-dessus, on déduit trois niveaux de complexité croissante dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau suivant :

	Mécanisme élastique	Mécanisme plastique isotrope	Mécanisme plastique déviatoire
CJS1	linéaire	non activé	activé, plasticité parfaite
CJS2	non linéaire	activé	activé, écrouissage isotrope
CJS3	non linéaire	activé	activé, écrouissage cinématique

Tableau 3.5.1-1 : Les différents mécanismes utilisés par les différents niveaux du modèle CJS

3.5.2 Bilan des paramètres CJS

Par ailleurs, on peut également résumer la correspondance entre les différents niveaux du modèle et les paramètres associés à chacun d'eux :

	n	K_o^e	G_o^e	K^p	γ	β	R_c	A	b	R_m	μ	p_{co}	c	p_a
CJS1		×	×		×	×				×				×
CJS2	×	×	×	×	×	×	×	×		×				×
CJS3	×	×	×	×	×	×	×		×	×	×	×	×	×

Tableau 3.5.2-1 : Bilan des différents paramètres en fonction des niveaux CJS

Dans *Code_Aster*, les paramètres élastiques du modèle CJS (K_o^e et G_o) sont directement pris en compte dans les caractéristiques élastiques du matériau, c'est-à-dire à travers le module de Young E et le coefficient de Poisson NU .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans *Code_Aster*, l'utilisateur n'indique pas de façon explicite le niveau CJS qu'il choisi. C'est en effet le choix des différents paramètres qui détermine le niveau correspondant. Nous avons pour résumer les tests logiques suivants qui sont intégrés dans le code :

- si $n=0$ alors niveau CJS1,
- si ($n\neq 0$ et $A\neq 0$) alors niveau CJS2,
- si ($n\neq 0$ et $A=0$) alors niveau CJS3.

Remarque :

L'utilisateur doit fixer la valeur de P_a égale à $-100\,kPa$ en fonction des unités choisies. En outre, pour CJS3, la valeur de p_{co} doit être négative.

3.5.3 Correspondance avec la cohésion et l'angle de frottement

Les mécaniciens des sols ont l'habitude d'utiliser les notions de cohésion Cohésion c , d'angle de frottement φ et d'angle de dilatance : ψ . Ces paramètres sont utilisés dans la loi de Mohr Coulomb.
Le niveau 1 de la loi CJS permet de retrouver un comportement très voisin en faisant le choix suivant de paramètres :

$$\left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^{1/6}=\frac{3-\sin(\varphi)}{3+\sin(\varphi)}$$

$$R_m=\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}\sin(\varphi)(1-\gamma)^{1/6}}{3-\sin(\varphi)}$$

$$Q_{init}=-3c\cot an(\varphi)$$

$$\beta=\frac{-2\sqrt{6}\sin\psi}{3-\sin\psi}$$

4 Intégration de la loi CJS

Nous détaillons ci-dessous l'intégration de la loi CJS en fonction du ou des mécanismes activés :

- élastique non linéaire,
- élastique non linéaire et plastique isotrope
- élastique non linéaire et plastique déviatoire
- élastique non linéaire, plastique isotrope et plastique déviatoire.

Dans chaque cas, le but est de calculer, à partir des champs connus à l'état moins ε^- , σ^- et de l'incrément de déformation $\Delta\varepsilon$, le nouvel état de contrainte σ^+ .

Dans l'enchaînement des calculs, on commence par faire l'hypothèse que seul le mécanisme élastique non linéaire intervient. On réalise donc une prédiction élastique. Cette prédiction est ensuite utilisée pour calculer les fonctions de charge f^i et f^d , on cherche à savoir si l'on va alors au-delà des seuils :

- si $f^i\leq 0$ et $f^d\leq 0$, la prédiction élastique est retenue comme nouvel état de contrainte,

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- si $f^i>0$ et $f^d\leq 0$, on fait l'intégration des mécanismes élastique non linéaire et plastique isotrope,
- si $f^i\leq 0$ et $f^d>0$, on fait l'intégration des mécanismes élastique non linéaire et plastique déviatoire,
- si $f^i>0$ et $f^d>0$, on fait l'intégration des mécanismes élastique non linéaire, plastique isotrope et plastique déviatoire.

En sortie du calcul élasto-plastique, lorsqu'un seul seuil plastique a été initialement dépassé, on recalcule chacune des fonctions de charge. En effet, il est possible qu'en cherchant à se ramener sur l'un des seuils, on dépasse alors l'autre seuil non activé initialement par la prédiction élastique. Dans ce cas, on résout alors en intégrant tous les mécanismes.

4.1 Choix des variables internes

Les variables q , r et α sont équivalentes aux forces thermodynamiques associées Q_{iso} , R et X . Pour cette raison et puisque leur signification géométrique est plus évidente, nous retiendrons comme variables internes pour l'intégration de la loi CJS, les grandeurs Q_{iso} , R et X .
Par ailleurs, nous ajoutons au nombre des variables internes :

- le signe du produit $s_{ij}\varepsilon_{ij}^{dp}$
- l'état élastique ou élasto-plastique du matériau, en notant :
  - 0 : état élastique
  - 1 : état élasto-plastique, mécanisme plastique isotrope
  - 2 : état élasto-plastique, mécanisme plastique déviatoire
  - 3 : état élasto-plastique, mécanismes plastiques isotrope et déviatoire

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Finalement, les variables internes sont stockées dans un vecteur VI dans l'ordre suivant :

Indice de variable interne		CJS1	CJS2	CJS3
3D	2D	CJS1	CJS2	CJS3
1	1	$Q_{iso}=\infty$	Q_{iso}	Q_{iso}
2	2	$R=R_m$	R	$R=R_m$
3	3	0	0	X_{11}
4	4	0	0	X_{22}
5	5	0	0	X_{33}
6	6	0	0	$\sqrt{2}\,X_{12}$
7	–	0	0	$\sqrt{2}\,X_{13}$
8	–	0	0	$\sqrt{2}\,X_{23}$
9	7	$\frac{q_{II}\,h(\theta_q)}{\lvert R_m(I_1+Q_{init})\rvert}$	$\frac{q_{II}\,h(\theta_q)}{\lvert R(I_1+Q_{init})\rvert}$	$\frac{q_{II}\,h(\theta_q)}{\lvert R_m(I_1+Q_{init})\rvert}$
10	8		$\frac{R}{R_m}$	$\frac{X_{II}}{X_{II}^{\lim}}$
11	9		$\lvert\frac{3Q}{I_1+Q_{init}}\rvert$	$\lvert\frac{3Q}{I_1+Q_{init}}\rvert$
12	10	Nombre d'itérations internes	Nombre d'itérations internes	Nombre d'itérations internes
13	11	test local atteint	test local atteint	test local atteint
14	12	nbre de redécoupage	nbre de redécoupage	nbre de redécoupage
15	13	$signe(s_{ij}\varepsilon_{ij}^{dp})$	$signe(s_{ij}\varepsilon_{ij}^{dp})$	$signe(s_{ij}\varepsilon_{ij}^{dp})$
16	14	0,1,2,3 état du matériau	0,1,2,3 état du matériau	0,1,2,3 état du matériau

4.2 Intégration du mécanisme élastique non linéaire

Dans le cas élastique, le nouvel état de contrainte σ^+ , vérifie simplement :

$$\sigma_{ij}^{+}=\sigma_{ij}^{-}+D_{ijkl}(\sigma^+)\,\Delta\varepsilon_{kl}$$

La dépendance du tenseur d'élasticité non linéaire en fonction de l'état de contraintes se résume en fait à :

$$D_{ijkl}(\sigma^+)=D_{ijkl}^{lineaire}\left(\frac{I_1^+ + Q_{init}}{3\ P_a}\right)^n$$

où $D_{ijkl}^{lineaire}$ est le tenseur d'élasticité linéaire isotrope classique, obtenu à partir de K_o^e et G_o ou par équivalence à partir de E et Nu.

De cette relation, on déduit en particulier que le premier invariant des contraintes satisfait à :

$$I_1^+ - I_1^- - 3\ K_o^e\left(\frac{I_1^+ + Q_{init}}{3\ P_a}\right)^n\ tr(\Delta\varepsilon)=0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Cette équation non linéaire est résolue par une méthode de la sécante pour CJS2 et CJS3, en différenciant les cas suivant le signe de $tr\left(\Delta\varepsilon\right)$. En ce qui concerne le modèle CJS1, pour lequel le paramètre n est nul, la résolution explicite est immédiate, puisque l'on a alors

$$I_1^+ = I_1^- + 3\ K_o^e\ tr\left(\Delta\varepsilon\right)$$

Dans le cas général, la connaissance de I_1^+ et donc du terme $\left(\frac{I_1^+ + Q_{init}}{3\ P_a}\right)^n$ permet de définir l'opérateur d'élasticité non linéaire $D_{ijkl}\left(\sigma^+\right)$. L'obtention du nouvel état de contrainte est alors directe.

4.3 Intégration des mécanismes élastique non linéaire et plastique isotrope

Dans ce cas, le nouvel état de contrainte σ^+ , vérifie :

$$\sigma_{ij}^+ = \sigma_{ij}^- + D_{ijkl}\left(\sigma^+\right)\left(\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\varepsilon_{kl}^{ip}\right)$$

Étant donné la forme simple, des déformations plastiques du mécanisme plastique isotrope :

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{ip} = -\frac{1}{3}\Delta\lambda^i\delta_{ij}$$

le système non linéaire à résoudre est composé de :

- LE_{ij} : la loi état élastique : $\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^- - D_{ijkl}\left(\sigma^+\right)\left(\Delta\varepsilon_{kl} + \frac{1}{3}\Delta\lambda^i\delta_{kl}\right) = 0$
- LQ : la loi d'écrouissage de la variable interne Q_{iso} : $Q_{iso}^+ - Q_{iso}^- - \Delta\lambda^i\ G^{Q_{iso}}\left(Q_{iso}^+\right) = 0$
- FI : l'équation de la surface de charge isotrope : $-\frac{I_1^+ + Q_{init}}{3} + Q_{iso}^+ = 0$

Schématiquement, on cherche donc à résoudre le système $R\left(Y\right) = 0$, où l'inconnue Y est donnée par $Y = \left(\sigma_{ij}^+,\ Q_{iso}^+,\ \Delta\lambda^i\right)$ et où $R = \left(LE_{ij},\ LQ,\ FI\right)$. La résolution de $R\left(Y\right) = 0$ se fait par la méthode de Newton :

- initialisation et calcul d'une solution d'essai
- itérations de Newton : résolution de $\frac{DR}{DY}\left(Y^p\right)\ DY^{p+1} = -R\left(Y^p\right)$
- test de convergence : si convergence $Y = Y^p$; sinon $Y^{p+1} = Y^p + DY^{p+1}$ et $p = p+1$

Nous détaillons ci-dessous ces trois étapes.

4.3.1 Initialisation et solution d'essai

Nous prenons simplement pour $Y^0 = \left(\sigma_{ij}^0,\ Q_{iso}^0,\ \Delta\lambda^{i^0}\right)$, les valeurs suivantes :

$\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^{elas}$: contraintes données par la prédiction élastique,
$Q_{iso}^0 = Q_{iso}^-$: variable interne à t
$\Delta\lambda^{i^0} = 0$: multiplicateur plastique nul

Contrairement aux autres mécanismes élasto-plastiques, on ne calcule pas ici de solution d'essai.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3.2 Itérations de Newton

La résolution de $\frac{DR}{DY}\left(Y^p\right)\ DY^{p+1}=-R\left(Y^p\right)$ nécessite naturellement le calcul des dérivées de LE_{ij} , LQ et FI par rapport à chaque composant de Y . On a :

$$\frac{DR}{DY}=\begin{bmatrix}\frac{\partial LE_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} & \frac{\partial LE_{ij}}{\partial Q_{iso}} & \frac{\partial LE_{ij}}{\partial \Delta\lambda^i}\\ \frac{\partial LQ}{\partial \sigma_{kl}} & \frac{\partial LQ}{\partial Q_{iso}} & \frac{\partial LQ}{\partial \Delta\lambda^i}\\ \frac{\partial FI}{\partial \sigma_{kl}} & \frac{\partial FI}{\partial Q_{iso}} & \frac{\partial FI}{\partial \Delta\lambda^i}\end{bmatrix}$$

avec :

$$\frac{\partial LE_{ij}}{\partial \sigma_{kl}\delta}=\delta_{ik}\delta_{jl}-\frac{\partial D_{ijmn}}{\partial \sigma_{kl}}\left(\Delta\epsilon_{mn}+\frac{1}{3}\Delta\lambda^i\delta_{mn}\right)=\delta_{ik}\delta_{jl}-D^{lineaire}_{ijmn}\left(\Delta\epsilon_{mn}+\frac{1}{3}\Delta\lambda^i\delta_{mn}\right)\frac{n}{3\ P_a}\left(\frac{I_1+Q_{init}}{3\ P_a}\right)^{n-\delta}\delta_{kl}$$

$$\frac{\partial LE_{ij}}{\partial Q_{iso}}=0$$

$$\frac{\partial LE_{ij}}{\partial \Delta\lambda^i}=-\frac{1}{3}\ D_{ijmn}\delta_{mn}$$

$$\frac{\partial LQ}{\partial \sigma_{kl}}=0$$

$$\frac{\partial LQ}{\partial Q_{iso}}=1-\Delta\lambda^i\frac{\partial G^{Q_{iso}}}{\partial Q_{iso}}=1+\Delta\lambda^i\frac{n\ K_o^p}{P_a}\left(\frac{Q_{iso}}{P_a}\right)^{n-1}$$

$$\frac{\partial LQ}{\partial \Delta\lambda^i}=-\ G^{Q_{iso}}$$

$$\frac{\partial FI}{\partial \sigma_{kl}}=-\frac{1}{3}\delta_{kl}$$

$$\frac{\partial FI}{\partial Q_{iso}}=1$$

$$\frac{\partial FI}{\partial \Delta\lambda^i}=0$$

4.3.3 Test de convergence

Les itérations de Newton sont poursuivies tant que l'erreur relative $\frac{\|DY^{p+1}\|}{\|Y^{p+1}-Y^0\|}$ reste supérieure à la tolérance admise par l'utilisateur et définie par le mot clé `RESI_INTE_RELA`. La norme utilisée ici est la norme vectorielle : $\|x\|=\sqrt{\sum_i x_i^2}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.4 Intégration des mécanismes élastique non linéaire et plastique déviatoire

Dans ce cas, le nouvel état de contrainte σ^+ , vérifie :

$$\sigma_{ij}^+ = \sigma_{ij}^- + D_{ijkl}\left(\sigma^+\right)\left(\Delta\epsilon_{kl} - \Delta\epsilon_{kl}^{dp}\right)$$

Les déformations plastiques du mécanisme plastique déviatoire sont données par le potentiel G^d :

$$\Delta\epsilon_{ij}^{dp} = \Delta\lambda^d\, G_{ij}^d$$

On en déduit que le système non linéaire à résoudre est composé de :

- LE_{ij} : la loi état élastique : $\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^- - D_{ijkl}\left(\sigma^+\right)\left(\Delta\epsilon_{kl} - \Delta\lambda^d\, G_{kl}^d\left(\sigma^+,\, R^+, \boldsymbol{X}^+\right)\right) = 0$
- LR : la loi d'écrouissage de la variable R : $R^+ - R^- - \Delta^d\, G^R\left(\sigma^+,\, R^+\right) = 0$
- LX_{ij} : la loi d'écrouissage de la variable X_{ij} : $X_{ij}^+ - X_{ij}^- - \Delta\lambda^d\, G^X\left(\sigma^+, \boldsymbol{X}^+\right) = 0$
- FD : l'équation de la surface de charge déviatoire : $q_{II}^+\, h\left(\theta_q^+\right) + R^+\left(I_1^+ + Q_{init}\right) = 0$

Comme au paragraphe précédant on résout par la méthode de Newton le système $R\left(Y\right) = 0$, où l'inconnue Y est donnée par $Y = \left(\sigma_{ij}^+,\, R^+,\, X_{ij}^+,\, \Delta\lambda^d\right)$ et où $R = \left(LE_{ij},\, LR,\, LX_{ij},\, FD\right)$.

4.4.1 Initialisation et solution d'essai

À partir de l'état à l'instant t $\left(\sigma_{ij}^-,\, R^-,\, X_{ij}^-\right)$, nous cherchons une solution d'essai qui nous rapproche de la solution finale. Pour cela nous résolvons l'équation suivante :

$$f^d\left(\sigma_{ij}^- + D_{ijkl}^-\left(\Delta\epsilon_{kl} - \Delta\lambda^d\, G_{kl}^{d-}\right),\, R^- + \Delta\lambda^d\, G^{R-},\, X_{ij}^- + \Delta\lambda^d\, G_{ij}^{X-}\right) = 0$$

avec $D_{ijkl}^- = D_{ijkl}\left(\sigma^-\right)$, $G_{kl}^{d-} = G_{kl}^d\left(\sigma^-,\, R^-, \boldsymbol{X}^-\right)$, $G^{R-} = G^R\left(\sigma^-,\, R^-\right)$, $G_{ij}^{X-} = G_{ij}^X\left(\sigma^-, \boldsymbol{X}^-\right)$ et où l'inconnue est le multiplicateur plastique $\Delta\lambda^d$,par une seule itération de Newton, c'est-à-dire finalement de nous avons :

$$\frac{\partial f^d}{\partial \Delta\lambda^d}_{|\Delta\lambda^d = 0} \Delta\lambda^d = -f^d_{|\Delta\lambda^d = 0} \quad \text{soit encore} \quad \Delta\lambda^d = -\frac{f^d_{|\Delta\lambda^d = 0}}{\frac{\partial f^d}{\partial \Delta\lambda^d}_{|\Delta\lambda^d = 0}}$$

avec :

$$\frac{\partial f^d}{\partial \Delta\lambda^d} = h\left(\theta_q\right)\frac{\partial q_{II}}{\partial \Delta\lambda^d} + q_{II}\frac{\partial h\left(\theta_q\right)}{\partial \Delta\lambda^d} + \left(I_1 + Q_{init}\right)\frac{\partial R}{\partial \Delta\lambda^d} + R\frac{\partial I_1}{\partial \Delta\lambda^d}$$

En outre,

on a : $I_1 = I_1^- + 3\, K^-\left(tr\left(\Delta\epsilon\right) - \Delta\lambda^d\, tr\left(\boldsymbol{G}^{d-}\right)\right)$ alors : $\frac{\partial I_1}{\partial \Delta\lambda^d} = -3\, K^-\, tr\left(\boldsymbol{G}^{d-}\right)$

on a : $R = R^- + \Delta\lambda^d\, G^{R-}$ alors : $\frac{\partial R}{\partial \Delta\lambda^d} = G^{R-}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

on a :

$$q_{ij}=\sigma^{-}_{ij}+D^{-}_{ijkl}\left(\Delta\ \varepsilon_{kl}-\Delta\ \lambda^{d}\ G^{d-}_{kl}\right)-\left[I^{-}_{1}+3\ K^{-}\left(tr\left(\Delta\ \varepsilon\right)-\Delta\ \lambda^{d}\ tr\left(G^{d-}\right)\right)\right]\left[\frac{1}{3}\ \delta_{ij}+X^{-}_{ij}+\Delta\ \lambda^{d}\ G^{X-}_{ij}\right]$$

alors : $\left.\frac{\partial q_{ij}}{\partial\ \Delta\ \lambda^{d}}\right|_{\Delta\ \lambda^{d}=0}=-D^{-}_{ijkl}\ G^{d-}_{kl}+3\ K^{-}\ tr\left(G^{d-}\right)\left(\frac{1}{3}\ \delta_{ij}+X^{-}_{ij}\right)-G^{X-}_{ij}\left(I^{-}_{1}+3\ K^{-}\ tr\left(\Delta\ \boldsymbol{\varepsilon}\right)\right)$

on a : $\frac{\partial q_{II}}{\partial\ \Delta\ \lambda^{d}}=\frac{\partial q_{II}}{\partial q_{ij}}\ \frac{\partial q_{ij}}{\partial\ \Delta\ \lambda^{d}}=\frac{q_{ij}}{q_{II}}\ \frac{\partial q_{ij}}{\partial\ \Delta\ \lambda^{d}}$ et $\frac{\partial h\left(\theta_{q}\right)}{\partial\ \Delta\ \lambda^{d}}=\frac{\partial h\left(\theta_{q}\right)}{\partial q_{ij}}\ \frac{\partial q_{ij}}{\partial\ \Delta\ \lambda^{d}}$

En définitive, nous prenons pour le solution d'essai : $Y^{0}=\left(\sigma^{0}_{ij},\ R^{0},\ X^{0}_{ij},\ \Delta\ \lambda^{d0}\right)$, avec les valeurs suivantes :

$\Delta\ \lambda^{d0}$: la valeur trouvée d'après la formulation précédente.
$\sigma^{0}_{ij}=\sigma^{-}_{ij}+D^{-}_{ijkl}\left(\Delta\ \varepsilon_{kl}-\Delta\ \lambda^{d0}\ G^{d-}_{kl}\right)$
$R^{0}=R^{-}+\Delta\ \lambda^{d0}\ G^{R-}$
$X^{0}_{ij}=X^{-}_{ij}+\Delta\ \lambda^{d0}\ G^{X-}_{ij}$

4.4.2 Itérations de Newton

$\frac{DR}{DY}$ est ici donné par :

$$\frac{DR}{DY}=\begin{bmatrix}\frac{\partial LE_{ij}}{\partial\sigma_{kl}} & \frac{\partial LE_{ij}}{\partial R} & \frac{\partial LE_{ij}}{\partial X_{ij}} & \frac{\partial LE_{ij}}{\partial\ \Delta\ \lambda^{d}}\\ \frac{\partial LR}{\partial\sigma_{kl}} & \frac{\partial LR}{\partial R} & \frac{\partial LR}{\partial X_{ij}} & \frac{\partial LR}{\partial\ \Delta\ \lambda^{d}}\\ \frac{\partial LX_{ij}}{\partial\sigma_{kl}} & \frac{\partial LX_{ij}}{\partial R} & \frac{\partial LX_{ij}}{\partial X_{ij}} & \frac{\partial LX_{ij}}{\partial\ \Delta\ \lambda^{d}}\\ \frac{\partial FD}{\partial\sigma_{kl}} & \frac{\partial FD}{\partial R} & \frac{\partial FD}{\partial X_{ij}} & \frac{\partial FD}{\partial\ \Delta\ \lambda^{d}}\end{bmatrix}$$

avec :

$$\frac{\partial LE_{ij}}{\partial\sigma_{kl}}=\delta_{ik}\ \delta_{jl}-D^{lineaire}_{ijmn}\left(\Delta\ \varepsilon_{mn}-\Delta\ \lambda^{d}\ G^{d}_{mn}\right)\frac{n}{3\ P_{a}}\left(\frac{I_{1}+Q_{init}}{3\ P_{a}}\right)^{n-1}\delta_{kl}+D_{ijmn}\ \Delta\ \lambda^{d}\ \frac{\partial G^{d}_{mn}}{\partial\sigma_{kl}}$$

$$\frac{\partial LE_{ij}}{\partial R}=D_{ijmn}\ \Delta\ \lambda^{d}\ \frac{\partial G^{d}_{mn}}{\partial R}$$

$$\frac{\partial LE_{ij}}{\partial X_{kl}}=D_{ijmn}\ \Delta\ \lambda^{d}\ \frac{\partial G^{d}_{mn}}{\partial X_{kl}}$$

$$\frac{\partial LE_{ij}}{\partial\ \Delta\ \lambda^{d}}=D_{ijmn}\ G^{d}_{mn}$$

$$\frac{\partial LR}{\partial\sigma_{kl}}=-\Delta\ \lambda^{d}\ \frac{\partial G^{R}}{\partial\sigma_{kl}}=-\Delta\ \lambda^{d}\ \frac{A}{2}\left(1-\frac{R}{R_{m}}\right)^{2}\left(\frac{I_{1}+Q_{init}}{3\ P_{a}}\right)^{-1,5}\delta_{kl}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\partial' LR}{\partial' R}=1-\Delta\ \lambda^d\ \frac{\partial' G^R}{\partial' R}=1-\Delta\ \lambda^d\ \frac{2\ A}{R_m}\left(1-\frac{R}{R_m}\right)\left(I_1+Q_{init}\right)\left(\frac{I_1+Q_{init}}{3\ P_a}\right)^{-1,5}$$

$$\frac{\partial LR}{\partial X_{kl}}=0$$

$$\frac{\partial LR}{\partial \Delta\ \lambda^d}=-G^R$$

$$\frac{\partial LX_{ij}}{\partial \sigma_{\ kl}}=-\Delta\ \lambda^d\ \frac{\partial G_{ij}^X}{\partial \sigma_{\ kl}}$$

$$\frac{\partial LX_{ij}}{\partial R}=0$$

$$\frac{\partial LX_{ij}}{\partial X_{kl}}=\delta_{\ ik}\ \delta_{\ jl}-\Delta\ \lambda^d\ \frac{\partial G_{ij}^X}{\partial X_{kl}}$$

$$\frac{\partial LX_{ij}}{\partial \Delta\ \lambda^d}=-G_{ij}^X$$

$$\frac{\partial FD}{\partial \sigma_{\ kl}}=\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{\ kl}}=Q_{kl}-\left(Q_{mn}\ X_{mn}-R\right)\ \delta_{\ kl}$$

$$\frac{\partial FD}{\partial R}=I_1$$

$$\frac{\partial FD}{\partial X_{kl}}=\frac{\partial f^d}{\partial X_{kl}}$$

$$\frac{\partial FD}{\partial \Delta\ \lambda^d}=0$$

Par ailleurs, le calcul des termes $\frac{\partial G_{mn}^d}{\partial \sigma_{\ kl}}$, $\frac{\partial G_{mn}^d}{\partial R}$, $\frac{\partial G_{mn}^d}{\partial X_{kl}}$, $\frac{\partial G_{ij}^X}{\partial \sigma_{\ kl}}$, $\frac{\partial G_{ij}^X}{\partial X_{kl}}$ et $\frac{\partial f^d}{\partial X_{kl}}$ est détaillé ci-après, ainsi que le calcul de termes intermédiaires utiles :

- calcul de $\frac{\partial f^d}{\partial X_{kl}}$:

$$\frac{\partial f^d}{\partial X_{kl}}=q_{II}\ \frac{\partial h\left(\theta_{\ q}\right)}{\partial X_{kl}}+h\left(\theta_{\ q}\right)\ \frac{\partial q_{II}}{\partial X_{kl}}$$

$$=q_{II}\ \frac{\partial h\left(\theta_{\ q}\right)}{\partial q_{mn}}\ \frac{\partial q_{mn}}{\partial X_{kl}}+h\left(\theta_{\ q}\right)\ \frac{\partial q_{II}}{\partial q_{mn}}\ \frac{\partial q_{mn}}{\partial X_{kl}}$$

$$=q_{II}\ \frac{\partial h\left(\theta_{\ q}\right)}{\partial q_{mn}}\ \frac{\partial q_{mn}}{\partial X_{kl}}+h\left(\theta_{\ q}\right)\ \frac{q_{mn}}{q_{II}}\ \frac{\partial q_{mn}}{\partial X_{kl}}$$

$$=\left(q_{II}\ \frac{\partial h\left(\theta_{\ q}\right)}{\partial q_{mn}}+h\left(\theta_{\ q}\right)\ \frac{q_{mn}}{q_{II}}\right)\ \frac{\partial q_{mn}}{\partial X_{kl}}$$

$$=-I_1\left(q_{II}\ \frac{\partial h\left(\theta_{\ q}\right)}{\partial q_{mn}}+h\left(\theta_{\ q}\right)\ \frac{q_{mn}}{q_{II}}\right)\ \delta_{\ mk}\ \delta_{\ nl}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$=-I_1\left(\frac{\partial f^d}{\partial q_{kl}}\right)$$

On remarquera pour la suite que :

$$dev\left(\frac{\partial f^d}{\partial X_{kl}}\right)=-I_1\ Q_{kl}$$

- calcul de $\frac{\partial\left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}\right)}{\partial \sigma_{kl}}$:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}\right)}{\partial \sigma_{kl}}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}\right)}{\partial q_{mn}}\frac{\partial q_{mn}}{\partial \sigma_{kl}}$$

$$=\left(\frac{\partial\left(Q_{ij}-\left(Q_{rs}\ X_{rs}-R\right)\delta_{ij}\right)}{\partial q_{mn}}\right)\frac{\partial q_{mn}}{\partial \sigma_{kl}}$$

$$=\left(\frac{\partial Q_{ij}}{\partial q_{mn}}-\left(\frac{\partial Q_{rs}}{\partial q_{mn}}\ X_{rs}\right)\delta_{ij}\right)\frac{\partial q_{mn}}{\partial \sigma_{kl}}$$

$$=\left(\frac{\partial Q_{ij}}{\partial q_{mn}}-\left(\frac{\partial Q_{rs}}{\partial q_{mn}}\ X_{rs}\right)\delta_{ij}\right)\left(\delta_{mk}\,\delta_{nl}-\delta_{kl}\left(\frac{\delta_{mn}}{3}+X_{mn}\right)\right)$$

- calcul de $\frac{\partial Q_{ij}}{\partial q_{mn}}$:

Au préalable, on défini le tenseur t et sa partie déviatoire t^d en posant :

$$t_{ij}=\frac{\partial \det(q)}{\partial q_{ij}}\ \text{ et }\ t_{ij}^d=dev\left(\frac{\partial \det(q)}{\partial q_{ij}}\right)$$

On a ainsi :

$$t=\begin{bmatrix}t_{11}\\t_{22}\\t_{33}\\t_{12}\\t_{13}\\t_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_{22}\ q_{33}-q_{23}\ q_{23}\\q_{11}\ q_{33}-q_{13}\ q_{13}\\q_{11}\ q_{22}-q_{12}\ q_{12}\\q_{13}\ q_{23}-q_{12}\ q_{33}\\q_{12}\ q_{23}-q_{13}\ q_{22}\\q_{12}\ q_{13}-q_{23}\ q_{11}\end{bmatrix}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial q_{mn}}=\frac{-5}{h\left(\theta_q\right)^6}\left[\left(1+\frac{\gamma}{2}\cos\left(3\theta_q\right)\right)\frac{q_{ij}}{q_{II}}+\frac{\gamma\sqrt{54}}{6\,q_{II}^2}dev\left(t_{ij}\right)\right]\frac{\partial\left(h\left(\theta_q\right)\right)}{\partial q_{mn}}$$

$$+\frac{1}{h\left(\theta_q\right)^5}\left(1+\frac{\gamma}{2}\cos\left(3\theta_q\right)\right)\frac{\partial\left(\frac{q_{ij}}{q_{II}}\right)}{\partial q_{mn}}+\frac{1}{h\left(\theta_q\right)^5}\frac{\gamma}{2}\frac{q_{ij}}{q_{II}}\frac{\partial\cos\left(3\theta_q\right)}{\partial q_{mn}}+\frac{1}{h\left(\theta_q\right)^5}\frac{\sqrt{54}\,\gamma}{6}\frac{\partial\left(\frac{t_{ij}^d}{q_{II}^2}\right)}{\partial q_{mn}}$$

$$=\frac{-5}{h\left(\theta_q\right)^6}\left[\left(1+\frac{\gamma}{2}\cos\left(3\theta_q\right)\right)\frac{q_{ij}}{q_{II}}+\frac{\gamma\sqrt{54}}{6\,q_{II}^2}dev\left(t_{ij}\right)\right]\frac{\partial\left(h\left(\theta_q\right)\right)}{\partial q_{mn}}+\frac{1}{h\left(\theta_q\right)^5}\left(1+\frac{\gamma}{2}\cos\left(3\theta_q\right)\right)\left(\frac{\delta_{im}\delta_{jn}}{q_{II}}-\frac{q_{ij}q_{mn}}{q_{II}^3}\right)$$

$$+\frac{1}{h\left(\theta_q\right)^5}\frac{\gamma}{2}\frac{q_{ij}\sqrt{54}}{q_{II}^4}\left(t_{mn}-3\frac{\det q}{q_{II}^2}q_{mn}\right)+\frac{1}{h\left(\theta_q\right)^5}\frac{\gamma}{6}\frac{\sqrt{54}}{q_{II}^2}\left(\frac{\partial t_{ij}^d}{\partial q_{mn}}-2t_{ij}^d\frac{q_{mn}}{q_{II}^2}\right)$$

L'expression de $\frac{\partial t_{ij}^d}{\partial q_{mn}}$ s'explicite comme suit :

$$\frac{\partial t^d}{\partial q_{11}}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\left(q_{22}+q_{33}\right)\\ \frac{1}{3}\left(-q_{22}+2\,q_{33}\right)\\ \frac{1}{3}\left(2\,q_{22}-q_{33}\right)\\ 0\\ 0\\ -q_{23}\end{bmatrix},\quad \frac{\partial t^d}{\partial q_{22}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\left(-q_{11}+2\,q_{33}\right)\\ -\frac{1}{3}\left(q_{11}+q_{33}\right)\\ \frac{1}{3}\left(2\,q_{11}-q_{33}\right)\\ 0\\ -q_{13}\\ 0\end{bmatrix},\quad \frac{\partial t^d}{\partial q_{33}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\left(-q_{11}+2\,q_{22}\right)\\ \frac{1}{3}\left(2\,q_{11}-q_{22}\right)\\ -\frac{1}{3}\left(q_{11}+q_{22}\right)\\ -q_{12}\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial t^d}{\partial q_{12}}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\,q_{12}\\ \frac{2}{3}\,q_{12}\\ -\frac{4}{3}\,q_{12}\\ -q_{33}\\ q_{23}\\ q_{13}\end{bmatrix},\quad \frac{\partial t^d}{\partial q_{13}}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\,q_{13}\\ -\frac{4}{3}\,q_{13}\\ \frac{2}{3}\,q_{13}\\ q_{23}\\ -q_{22}\\ q_{12}\end{bmatrix},\quad \frac{\partial t^d}{\partial q_{23}}=\begin{bmatrix}-\frac{4}{3}\,q_{23}\\ \frac{2}{3}\,q_{23}\\ \frac{2}{3}\,q_{23}\\ q_{13}\\ q_{12}\\ -q_{11}\end{bmatrix}$$

- calcul de $\frac{\partial G_{mn}^d}{\partial \sigma_{kl}}$:

  On a :

$$\frac{\partial G_{mn}^d}{\partial \sigma_{kl}}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{mn}}\right)}{\partial \sigma_{kl}}-\left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{rs}}n_{rs}\right)\frac{\partial n_{mn}}{\partial \sigma_{kl}}-\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{rs}}\right)}{\partial \sigma_{kl}}n_{rs}+\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{rs}}\frac{\partial n_{rs}}{\partial \sigma_{kl}}\right)n_{mn}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On défini le tenseur $\tilde{\boldsymbol{n}}$ par $\tilde{n}_{ij}=\beta' \frac{s_{ij}}{s_{II}}+\delta_{ij}$

c'est à dire que $\boldsymbol{n}$ est alors donné par $n_{ij}=\frac{\tilde{n}_{ij}}{\tilde{n}_{II}}$ avec $\tilde{n}_{II}=\sqrt{\beta'^2+3}$

Dans la pratique, pour le calcul de β', on utilise $\Delta\varepsilon_{ij}$ à la place de $\Delta\varepsilon_{ij}^{dp}$, c'est-à-dire que l'on a :

$$\beta'=\beta\left(\frac{s_{II}}{s_{II}^c}-1\right) signe\left(s_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}\right)$$

On a alors pour $\frac{\partial G_{mn}^d}{\partial\sigma_{kl}}$:

$$\frac{\partial G_{mn}^d}{\partial\sigma_{kl}}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f^d}{\partial\sigma_{mn}}\right)}{\partial\sigma_{kl}}-\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial f^d}{\partial\sigma_{rs}}\right)}{\partial\sigma_{kl}}n_{rs}\right)n_{mn}-\left(\frac{\partial f^d}{\partial\sigma_{rs}}\frac{\partial\tilde{n}_{rs}}{\partial\sigma_{kl}}\right)\frac{\tilde{n}_{mn}}{\tilde{n}_{II}^2}-\left(\frac{\partial f^d}{\partial\sigma_{rs}}\tilde{n}_{rs}\right)\frac{\partial\tilde{n}_{mn}}{\partial\sigma_{kl}}\frac{1}{\tilde{n}_{II}^2}-\left(\frac{\partial f^d}{\partial\sigma_{rs}}\tilde{n}_{rs}\right)\tilde{n}_{mn}\frac{\partial\left(\frac{1}{\tilde{n}_{II}^2}\right)}{\partial\sigma_{kl}}$$

avec :

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\tilde{n}_{II}^2}\right)}{\partial\sigma_{kl}}=\frac{\partial\left(\frac{1}{\left(\beta'^2+3\right)}\right)}{\partial\sigma_{kl}}=-\frac{1}{\left(\beta'^2+3\right)^2}\frac{\partial\left(\beta'^2\right)}{\partial\sigma_{kl}}=-\frac{2\beta'^2\left(\frac{s_{II}}{s_{II}^c}-1\right)}{\left(\beta'^2+3\right)^2}\frac{\partial\left(\frac{s_{II}}{s_{II}^c}\right)}{\partial\sigma_{kl}}$$

- calcul de $\frac{\partial\left(\frac{s_{II}}{s_{II}^c}\right)}{\partial\sigma_{kl}}$:

$$\frac{\partial\left(\frac{s_{II}}{s_{II}^c}\right)}{\partial\sigma_{kl}}=\frac{1}{s_{II}^c}\frac{\partial\left(s_{II}\right)}{\partial\sigma_{kl}}-\frac{s_{II}}{s_{II}^{c^2}}\frac{\partial\left(s_{II}^c\right)}{\partial\sigma_{kl}}$$

$$=\frac{1}{s_{II}^c}\frac{\partial\left(s_{II}\right)}{\partial s_{mn}}\frac{\partial s_{mn}}{\partial\sigma_{kl}}-\frac{s_{II}}{s_{II}^{c^2}}\frac{\partial\left(-\frac{R_c\left(I_1+Q_{init}\right)}{h\left(\theta_s\right)}\right)}{\partial\sigma_{kl}}$$

$$=\frac{1}{s_{II}^c}\frac{s_{mn}}{s_{II}}\left(\delta_{mk}\delta_{nl}-\frac{1}{3}\delta_{mn}\delta_{kl}\right)-\frac{s_{II}}{s_{II}^{c^2}}\left(-\frac{R_c}{h\left(\theta_s\right)}\frac{\partial I_1}{\partial\sigma_{kl}}+\frac{R_c\left(I_1+Q_{init}\right)}{h\left(\theta_s\right)^2}\frac{\partial h\left(\theta_s\right)}{\partial\sigma_{kl}}\right)$$

$$=\frac{1}{s_{II}^c}\frac{s_{mn}}{s_{II}}\left(\delta_{mk}\delta_{nl}-\frac{1}{3}\delta_{mn}\delta_{kl}\right)-\frac{s_{II}}{s_{II}^{c^2}}\left(-\frac{R_c}{h\left(\theta_s\right)}\delta_{kl}+\frac{R_c\left(I_1+Q_{init}\right)}{h\left(\theta_s\right)^2}\frac{\partial h\left(\theta_s\right)}{\partial s_{rs}}\frac{\partial s_{rs}}{\partial\sigma_{kl}}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- calcul de $\frac{\partial \tilde{n}_{mn}}{\partial \sigma_{kl}}$:

$$\frac{\partial \tilde{n}_{mn}}{\partial \sigma_{kl}} = \beta \left(\frac{1}{s_{II}^{c}} - \frac{1}{s_{II}}\right) signe\left(s_{ij}\ \Delta\varepsilon_{ij}\right) \frac{\partial s_{mn}}{\partial \sigma_{kl}} + \beta\ signe\left(s_{ij}\ \Delta\varepsilon_{ij}\right)\ s_{mn} \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{s_{II}^{c}}\right)}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial\left(\frac{1}{s_{II}}\right)}{\partial \sigma_{kl}}\right)$$

$$= \beta \left(\frac{1}{s_{II}^{c}} - \frac{1}{s_{II}}\right) signe\left(s_{ij}\ \Delta\varepsilon_{ij}\right) \left(\delta_{mk}\ \delta_{nl} - \frac{1}{3}\ \delta_{mn}\ \delta_{kl}\right) + \beta\ signe\left(s_{ij}\ \Delta\varepsilon_{ij}\right)\ s_{mn} \left(\frac{1}{s_{II}^{2}} \frac{\partial\left(s_{II}\right)}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{1}{s_{II}^{c^2}} \frac{\partial s_{II}^{c}}{\partial \sigma_{kl}}\right)$$

- calcul de $\frac{\partial G_{mn}^{d}}{\partial R}$:

$$\frac{\partial G_{mn}^{d}}{\partial R} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f^{d}}{\partial \sigma_{mn}}\right)}{\partial R} - \left(\frac{\partial f^{d}}{\partial \sigma_{rs}}\ n_{rs}\right) \frac{\partial n_{mn}}{\partial R} - \left(\frac{\partial\left(\frac{\partial f^{d}}{\partial \sigma_{rs}}\right)}{\partial R}\ n_{rs} + \frac{\partial f^{d}}{\partial \sigma_{rs}} \frac{\partial n_{rs}}{\partial R}\right) n_{mn}$$

$$= \frac{\partial\left(\frac{\partial f^{d}}{\partial \sigma_{mn}}\right)}{\partial R} - \left(\frac{\partial\left(\frac{\partial f^{d}}{\partial \sigma_{rs}}\right)}{\partial R}\ n_{rs}\right) n_{mn}$$

$$= \delta_{mn} - \left(\delta_{rs}\ n_{rs}\right) n_{mn}$$

$$= \frac{\beta'^{2}\ \delta_{mn} - 3\ \beta'\ \frac{s_{mn}}{s_{II}}}{\beta'^{2} + 3}$$

- calcul de $\frac{\partial G_{mn}^{d}}{\partial X_{kl}}$:

$$\frac{\partial G_{mn}^{d}}{\partial X_{kl}} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f^{d}}{\partial \sigma_{mn}}\right)}{\partial X_{kl}} - \left(\frac{\partial f^{d}}{\partial \sigma_{rs}}\ n_{rs}\right) \frac{\partial n_{mn}}{\partial X_{kl}} - \left(\frac{\partial\left(\frac{\partial f^{d}}{\partial \sigma_{rs}}\right)}{\partial X_{kl}}\ n_{rs} + \frac{\partial f^{d}}{\partial \sigma_{rs}} \frac{\partial n_{rs}}{\partial X_{kl}}\right) n_{mn}$$

$$= \frac{\partial\left(\frac{\partial f^{d}}{\partial \sigma_{mn}}\right)}{\partial X_{kl}} - \left(\frac{\partial\left(\frac{\partial f^{d}}{\partial \sigma_{rs}}\right)}{\partial X_{kl}}\ n_{rs}\right) n_{mn}$$

- calcul de $\frac{\partial\left(\frac{\partial f^{d}}{\partial \sigma_{mn}}\right)}{\partial X_{kl}}$:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f^{d}}{\partial \sigma_{mn}}\right)}{\partial X_{kl}} = \frac{\partial Q_{mn}}{\partial X_{kl}} - \left(\frac{\partial Q_{rs}}{\partial X_{kl}}\ X_{rs} + Q_{rs} \frac{\partial X_{rs}}{\partial X_{kl}}\right) \delta_{mn}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$= \frac{\partial Q_{mn}}{\partial q_{ij}} \frac{\partial q_{ij}}{\partial X_{kl}} - \left(\left(\frac{\partial Q_{rs}}{\partial q_{ij}} \frac{\partial q_{ij}}{\partial X_{kl}} \right) X_{rs} + Q_{rs} \delta_{kr} \delta_{ls} \right) \delta_{mn}$$

$$= -I_1 \frac{\partial Q_{mn}}{\partial q_{ij}} \delta_{ik} \delta_{jl} - \left(\left(-I_1 \frac{\partial Q_{rs}}{\partial q_{ij}} \delta_{ik} \delta_{jl} \right) X_{rs} + Q_{rs} \delta_{kr} \delta_{ls} \right) \delta_{mn}$$

- calcul de $\frac{\partial G_{ij}^X}{\partial \sigma_{kl}}$:

$$\frac{\partial G_{ij}^X}{\partial \sigma_{kl}} = -\frac{1}{2\,b} \left(Q_{ij} + \varphi\, X_{ij} \right) \left(\frac{I_1 + Q_{init}}{3\, P_a} \right)^{-1,5} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{1}{b} \left(\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{kl}} X_{ij} \right) \left(I_1 + Q_{init} \right) \left(\frac{I_1 + Q_{init}}{3\, P_a} \right)^{-1,5}$$

$$= -\frac{1}{2\,b} \left(Q_{ij} + \varphi\, X_{ij} \right) \left(\frac{I_1 + Q_{init}}{3\, P_a} \right)^{-1,5} \delta_{kl} + \frac{1}{b} \frac{\partial Q_{ij}}{\partial q_{mn}} \frac{\partial q_{mn}}{\partial \sigma_{kl}} \left(I_1 + Q_{init} \right) \left(\frac{I_1 + Q_{init}}{3\, P_a} \right)^{-1,5}$$

$$+ \frac{1}{b} \left(h(\theta_s)\, Q_{II} \frac{\partial \varphi_o}{\partial \sigma_{kl}} + \varphi_o\, Q_{II} \frac{\partial h(\theta_s)}{\partial \sigma_{kl}} + \varphi_o\, h(\theta_s) \frac{\partial Q_{II}}{\partial \sigma_{kl}} \right) X_{ij} \left(I_1 + Q_{init} \right) \left(\frac{I_1 + Q_{init}}{3\, P_a} \right)^{-1,5}$$

- calcul de $\frac{\partial h(\theta_s)}{\partial \sigma_{kl}}$:

$$\frac{\partial h(\theta_s)}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial h(\theta_s)}{\partial s_{mn}} \frac{\partial s_{mn}}{\partial \sigma_{kl}}$$

$$= \left(\frac{\gamma\ \sqrt{54}}{6\, h(\theta_s)^5 q_{II}^3} t_{mn} - \frac{\gamma\ \cos(3\,\theta_q)}{2 h(\theta_s)^5 q_{II}^2} s_{mn} \right) \left(\delta_{mk} \delta_{nl} - \frac{1}{3} \delta_{mn} \delta_{kl} \right)$$

- calcul de $\frac{\partial Q_{II}}{\partial \sigma_{kl}}$:

$$\frac{\partial Q_{II}}{\partial \sigma_{kl}} = \left(\frac{\partial Q_{II}}{\partial Q_{rs}} \frac{\partial Q_{rs}}{\partial q_{mn}} \right) \frac{\partial q_{mn}}{\partial \sigma_{kl}}$$

$$= \left(\frac{Q_{rs}}{Q_{II}} \frac{\partial Q_{rs}}{\partial q_{mn}} \right) \left(\delta_{mk} \delta_{nl} - \delta_{mn} \left(\frac{1}{3} \delta_{kl} + X_{kl} \right) \right)$$

- calcul de $\frac{\partial \varphi_o}{\partial \sigma_{kl}}$:

$$\frac{\partial \varphi_o}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{1}{R_r - \frac{h(\theta_s)}{h(\theta_q)} R_m \cos(\theta_s - \theta_q)} \frac{\partial \cos\alpha}{\partial \sigma_{kl}}$$

$$- \cos\alpha \frac{\left[\frac{\partial R_r}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{1}{h(\theta_q)} R_m \cos(\theta_s - \theta_q) \frac{\partial h(\theta_s)}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{h(\theta_s)}{h(\theta_q)^2} R_m \cos(\theta_s - \theta_q) \frac{\partial h(\theta_s)}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{h(\theta_s)}{h(\theta_q)} R_m \frac{\partial \cos(\theta_s - \theta_q)}{\partial \sigma_{kl}} \right]}{\left[R_r - \frac{h(\theta_s)}{h(\theta_q)} R_m \cos(\theta_s - \theta_q) \right]^2}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

avec :

$$\frac{\partial \cos\alpha}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{1}{2\ s_{II}\ I_1\ X_{II}} \left(2\ q_{II} \frac{\partial q_{II}}{\partial \sigma_{kl}} - 2\ I_1\ X_{II}^2 \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{kl}} - 2\ s_{II} \frac{\partial s_{II}}{\partial \sigma_{kl}} \right)$$

$$- \frac{q_{II}^2 - \left(I_1\ X_{II}\right)^2 - s_{II}^2}{s_{II}\ I_1\ X_{II}} \left(s_{II}\ X_{II} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{kl}} + I_1\ X_{II} \frac{\partial s_{II}}{\partial \sigma_{kl}} \right)$$

$$= \frac{1}{s_{II}\ I_1\ X_{II}} \left[\left(q_{kl} - I_1\ X_{II}^2\ \delta_{\ kl} - s_{kl} \right) - \left(q_{II}^2 - \left(I_1\ X_{II} \right)^2 - s_{II}^2 \right) \left(s_{II}\ X_{II}\ \delta_{\ kl} + I_1\ X_{II} \frac{s_{kl}}{s_{II}} \right) \right]$$

$$\frac{\partial R_r}{\partial \sigma_{\ kl}} = - \frac{\mu}{I_1 + Q_{init}}\ \delta_{\ kl}$$

$$\frac{\partial \cos\left(\theta_{\ s} - \theta_{\ q}\right)}{\partial \sigma_{\ kl}} = - \sin\left(\theta_{\ s} - \theta_{\ q}\right) \left(\frac{\partial \theta_{\ s}}{\partial \sigma_{\ kl}} - \frac{\partial \theta_{\ q}}{\partial \sigma_{\ kl}} \right)$$

- calcul de $\frac{\partial G_{ij}^X}{\partial X_{kl}}$:

$$\frac{\partial G_{ij}^X}{\partial X_{kl}} = \frac{1}{b} \left(\frac{\partial Q_{ij}}{\partial X_{kl}} + \varphi\ \ \frac{\partial X_{ij}}{\partial X_{kl}} \right) \left(I_1 + Q_{init} \right) \left(\frac{I_1 + Q_{init}}{3\ P_a} \right)^{-1,5}$$

$$= \frac{1}{b} \left(\frac{\partial Q_{ij}}{\partial q_{mn}} \frac{\partial q_{mn}}{\partial X_{kl}} + \varphi\ \ \delta_{\ ik}\ \delta_{\ jl} \right) \left(I_1 + Q_{init} \right) \left(\frac{I_1 + Q_{init}}{3\ P_a} \right)^{-1,5}$$

$$= \frac{1}{b} \left(- I_1\ \frac{\partial Q_{ij}}{\partial q_{mn}} \delta_{\ mk}\ \delta_{\ nl} + \varphi\ \ \delta_{\ ik}\ \delta_{\ jl} \right) \left(I_1 + Q_{init} \right) \left(\frac{I_1 + Q_{init}}{3\ P_a} \right)^{-1,5}$$

4.4.3 Test de convergence

Le critère de convergence reste $\frac{\|DY^{p+1}\|}{\|Y^{p+1} - Y^0\|}$ RESI_INTE_RELA.

4.5 Intégration des mécanismes élastique non linéaire, plastique isotrope et plastique déviatoire

Dans ce cas, le nouvel état de contrainte σ^{+}, vérifie :

$$\sigma_{\ ij}^{+} = \sigma_{\ ij}^{-} + D_{ijkl}\left(\sigma^{+}\right) \left(\Delta\ \varepsilon_{kl} - \Delta\ \varepsilon_{kl}^{ip} - \Delta\ \varepsilon_{kl}^{dp} \right)$$

Compte tenu de ce qui précède, on en déduit que le système non linéaire à résoudre est composé de :

- LE_{ij} : la loi état élastique :
$$\sigma_{\ ij}^{+} - \sigma_{\ ij}^{-} - D_{ijkl}\left(\sigma^{+}\right) \left(\Delta\ \varepsilon_{kl} + \frac{1}{3}\ \Delta\ \lambda^i\ \delta_{\ kl} - \Delta\ \lambda^d\ G_{kl}^d\left(\sigma^{+},\ R^{+},\ \boldsymbol{X}^{+}\right) \right) = 0$$
- LQ : la loi d'écrouissage de la variable interne Q_{iso} : $Q_{iso}^{+} - Q_{iso}^{-} - D\ \lambda^i\ G^{Q_{iso}}\left(Q_{iso}^{+}\right) = 0$
- LR : la loi d'écrouissage de la variable R : $R^{+} - R^{-} - \Delta\ \lambda^d\ G^R\left(\sigma^{+},\ R^{+}\right) = 0$
- LX_{ij} : la loi d'écrouissage de la variable X_{ij} : $X_{ij}^{+} - X_{ij}^{-} - \Delta\ \lambda^d\ G_{ij}^X\left(\sigma^{+},\ \boldsymbol{X}^{+}\right) = 0$
- FI : l'équation de la surface de charge isotrope : $-\frac{I_1^{+} + Q_{init}}{3} + Q_{iso}^{+} = 0$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- FD : l'équation de la surface de charge déviatoire : $q_{II}^{+}\, h\left(\theta_{q}^{+}\right)+R^{+}\left(I_1^{+}+Q_{init}\right)=0$

Comme aux paragraphes précédents on résout par la méthode de Newton le système $R(Y)=0$, où l'inconnue Y est donnée par $Y=\left(\sigma_{ij}^{+},\ Q_{iso}^{+},\ R^{+},\ X_{ij}^{+},\ \Delta\lambda^{i},\ \Delta\lambda^{d}\right)$ et où $R=\left(LE_{ij},\ LQ,\ LR,\ LX_{ij},\ FI,\ FD\right)$.

4.5.1 Initialisation et solution d'essai

À partir de l'état à l'instant t $\left(\sigma_{ij}^{-},\ Q_{iso}^{-},\ R^{-},\ X_{ij}^{-}\right)$, nous cherchons une solution d'essai qui nous rapproche de la solution finale. Pour cela nous résolvons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} f^{i}\left(s_{ij}^{-}+D_{ijkl}^{+}\left(De_{kl}+\frac{1}{3}D\lambda^{i}d_{kl}-D\lambda^{d}G_{kl}^{d}\right),\ Q_{iso}^{-}+D\lambda^{i}G^{Q_{iso}-}\right)=0 \\ f^{d}\left(s_{ij}^{-}+D_{ijkl}^{+}\left(De_{kl}+\frac{1}{3}D\lambda^{i}d_{kl}-D\lambda^{d}G_{kl}^{d}\right),\ R^{-}+D\lambda^{d}G^{R-},\ X_{ij}^{-}+D\lambda^{d}G_{ij}^{X-}\right)=0 \end{cases}$$

avec :
$D_{ijkl}^{-}=D_{ijkl}\left(\sigma^{-}\right)$, $G_{kl}^{d-}=G_{kl}^{d}\left(\sigma^{-},\ R^{-},\boldsymbol{X}^{-}\right)$, $G^{Q_{iso}-}=G^{Q_{iso}}\left(Q_{iso}^{-}\right)$ $G^{R-}=G^{R}\left(\sigma^{-},\ R^{-}\right)$, $G_{ij}^{X-}=G_{ij}^{X}\left(\sigma^{-},\boldsymbol{X}^{-}\right)$ et où les inconnues sont les multiplicateurs plastiques $\Delta\lambda^{i}$ et $\Delta\lambda^{d}$, par une seule itération de Newton, c'est-à-dire finalement que nous avons :

$$\frac{\partial f^{i}}{\partial\Delta\lambda^{i}}_{|\Delta\lambda^{i}=0,\ \Delta\lambda^{d}=0}\Delta\lambda^{i}+\frac{\partial f^{i}}{\partial\Delta\lambda^{d}}_{|\Delta\lambda^{i}=0,\ \Delta\lambda^{d}=0}\Delta\lambda^{d}=-f^{i}{}_{|\Delta\lambda^{i}=0,\ \Delta\lambda^{d}=0}$$
$$\frac{\partial f^{d}}{\partial\Delta\lambda^{i}}_{|\Delta\lambda^{i}=0,\ \Delta\lambda^{d}=0}\Delta\lambda^{i}+\frac{\partial f^{d}}{\partial\Delta\lambda^{d}}_{|\Delta\lambda^{i}=0,\ \Delta\lambda^{d}=0}\Delta\lambda^{d}=-f^{d}{}_{|\Delta\lambda^{i}=0,\ \Delta\lambda^{d}=0}$$

soit encore :

$$\Delta\lambda^{i}=\frac{\frac{\partial f^{i}}{\partial\Delta\lambda^{d}}f^{d}-\frac{\partial f^{d}}{\partial\Delta\lambda^{d}}f^{i}}{\frac{\partial f^{i}}{\partial\Delta\lambda^{i}}\frac{\partial f^{d}}{\partial\Delta\lambda^{d}}-\frac{\partial f^{i}}{\partial\Delta\lambda^{d}}\frac{\partial f^{d}}{\partial\Delta\lambda^{i}}}\ \text{et}\ \Delta\lambda^{d}=\frac{\frac{\partial f^{d}}{\partial\Delta\lambda^{i}}f^{i}-\frac{\partial f^{i}}{\partial\Delta\lambda^{i}}f^{d}}{\frac{\partial f^{i}}{\partial\Delta\lambda^{i}}\frac{\partial f^{d}}{\partial\Delta\lambda^{d}}-\frac{\partial f^{i}}{\partial\Delta\lambda^{d}}\frac{\partial f^{d}}{\partial\Delta\lambda^{i}}}$$

avec :
$$\frac{\partial f^{i}}{\partial\Delta\lambda^{i}}=-\left(K^{-}+K^{p-}\right)$$
$$\frac{\partial f^{i}}{\partial\Delta\lambda^{d}}=K^{-}\,tr\left(G^{d-}\right)$$
$$\frac{\partial f^{d}}{\partial\Delta\lambda^{i}}=h\left(\theta_{q}\right)\frac{\partial q_{II}}{\partial\Delta\lambda^{i}}+q_{II}\frac{\partial h\left(\theta_{q}\right)}{\partial\Delta\lambda^{i}}+\left(I_1+Q_{init}\right)\frac{\partial R}{\partial\Delta\lambda^{i}}+R\frac{\partial I_1}{\partial\Delta\lambda^{i}}$$
$$\frac{\partial f^{d}}{\partial\Delta\lambda^{d}}=h\left(\theta_{q}\right)\frac{\partial q_{II}}{\partial\Delta\lambda^{d}}+q_{II}\frac{\partial h\left(\theta_{q}\right)}{\partial\Delta\lambda^{d}}+\left(I_1+Q_{init}\right)\frac{\partial R}{\partial\Delta\lambda^{d}}+R\frac{\partial I_1}{\partial\Delta\lambda^{d}}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On sait que $\frac{\partial f^d}{\partial \Delta \lambda^d}$ se calcule de la même façon que précédemment lorsque seul le mécanisme plastique déviatoire était activé. Par ailleurs, on a, pour le calcul de $\frac{\partial f^d}{\partial \Delta \lambda^i}$ et lorsque $\Delta \lambda^i=0$ et $\Delta \lambda^d=0$, les relations suivantes :

$$\frac{\partial q_{ij}}{\partial \Delta \lambda^i}=\frac{1}{3} D^-_{ijkl} \delta_{kl}-3 K^{e-}\left(\frac{1}{3}\delta_{ij}+X^-_{ij}\right)$$

$$\frac{\partial q_{II}}{\partial \Delta \lambda^i}=\frac{\partial q_{II}}{\partial q_{ij}}\frac{\partial q_{ij}}{\partial \Delta \lambda^i}=\frac{q_{ij}}{q_{II}}\left(\frac{1}{3} D^-_{ijkl}\delta_{kl}-3K^{e-}\left(\frac{1}{3}\delta_{ij}+X^-_{ij}\right)\right)$$

$$\frac{\partial h(\theta_q)}{\partial \Delta \lambda^i}=\frac{\partial h(\theta_q)}{\partial q_{ij}}\frac{\partial q_{ij}}{\partial \Delta \lambda^i}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Delta \lambda^i}=0$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \Delta \lambda^i}=3K^-$$

En définitive, nous prenons pour la solution d'essai : $Y^0=\left(\sigma^0_{ij}, Q^0_{iso}, R^0, X^0_{ij}, \Delta\lambda^{i0}, \Delta\lambda^{d0}\right)$, avec les valeurs suivantes :

$\Delta\lambda^{i0}$: la valeur trouvée d'après la formulation précédente.

$\Delta\lambda^{d0}$: la valeur trouvée d'après la formulation précédente.

$$\sigma^0_{ij}=\sigma^-_{ij}+D^-_{ijkl}\left(\Delta\varepsilon_{kl}+\frac{1}{3}\Delta\lambda^{i0}\delta_{kl}-\Delta\lambda^{d0}G^{d-}_{kl}\right)$$

$$Q^0_{iso}=Q^-_{iso}+\Delta\lambda^{i0}G^{Q_{iso}-}$$

$$R^0=R^-+\Delta\lambda^{d0}G^{R-}$$

$$X^0_{ij}=X^-_{ij}+\Delta\lambda^{d0}G^{X-}_{ij}$$

4.5.2 Itérations de Newton

$\frac{DR}{DY}$ est ici donné par :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{DR}{DY}=\begin{vmatrix} \frac{\partial LE_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} & \frac{\partial LE_{ij}}{\partial Q_{iso}} & \frac{\partial LE_{ij}}{\partial R} & \frac{\partial LE_{ij}}{\partial X_{kl}} & \frac{\partial LE_{ij}}{\partial \Delta\lambda^{i}} & \frac{\partial LE_{ij}}{\partial \Delta\lambda^{d}} \\ \frac{\partial LQ}{\partial \sigma_{kl}} & \frac{\partial LQ}{\partial Q_{iso}} & \frac{\partial LQ}{\partial R} & \frac{\partial LQ}{\partial X_{kl}} & \frac{\partial LQ}{\partial \Delta\lambda^{i}} & \frac{\partial LQ}{\partial \Delta\lambda^{d}} \\ \frac{\partial LR}{\partial \sigma_{kl}} & \frac{\partial LR}{\partial Q_{iso}} & \frac{\partial LR}{\partial R} & \frac{\partial LR}{\partial X_{kl}} & \frac{\partial LR}{\partial \Delta\lambda^{i}} & \frac{\partial LR}{\partial \Delta\lambda^{d}} \\ \frac{\partial LX_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} & \frac{\partial LX_{ij}}{\partial Q_{iso}} & \frac{\partial LX_{ij}}{\partial R} & \frac{\partial LX_{ij}}{\partial X_{kl}} & \frac{\partial LX_{ij}}{\partial \Delta\lambda^{i}} & \frac{\partial LX_{ij}}{\partial \Delta\lambda^{d}} \\ \frac{\partial FI}{\partial \sigma_{kl}} & \frac{\partial FI}{\partial Q_{iso}} & \frac{\partial FI}{\partial R} & \frac{\partial FI}{\partial X_{kl}} & \frac{\partial FI}{\partial \Delta\lambda^{i}} & \frac{\partial FI}{\partial \Delta\lambda^{d}} \\ \frac{\partial FD}{\partial \sigma_{kl}} & \frac{\partial FD}{\partial Q_{iso}} & \frac{\partial FD}{\partial R} & \frac{\partial FD}{\partial X_{kl}} & \frac{\partial FD}{\partial \Delta\lambda^{i}} & \frac{\partial FD}{\partial \Delta\lambda^{d}} \end{vmatrix}$$

où les nouveaux termes sont nuls :

$$\frac{\partial LQ}{\partial R}=0\ ,\ \frac{\partial LQ}{\partial X_{kl}}=0\ ,\ \frac{\partial LQ}{\partial \Delta\lambda^{d}}=0\ ,\ \frac{\partial LR}{\partial Q_{iso}}=0\ ,\ \frac{\partial LR}{\partial \Delta\lambda^{i}}=0\ ,\ \frac{\partial LX_{ij}}{\partial Q_{iso}}=0\ ,$$
$$\frac{\partial LX_{ij}}{\partial \Delta\lambda^{i}}=0\ ,\ \frac{\partial FI}{\partial R}=0\ ,\ \frac{\partial FI}{\partial X_{kl}}=0\ ,\ \frac{\partial FI}{\partial \Delta\lambda^{d}}=0\ ,\ \frac{\partial FD}{\partial Q_{iso}}=0\ ,\ \frac{\partial FD}{\partial \Delta\lambda^{i}}=0$$

et où les termes déjà définis restent inchangés, à l'exception de $\frac{\partial LE_{ij}}{\partial \sigma_{kl}}$ qui devient :

$$\frac{\partial LE_{ij}}{\partial \sigma_{kl}}=\delta_{ik}\delta_{jl}-D^{lineaire}_{ijmn}\left(\Delta\varepsilon_{mn}+\frac{1}{3}\Delta\lambda^{i}\delta_{mn}-\Delta\lambda^{d}G^{d}_{mn}\right)\frac{n}{3P_a}\left(\frac{I_1+Q_{init}}{3P_a}\right)^{n-1}\delta_{kl}+D_{ijmn}\Delta\lambda^{d}\frac{\partial G^{d}_{mn}}{\partial \sigma_{kl}}$$

4.5.3 Test de convergence

Le critère de convergence reste $\frac{\|DY^{p+1}\|}{\|Y^{p+1}-Y^{0}\|}$ ◻ RESI_INTE_RELA

4.6 Procédure de relaxation basée sur une estimation des normales à la surface de charge déviatoire

Lorsque le mécanisme plastique déviatoire intervient, une procédure de relaxation à l'intérieur des itérations de Newton est prise en compte. Celle-ci permet d'éviter certains problèmes d'oscillation dans le calcul de la solution Y^{p+1} qui conduisent finalement à la non convergence de l'intégration numérique.

Ainsi, à l'iteration $p+1$, au lieu d'actualiser l'inconnue Y^{p+1} par un incrément complet δY^{p+1}

$$Y^{p+1}=Y^{p}+\delta Y^{p+1}$$

on pose

$$Y^{p+1}_{m}=Y^{p}+\rho_{m}\delta Y^{p+1}$$

et on cherche, en effectuant une boucle sur des sous-itérations m , à déterminer une valeur optimale du scalaire ρ_{m} . Cette valeur est recherchée en considérant la rotation de la normale, dans le plan

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

déviatoire, à la surface f^d , au cours des sous-itérations. Cette normale, notée $\tilde{n}_m$, s'exprime à partir des contraintes contenues dans le terme Y_m^{p+1} par

$$\tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{m}}=2\,h\left(\theta_q\right)^5\,q_{II}\,\frac{\partial f^d}{\partial q_{ij}}=\left(2+\gamma\ \cos\left(3\,\theta_q\right)\right)\,q_{ij}+\frac{\sqrt{6}\,\gamma}{q_{II}}\,\frac{\partial\det(q)}{\partial q_{ij}}$$

À partir de la valeur initiale $\rho_0=1.0$, le processus mis en place consiste en les étapes suivantes :

- calcul des normales $\tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{m-1}}$ et $\tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{m}}$
- calcul de l'angle de rotation φ_m entre ces normales : $\cos\phi_m=\frac{\tilde{\boldsymbol{n}}_{m-1}:\tilde{\boldsymbol{n}}_m}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{n}}_{m-1}}\sqrt{\tilde{\boldsymbol{n}}_m}}$
- test sur l'évolution $\cos\phi_m$:
  si $\cos\phi_m\leq TOLROT$ alors $\rho_{m+1}=DECREL\ \rho_m$ et $m=m+1$
  sinon fin des sous-itérations et $Y^{p+1}=Y_m^{p+1}$

4.7 Redécoupage du pas de temps

Comme pour la plupart des relations de comportement, il a été introduit pour le modèle `CJS` la possibilité de redécouper localement (aux points de Gauss) le pas de temps afin de faciliter l'intégration numérique. Cette possibilité est gérée par l'opérande `ITER_INTE_PAS` du mot clé `CONVERGENCE` de l'opérateur `STAT_NON_LINE`. Si `itepas`, la valeur de `ITER_INTE_PAS`, vaut 0, 1 ou -1 il n'y a aucun redécoupage (remarque: 0 est la valeur par défaut). Si `itepas` est positif le redécoupage est automatique, s'il est négatif le redécoupage n'est pris en compte qu'en cas de non convergence avec le pas de temps initial.

Le redécoupage consiste à réaliser, après la phase de prédiction élastique, l'intégration du ou des mécanismes plastiques mis en jeux avec un incrément de déformation dont les composantes correspondent aux composantes de l'incrément de déformation initial divisées par la valeur absolue de `itepas`.

4.8 Remarques diverses

4.8.1 Calcul du terme $\cos\left(\theta_s-\theta_q\right)$

Le terme $\cos\left(\theta_s-\theta_q\right)$ apparaît dans l'expression de φ_o . Nous avons adopté pour son calcul la même méthode que celle utilisée à l'ECL. C'est-à-dire que nous déterminons les angles θ_s et θ_q de la manière qui suit :

$$\theta_s=\frac{1}{3}\ \mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1-\cos^2\left(3\theta_s\right)}}{\cos\left(3\theta_s\right)}\right)\ \text{et}\ \theta_q=\frac{1}{3}\ \mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1-\cos^2\left(3\ \theta_q\right)}}{\cos\left(3\ \theta_q\right)}\right)$$

puis nous prenons le cosinus de la différence.

Ces expressions de θ_s et θ_q servent également pour le calcul de :

$$\frac{\partial\cos\left(\theta_s-\theta_q\right)}{\partial\sigma_{kl}}=-\sin\left(\theta_s-\theta_q\right)\left(\frac{\partial\theta_s}{\partial\sigma_{kl}}-\frac{\partial\theta_q}{\partial\sigma_{kl}}\right)$$

avec $\frac{\partial\theta_s}{\partial\sigma_{kl}}=-\frac{1}{3}\sqrt{1-\cos^2(3\ \theta_s)}\frac{\sqrt{54}}{q_{II}^3}\left(t_{kl}-3\frac{\det(q)}{q_{II}^2}q_{kl}\right)$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.8.2 Calcul de R_r

Le rayon de rupture introduit dans le modèle CJS3 est donné par la formule

$$R_r = R_c + \mu \ln\left(\frac{3\ p_c}{I_1 + Q_{init}}\right)$$

En fait, lorsque $\frac{I_1 + Q_{init}}{3} > p_c$, on doit bloquer R_r à la valeur de R_c. Le domaine de dilatence disparaît et on n'admet pas que R_r puisse diminuer en deçà de R_c. Par conséquent, on introduit, à la place de la formulation précédente, l'expression suivante

$$R_r = R_c + \mu \max\left[0,\ \ln\left(\frac{3\ p_c}{I_1 + Q_{init}}\right)\right]$$

4.8.3 Traction

Sans cohésion, le domaine de traction qui correspond à des contraintes positives est inadmissible pour les sols. Du point de vue de l'intégration du modèle CJS, lorsque l'état des contraintes tend vers le sommet du cône de la surface de charge, le risque numérique de basculer dans ce domaine interdit augmente. Or lorsque que l'on se projette ou lorsque l'on fait une prédiction en un point de ce domaine, le calcul numérique aboutit soit à un résultat erroné, soit à une erreur fatale. En effet, la traction se manifeste numériquement par une valeur de I_1 positive. Cette valeur pose ensuite problème au moment d'évaluer certaines quantités comme $\left(\frac{I_1^+ + Q_{init}}{3\ P_a}\right)^{-1.5}$; par ailleurs elle engendrerait d'un point de vue théorique une valeur q_{II} négative d'après l'équation de la surface de charge déviatoire.

Un tel phénomène a été détecté à plusieurs niveaux : de façon particulière dans la prédiction élastique avec le modèle CJS1, et de façon générale dans les itérations de Newton locales faisant intervenir le mécanisme déviatoire. La même réponse a été apportée afin de s'affranchir de cette pathologie : il s'agit de projeter virtuellement les contraintes dans le domaine élastique sur l'axe hydrostatique en posant :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -1\ kPa$$
$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

On repositionne ainsi l'état de contraintes dans le domaine de compression en s'éloignant peu de la prédiction initiale inadmissible envisagée, et en espérant que les considérations de structures permettront au calcul global de converger.

De plus les variables internes n'évoluent pas et on suppose être revenu dans le domaine élastique

5 Opérateur tangent

L'opérateur tangent appelé par l'option RIGI_MECA_TANG correspond à l'opérateur tangent déduit du problème en vitesse et calculé à partir des résultats connus à l'instant t.

L'opérateur tangent appelé par l'option FULL_MECA devrait correspondre à l'opérateur tangent au problème discrétisé de façon implicite. En réalité, nous n'avons pas effectué ce calcul. Nous prenons alors, lorsque l'option FULL_MECA est retenue, l'opérateur tangent déduit du problème en vitesse et calculé à partir des résultats connus à l'instant t+dt.

Nous détaillons ci-dessous l'opérateur tangent déduit du problème en vitesse en fonction du ou des mécanismes mis en jeu.

5.1 Opérateur tangent du mécanisme élastique non linéaire

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Nous avons simplement la relation élastique non linéaire suivante :

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}(\sigma)\,\dot{\varepsilon}_{kl} = \left(\frac{I_1 + Q_{init}}{3\,P_a}\right)^n D^{lineaire}_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl}$$

d'où immédiatement l'opérateur tangent :

$$H^{elas.nl}_{ijkl} = \left(\frac{I_1 + Q_{init}}{3\,P_a}\right)^n D^{lineaire}_{ijkl}$$

5.2 Opérateur tangent des mécanismes élastique et plastique isotropes

Dans ce cas, nous avons la relation suivante :

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}(\sigma)\left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}^{ip}_{kl}\right) = D_{ijkl}(\sigma)\left(\dot{\varepsilon}_{kl} + \frac{1}{3}\,\dot{\lambda}^{i}\,\delta_{kl}\right)$$

il vient : $\dot{I}_1 = 3\,K\left(\dot{\varepsilon}_v + \dot{\lambda}^{i}\right)$

En tenant compte de cette relation et de la loi d'écrouissage de Q_{iso} , la condition $\dot{f}^i = 0$ devient :

$$\dot{f}^i = -\frac{\dot{I}_1}{3} + \dot{Q}_{iso} = -K\left(\dot{\varepsilon}_v + \dot{\lambda}^{i}\right) - K^p\,\dot{\lambda}^{i} = 0$$

soit : $\dot{\lambda}^{i} = -\dfrac{K}{K + K^p}\,\dot{\varepsilon}_v$

En reportant ce résultat dans l'expression de $\dot{\sigma}_{ij}$, on trouve :

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}\left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{1}{3}\,\frac{K}{K + K^p}\,\dot{\varepsilon}_{mm}\,\delta_{kl}\right) = \left(D_{ijkl} - \frac{1}{3}\,\frac{K}{K + K^p}\,D_{ijmn}\,\delta_{mn}\,\delta_{kl}\right)\dot{\varepsilon}_{kl}$$

d'où l'opérateur tangent :

$$H^{ip}_{ijkl} = D_{ijkl} - \frac{1}{3}\,\frac{K}{K + K^p}\,D_{ijmn}\,\delta_{mn}\,\delta_{kl}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On peut aussi écrire sous forme matricielle :

$$H^{ip}=\left(\frac{I_1}{3\ P_a}\right)^n \begin{bmatrix} \lambda-\chi+2\mu & \lambda-\chi & \lambda-\chi & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-\chi & \lambda-\chi+2\mu & \lambda-\chi & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-\chi & \lambda-\chi & \lambda-\chi+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}$$

où pour cette formule uniquement λ et μ sont les coefficient de Lamé et $\chi=\frac{K_o^{e^2}}{K_o^e+K_o^p}$.

5.3 Opérateur tangent des mécanismes élastique et plastique déviatoire

La condition $\dot{f}^d=0$ s'écrit :

$$\dot{f}^d=\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}+\frac{\partial f^d}{\partial R}\dot{R}+\frac{\partial f^d}{\partial X_{ij}}\dot{X}_{ij}=\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}+\frac{\partial f^d}{\partial R}\dot{\lambda}^d G^R+\frac{\partial f^d}{\partial X_{ij}}\dot{\lambda}^d G^X_{ij}=0$$

Le tenseur G^X étant purement déviatoire, le produit $\frac{\partial f^d}{\partial X_{ij}}G^X_{ij}$ se réduit à :

$$\frac{\partial f^d}{\partial X_{ij}}G^X_{ij}=dev\left(\frac{\partial f^d}{\partial X_{ij}}\right)\quad G^X_{ij}=-I_1\ Q_{ij}\ G^X_{ij}$$

Le multiplicateur plastique peut donc se mettre sous la forme :

$$\dot{\lambda}^d=\frac{1}{H^{dev}}\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}$$

en faisant apparaître le module plastique H^{dev}, donné par :

$$H^{dev}=I_1^2\left(\frac{I_1+Q_{init}}{3\ P_a}\right)^{-1,5}\left[A\left(1-\frac{R}{R_m}\right)^2+\frac{1}{b}\ Q_{ij}\left(Q_{ij}+\varphi\quad X_{ij}\right)\right]$$

La relation contraintes - déformations permet alors d'écrire :

$$\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}=\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}\left(\dot{\varepsilon}_{kl}-\dot{\lambda}^d G^d_{kl}\right)=\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}-\dot{\lambda}^d\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}G^d_{kl}$$

ce qui donne finalement pour le multiplicateur plastique :

$$\dot{\lambda}^d=\frac{\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}}{H^{dev}+\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}G^d_{kl}}$$

En reportant ce résultat dans l'expression de $\dot{\sigma}_{ij}$, on trouve :

$$\dot{\sigma}_{ij}=D_{ijkl}\left(\dot{\varepsilon}_{kl}-\frac{\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{pq}}D_{pqmn}\dot{\varepsilon}_{mn}}{H^{dev}+\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{rs}}D_{rstu}G^d_{tu}}G^d_{kl}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

d'où l'opérateur tangent :

$$H^{dp}_{ijkl}=D_{ijkl}-D_{ijmn}\,G^d_{mn}\,\frac{\dfrac{\partial f^d}{\partial \sigma_{pq}}\,D_{pqkl}}{H^{dev}+\dfrac{\partial f^d}{\partial \sigma_{rs}}\,D_{rstu}\,G^d_{tu}}$$

L'opérateur tangent ainsi obtenu n'est pas symétrique. Or pour l'instant la loi CJS s'appuie sur des éléments finis qui réclament un opérateur symétrique. En définitive, nous retenons non pas H^{dp}_{ijkl} mais $\tilde{H}^{dp}_{ijkl}$ qui est donné par :

$$\tilde{H}^{dp}_{ijkl}=\frac{H^{dp}_{ijkl}+H^{dp}_{klij}}{2} \quad \text{avec } ij \text{ et } kl \text{ pris dans } (11,\ 22,\ 33,\ 12,\ 13,\ 23)$$

5.4 Opérateur tangent des mécanismes élastique, plastiques isotrope et déviatoire

On doit satisfaire les deux conditions suivantes : $\dot{f}^i=0$ et $\dot{f}^d=0$. Compte tenu de la relation contraintes - déformations qui s'écrit :

$$\dot{\sigma}_{ij}=D_{ijkl}\left(\dot{\varepsilon}_{kl}+\frac{1}{3}\,\dot{\lambda}^i\,\delta_{kl}-\dot{\lambda}^d\,G^d_{kl}\right)$$

la première condition donne :

$$\dot{f}^i=-K\left(\dot{\varepsilon}_v+\dot{\lambda}^i-\dot{\lambda}^d\,G^d_v\right)-K^p\,\dot{\lambda}^i=0$$

où l'on a posé $G^d_v=G^d_{kk}=tr\left(\boldsymbol{G}^d\right)$.

La seconde condition aboutie à :

$$\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}\,D_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl}+\frac{1}{3}\,\dot{\lambda}^i\,\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}\,D_{ijkl}\,\delta_{kl}-\dot{\lambda}^d\,\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}\,D_{ijkl}\,G^d_{kl}-H^{dev}\,\dot{\lambda}^d=0$$

Ainsi, les multiplicateurs plastiques $\dot{\lambda}^i$ et $\dot{\lambda}^d$ s'obtiennent en résolvant le système :

$$\begin{cases}-\left(K+K^p\right)\dot{\lambda}^i+K\,G^d_v\,\dot{\lambda}^d=K\,\dot{\varepsilon}_v\\ -\dfrac{1}{3}\,\dfrac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}\,D_{ijkl}\,\delta_{kl}\,\dot{\lambda}^i+\left(\dfrac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}\,D_{ijkl}\,G^d_{kl}+H^{dev}\right)\dot{\lambda}^d=\dfrac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}\,D_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl}\end{cases}$$

soit :

$$\dot{\lambda}^i=\frac{K\,G^d_v\,\dfrac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}\,D_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl}-\left(\dfrac{\partial f^d}{\partial \sigma_{mn}}\,D_{mnpq}\,G^d_{pq}+H^{dev}\right)K\,\dot{\varepsilon}_v}{\left(K+K^p\right)\left(\dfrac{\partial f^d}{\partial \sigma_{rs}}\,D_{rstu}\,G^d_{tu}+H^{dev}\right)-\dfrac{1}{3}\,K\,G^d_v\,\dfrac{\partial f^d}{\partial \sigma_{vw}}\,D_{wvxy}\,\delta_{xy}}$$

$$\dot{\lambda}^d=\frac{\left(K+K^p\right)\dfrac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}}\,D_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl}-\dfrac{1}{3}K\,\dfrac{\partial f^d}{\partial \sigma_{mn}}\,D_{mnpq}\,\delta_{pq}\,\dot{\varepsilon}_v}{\left(K+K^p\right)\left(\dfrac{\partial f^d}{\partial \sigma_{rs}}\,D_{rstu}\,G^d_{tu}+H^{dev}\right)-\dfrac{1}{3}\,K\,G^d_v\,\dfrac{\partial f^d}{\partial \sigma_{vw}}\,D_{vwxy}\,\delta_{xy}}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ces expressions s'écrivent encore :

$$\dot{\lambda}^{i} = T_{1_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} \text{ et } \dot{\lambda}^{d} = T_{2_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl}$$

où les tenseurs $\boldsymbol{T_1}$ et $\boldsymbol{T_2}$ sont donnés par :

$$T_{1_{kl}} = \frac{K\ G_v^d \frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} - \left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{mn}} D_{mnpq} G_{pq}^d + H^{dev} \right) K\ \delta_{kl}}{\left(K + K^p\right) \left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu} G_{tu}^d + H^{dev} \right) - \frac{1}{3} K\ G_v^d \frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{vw}} D_{vwxy}\ \delta_{xy}}$$

$$T_{2_{kl}} = \frac{\left(K + K^p\right) \frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} - \frac{1}{3} K \frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{mn}} D_{mnpq}\ \delta_{pq}\ \delta_{kl}}{\left(K + K^p\right) \left(\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu} G_{tu}^d + H^{dev} \right) - \frac{1}{3} K\ G_v^d \frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{vw}} D_{vwxy}\ \delta_{xy}}$$

En reportant les expressions $\dot{\lambda}^{i}$ et $\dot{\lambda}^{d}$ de dans la formule de $\dot{\sigma}_{ij}$, on trouve :

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \left(\dot{\varepsilon}_{kl} + \frac{1}{3} T_{1_{nm}} \dot{\varepsilon}_{nm}\ \delta_{kl} - T_{2_{pq}} \dot{\varepsilon}_{pq} G_{kl}^d \right)$$

d'où l'opérateur tangent :

$$H_{ijkl}^{idp} = D_{ijkl} + \frac{1}{3} D_{ijmn}\ \delta_{mn} T_{1_{kl}} - D_{ijpq} G_{pq}^d T_{2_{kl}}$$

Cet opérateur tangent n'étant pas symétrique, nous retenons non pas H_{ijkl}^{idp} mais $\tilde{H}_{ijkl}^{idp}$ qui est donné par :

$$\tilde{H}_{ijkl}^{idp} = \frac{H_{ijkl}^{idp} + H_{klij}^{idp}}{2} \text{ avec } ij \text{ et } kl \text{ pris dans } \left(11,\ 22,\ 33,\ 12,\ 13,\ 23\right)$$

6 Sources Aster

6.1 Liste des routines modifiées et ajoutées

Seule la routine `nmcomp.f` a été modifiée. Elle permet d'appeler, lorsque le comportement CJS est choisi, la routine `nmcjs.f`, point de départ de l'intégration de la loi.

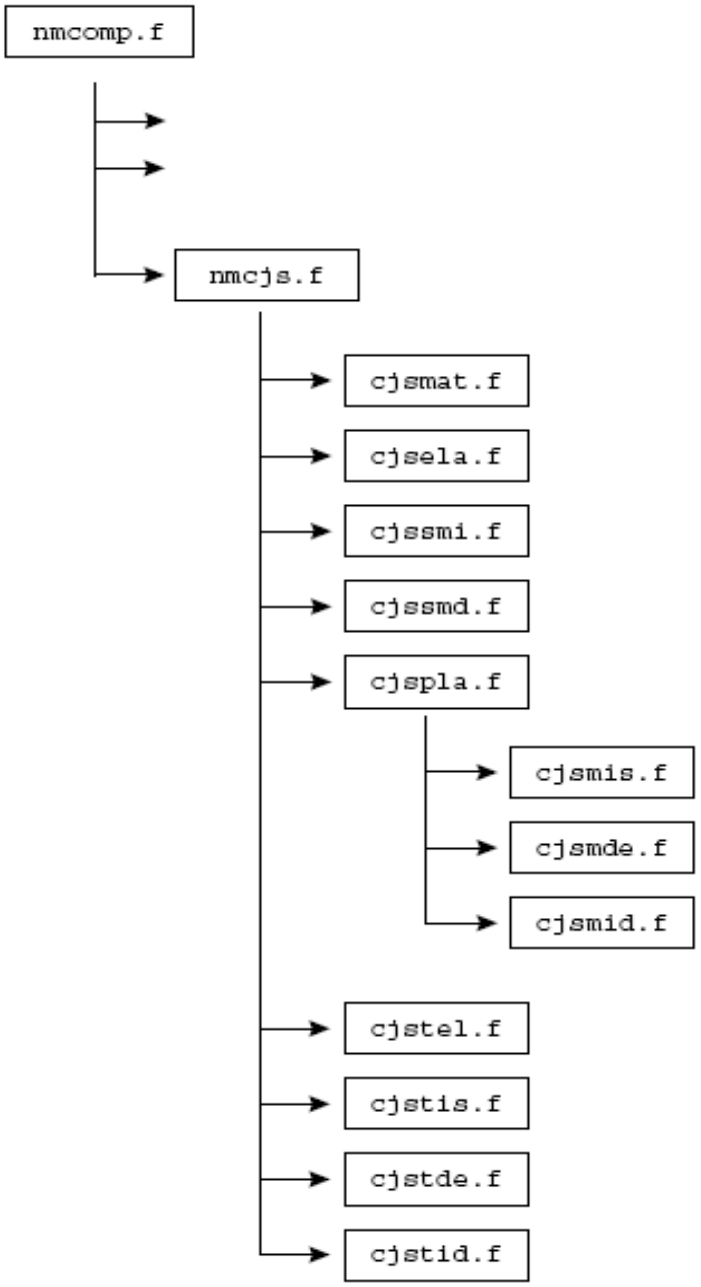
L'ensemble des routines fortran développées dans le cadre de l'intégration de la loi CJS dans le *Code_Aster* est le suivant :

```
cjsc3q.f,    cjsci1.f,    cjsdtd.f,    cjsela.f,    cjside.f,    cjsiid.f,
cjsjde.f,    cjsjid.f,    cjsjis.f,    cjsmat.f,    cjsmde.f,    cjsmid.f,
cjsmis.f,    cjsnor.f,    cjspla.f,    cjsqco.f,    cjsqij.f,    cjssmd.f,
cjssmi.f,    cjst.f,      cjstde.f,    cjstel.f,    cjstid.f,    cjstis.f,
lcdete.f,    nmcjs.f,     cjsinp.f,    cjsncn.f,    cjsncv.f,    cjsnvi.f,
cjsqq.f.
```


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6.2 Organigramme général des principales routines

Les principales routines FORTRAN pour l'intégration de la loi CJS s'enchaînent de la façon suivante :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6.3 Détails des fonctionnalités des routines FORTRAN développées

6.3.1 Routine : CJSC3Q

Objectif : calcul de $\cos\left(3\ \theta_{q} \right)$

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     SIG      :  CONTRAINTES
       X        :  VARIABLES ECROUI CINE
        PA       :  PRESS ATMOSPHERIQUE ( DONNEE MATERIAU)

OUT    Q        :  DEV(SIG)-TRACE(SIG)*X
       QII      :  SQRT(QIJ*QIJ)
       COS3TQ   :  SQRT(54)*DET(Q)/(QII**3)
```

6.3.2 Routine : CJSCI1

Objectif :

résolution de l'équation $I_1^+ - I_1^- - 3\ K_o^e \left(\frac{I_1^+}{3\ P_a} \right)^n tr\left(\Delta\varepsilon\right) = 0$ par la méthode de la sécante, pour le comportement élastique non linéaire

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     CRIT  : CRITERES DE CONVERGENCE
       MATER : COEFFICIENTS MATERIAU A T+DT
       DEPS  : INCREMENT DE DEFORMATION
       SIGD  : CONTRAINTE A T
OUT    I1    : TRACE DE SIG A T+DT
       TRACT : VARIABLE LOGIQUE INDIQUANT LA TRACTION
```

6.3.3 Routine : CJSDTD

Objectif :

calcul de la dérivée du tenseur t^d par rapport à q

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     MOD    :  MODELISATION
       Q      :  TENSEUR (6 COMPOSANTES)
OUT    DTDDQ  :  TENSEUR RESULTAT (6 COMPOSANTES)
```

6.3.4 Routine : CJSELA

Objectif :

calcul élastique non linéaire des contraintes

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     MOD    :  MODELISATION
       CRIT   :  CRITERES DE CONVERGENCE
       MATERF :  COEFFICIENTS MATERIAU A T+DT
       SIGD   :  CONTRAINTE  A T
       DEPS   :  INCREMENT DE DEFORMATION
```


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

```
      OUT    SIGF   :  CONTRAINTE A T+DT
```


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Organisation de CJSELA
- calcul du premier invariant des contraintes I1 à t+dt :
  - appel de CJSCI1
- calcul des coefficients de la matrice élastique et assemblage de la matrice
- calcul de l'incrément des contraintes et des contraintes à t+dt :
  - appel de LCPRMV et LCSOVE

6.3.5 Routine : CJSIDE

Objectif :

pour l'intégration du mécanisme plastique déviatoire, calcul d'une solution d'essai afin d'amorcer ensuite les itérations de Newton locales.

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     MOD       :  MODELISATION
       MATER     :  COEFFICIENTS MATERIAU A T+DT
       EPSD      :  DEFORMATION A T+DT
       DEPS      :  INCREMENT DE DEFORMATION
       YD        :  VARIABLES A T = (SIGD, VIND, LAMB)
VAR    GD        :  TENSEUR DE LA LOI D ECOULEMENT PLASTIQUE DEV.
OUT    DY        :  SOLUTION D ESSAI
```

Organisation de CJSIDE
- calcul de l'opérateur élastique,
- calcul de lois d'écrouissage G^R et $\boldsymbol{G}^X$,
- calcul de la loi d'écoulement du mécanisme plastique déviatoire $\boldsymbol{G}^d$,
- calcul du seuil f^d , de sa dérivée $\frac{\partial f^d}{\partial \Delta\ \lambda^d}$ et du multiplicateur plastique $\Delta\ \lambda^d$,
- calcul de la solution d'essai

6.3.6 Routine : CJSIID

Objectif :

pour l'intégration simultanée des mécanismes plastiques isotrope et déviatoire, calcul d'une solution d'essai afin d'amorcer ensuite les itérations de Newton locales.

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     MOD       :  MODELISATION
       MATER     :  COEFFICIENTS MATERIAU A T+DT
       EPSD      :  DEFORMATION A T+DT
       DEPS      :  INCREMENT DE DEFORMATION
       YD        :  VARIABLES A T = (SIGD, VIND, LAMB)
VAR    GD        :  TENSEUR DE LA LOI D ECOULEMENT PLASTIQUE DEV.
OUT    DY        :  SOLUTION D ESSAI
```


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Organisation de CJSIID

- calcul de l'opérateur élastique,
- calcul de lois d'écrouissage G^R et $\boldsymbol{G}^X$,
- calcul de la loi d'écoulement du mécanisme plastique déviatoire $\boldsymbol{G}^d$,
- calcul des seuils f^i et f^d , de leurs dérivées $\frac{\partial f^i}{\partial \Delta \lambda^i}$, $\frac{\partial f^i}{\partial \Delta \lambda^d}$, $\frac{\partial f^d}{\partial \Delta \lambda^i}$ et $\frac{\partial f^d}{\partial \Delta \lambda^d}$, et des multiplicateurs plastiques $\Delta \lambda^i$ et $\Delta \lambda^d$,
- calcul de la solution d'essai

6.3.7 Routine : CJSJDE

Objectif :

calcul de $DRDY$ et R pour la résolution de $\frac{DR}{DY}\left(Y^p\right) DY^{p+1} = -R\left(Y^p\right)$ (mécanisme plastique déviatoire)

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     MOD      :  MODELISATION
       MATER    :  COEFFICIENTS MATERIAU A T+DT
       EPSD     :  DEFORMATION A T
       DEPS     :  INCREMENT DE DEFORMATION
       YD       :  VARIABLES A T = (SIGD, VIND, LAMBDD)
       YF       :  VARIABLES A T+DT = (SIGF, VINF, LAMBDF)
VAR    GD       :  TENSEUR DE LA LOI D ECOULEMENT PLASTIQUE DEV.
OUT    R        :  SECOND MEMBRE
       SIGNE    :  SIGNE DE S:DEPSDP
       DRDY     :  JACOBIEN
```

Organisation de CJSJDE

- calcul de l'opérateur élastique,
- calcul de lois d'écrouissage G^R et $\boldsymbol{G}^X$,
- calcul de la loi d'écoulement du mécanisme plastique déviatoire $\boldsymbol{G}^d$,
- calcul de multiples dérivées intermédiaires
- calcul des termes $\frac{\partial G^R}{\partial \sigma_{ij}}$, $\frac{\partial G^R}{\partial R}$, $\frac{\partial G^X_{mn}}{\partial \sigma_{ij}}$, $\frac{\partial G^X_{mn}}{\partial X_{ij}}$, $\frac{\partial G^d_{mn}}{\partial \sigma_{ij}}$, $\frac{\partial G^d_{mn}}{\partial R}$, $\frac{\partial G^d_{mn}}{\partial X_{ij}}$
- calcul des composantes de $DRDY$ et R
- assemblage de $DRDY$ et R

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6.3.8 Routine : CJSJID

Objectif :

calcul de $DRDY$ et R pour la résolution de $\frac{DR}{DY}\left(Y^p \right) \; DY^{p+1} = -R\left(Y^p \right)$

(mécanismes plastiques isotrope et déviatoire)

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     MOD      :  MODELISATION
       MATER    :  COEFFICIENTS MATERIAU A T+DT
       EPSD     :  DEFORMATION A T
       DEPS     :  INCREMENT DE DEFORMATION
       YD       :  VARIABLES A T = (SIGD, VIND, LAMBDD)
       YF       :  VARIABLES A T+DT = (SIGF, VINF, LAMBDF)
VAR    GD       :  TENSEUR DE LA LOI D ECOULEMENT PLASTIQUE DEV.
OUT    R        :  SECOND MEMBRE
       SIGNE    :  SIGNE DE S:DEPSDP
       DRDY     :  JACOBIEN
```

Organisation de CJSJID

- calcul de l'opérateur élastique,
- calcul de lois d'écrouissage $G^{Q_{iso}}$, G^R et $\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{X}}$,
- calcul de la loi d'écoulement du mécanisme plastique déviatoire $\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{d}}$,
- calcul de multiples dérivées intermédiaires
- calcul des termes $\frac{\partial G^{Q_{iso}}}{\partial Q_{iso}}$, $\frac{\partial G^R}{\partial \sigma_{ij}}$, $\frac{\partial G^R}{\partial R}$, $\frac{\partial G^X_{mn}}{\partial \sigma_{ij}}$, $\frac{\partial G^X_{mn}}{\partial X_{ij}}$, $\frac{\partial G^d_{mn}}{\partial \sigma_{ij}}$, $\frac{\partial G^d_{mn}}{\partial R}$, $\frac{\partial G^d_{mn}}{\partial X_{ij}}$
- calcul des composantes de $DRDY$ et R
- assemblage de $DRDY$ et R

6.3.9 Routine : CJSJIS

Objectif :

calcul de $DRDY$ et R pour la résolution de $\frac{DR}{DY}\left(Y^p \right) \; DY^{p+1} = -R\left(Y^p \right)$

(mécanisme plastique isotrope)

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     MOD      :  MODELISATION
       MATER    :  COEFFICIENTS MATERIAU A T+DT
       DEPS     :  INCREMENT DE DEFORMATION
       YD       :  VARIABLES A T = (SIGD, VIND, LAMBDD)
       YF       :  VARIABLES A T+DT = (SIGF, VINF, LAMBDF)
OUT    R        :  SECOND MEMBRE
       DRDY     :  JACOBIEN
```

Organisation de CJSJIS

- calcul de l'opérateur élastique,
- calcul des composantes de $DRDY$ et R

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- assemblage de $DRDY$ et R

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6.3.10 Routine : CJSMAT

Objectif :

récupération de données matériaux, du nombre de composantes des champs, du nombre de variables internes et du niveau CJS choisi.

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     IMAT   :  ADRESSE DU MATERIAU CODE
       MOD    :  TYPE DE MODELISATION
       TEMPF  :  TEMPERATURE A T+DT
OUT    MATERF :  COEFFICIENTS MATERIAU A T+DT
       NDT    :  NB TOTAL DE COMPOSANTES TENSEURS
       NDI    :  NB DE COMPOSANTES DIRECTES TENSEURS
       NVI    :  NB DE VARIABLES INTERNES
       NIVCJS :  NIVEAU 1, 2 OU 3 DE LA LOI CJS
```

Organisation de CJSMAT

- récupération du nombre de composantes des champs et du nombre de variables internes en fonction de la modélisation choisie,
- récupération de données matériaux,
- reconnaissance du niveau CJS choisi en fonction des paramètres donnés.

6.3.11 Routine : CJSMDE

Objectif :

calcul élasto-plastique des contraintes avec le mécanisme plastique deviatoire activé : résolution par la méthode de Newton de $R(Y)=0$

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     MOD      :  MODELISATION
       CRIT     :  CRITERES DE CONVERGENCE
       MATER    :  COEFFICIENTS MATERIAU A T+DT
       NVI      :  NB DE VARIABLES INTERNES
       EPSD     :  DEFORMATIONS A T
       DEPS     :  INCREMENT DE DEFORMATION
       SIGD     :  CONTRAINTE A T
       VIND     :  VARIABLES INTERNES A T
       STOPNC   :  ARRET EN CAS DE NON CONVERGENCE
VAR    SIGF     :  CONTRAINTE A T+DT
       VINF     :  VARIABLES INTERNES A T+DT
       NOCONV   :  PAS DE CONVERGENCE
```

Organisation de CJSMDE

- initialisation de YD par l'état à t
- calcul d'une solution d'essai avec CJSIDE
- boucle sur les itérations de Newton
  - incrémentation $YF=YD+DY$
  - calcul de $DRDY$ et R : CJSJDE
  - résolution du système par la méthode de Gauss : MTGAUS
    1) actualisation de la solution DY
  - test de convergence
- mise à jour des contraintes et variables internes

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6.3.12 Routine : CJSMID

Objectif :

calcul élasto-plastique des contraintes avec les mécanismes plastiques isotrope et deviatoire activés : résolution par la méthode de Newton de $R(Y)=0$

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     MOD      :  MODELISATION
       CRIT     :  CRITERES DE CONVERGENCE
       MATER    :  COEFFICIENTS MATERIAU A T+DT
       NVI      :  NB DE VARIABLES INTERNES
       EPSD     :  DEFORMATIONS A T
       DEPS     :  INCREMENT DE DEFORMATION
       SIGD     :  CONTRAINTE A T
       VIND     :  VARIABLES INTERNES A T
       STOPNC   :  ARRET EN CAS DE NON CONVERGENCE
VAR    SIGF     :  CONTRAINTE A T+DT
       VINF     :  VARIABLES INTERNES A T+DT
       NOCONV   :  PAS DE CONVERGENCE
```

Organisation de CJSMID

- initialisation de YD par l'état à t
- calcul d'une solution d'essai avec CJSIID
- boucle sur les itérations de Newton
  - incrémentation $YF=YD+DY$
  - calcul de $DRDY$ et R : CJSJID
  - résolution du système par la méthode de Gauss : MTGAUS
    1) actualisation de la solution DY
  - test de convergence
- mise à jour des contraintes et variables internes

6.3.13 Routine : CJSMIS

Objectif :

calcul élasto-plastique des contraintes avec le mécanisme plastique isotrope activé : résolution par la méthode de Newton de $R(Y)=0$

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     MOD      :  MODELISATION
       CRIT     :  CRITERES DE CONVERGENCE
       MATER    :  COEFFICIENTS MATERIAU A T+DT
       DEPS     :  INCREMENT DE DEFORMATION
       SIGD     :  CONTRAINTE A T
       VIND     :  VARIABLES INTERNES A T
       STOPNC   :  ARRET EN CAS DE NON CONVERGENCE
VAR    SIGF     :  CONTRAINTE A T+DT
       VINF     :  VARIABLES INTERNES A T+DT
       NOCONV   :  PAS DE CONVERGENCE
```

Organisation de CJSMIS

- initialisation de YD par la prédiction élastique
- boucle sur les itérations de Newton
  - incrémentation $YF=YD+DY$
  - calcul de $DRDY$ et R : CJSJIS
    1) résolution du système par la méthode de Gauss : MTGAUS

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- actualisation de la solution DY
- test de convergence

- mise à jour des contraintes et variables internes
-

6.3.14 Routine : CJSNOR

Objectif :

calcul d'un vecteur parallèle à $\frac{\partial f^d}{\partial q_{ij}}$

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     MATER :   MATERIAU
       SIG   :   CONTRAINTES
       X     :   VARIABLES INTERNES CINEMATIQUES
OUT    NOR   :   ESTIMATION DE LA DITRECTION DE LA NORMALE
                 A LA SURFACE DEVIATOIRE DANS LE PLAN DEVIATOIRE
                 PERPENDICULAIRE A LA TRISECTRICE
                 LE VECTEUR NOR(1:NDT) N EST PAS NORME
                 SA NORME EST NOR(NDT+1)
```

6.3.15 Routine : CJSPLA

Objectif :

calcul élasto-plastique des contraintes.

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     MOD    :  MODELISATION
       CRIT   :  CRITERES DE CONVERGENCE
       MATER  :  COEFFICIENTS MATERIAU A T+DT
       SEUILI :  FONCTION DE CHARGE ISO. CALCULEE AVEC PREDICT ELAS
       SEUILD :  FONCTION DE CHARGE DEV. CALCULEE AVEC PREDICT ELAS
       NVI    :  NOMBRE DE VARIABLES INTERNES
       EPSD   :  DEFORMATIONS A T
       DEPS   :  INCREMENT DE DEFORMATION
       SIGD   :  CONTRAINTE A T
       VIND   :  VARIABLES INTERNES A T
VAR    SIGF   :  CONTRAINTE A T+DT (IN -> ELAS, OUT -> PLASTI )
OUT    VINF   :  VARIABLES INTERNES A T+DT
       MECANI :  MECANISME(S) ACTIVE(S)
```

Organisation de CJSPLA

- hypothèse sur le ou les mécanismes plastiques activés en fonction des valeurs des seuils f^i et f^d calculés à partir de la prédiction élastique,
- traitement du redécoupage éventuel du pas de temps
- sauvegarde de la prédiction élastique,
- calcul élasto-plastique,
  - mécanisme plastique isotrope : CJSMIS
  - mécanisme plastique déviatoire : CJSMDE
  - mécanismes plastiques isotrope et déviatoire simultanément : CJSMID
- calcul des seuils à partir des contraintes à t+dt
  1) appel de CJSSMI et de CJSSMD
     1) si (hypothèse d'un mécanisme isotrope et f^d positif) ou (hypothèse d'un mécanisme déviatoire et f^i positif) : retour au calcul élasto-plastique avec mécanismes plastiques isotrope et déviatoire simultanément,
  1) sinon fin de routine

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6.3.16 Routine : CJSQCO

Objectif :
routine utilitaire de CJS permettant le calcul de grandeurs standard listées ci-dessous

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     GAMMA    :  PARAMETRE MATERIAU
       SIG      :  CONTRAINTES
       X        :  VARIABLES ECROUI CINE
       PREF     :  PRESS REF POUR NORMALISATION
       EPSSIG   :  EPSILON POUR NULLITE DEVIATEUR
       I1       :  TRACE DU TENSEUR DES CONTRAINTES
OUT    S        : DEV(SIG)
       SII      : SQRT(S:S)
       SIIREL   : SII/PREF
       COS3TS   : LODE(SIG)
       HTS      : FONCTION H(TETHA_S)
       DETS     : DETERMINANT DE S
       Q        : Q(SIG-X)
       QII      : SQRT(Q:Q)
       QIIREL   : QII/PREF
       COS3TQ
        HTQ      : FONCTION H(TETHA_Q)
       DETQ     : DETERMINANT DE Q
```

6.3.17 Routine : CJSQIJ

Objectif :
calcul du tenseur q_{ij}

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     N      :  DIMENSION DE S, X, Q
        S      :  DEVIATEUR
       I1     :  PREMIER INV.
       X      :  CENTRE DE LA SURFACE DE CHARGE DEVIATOIRE
OUT    Q      :  TENSEUR RESULTAT
```

6.3.18 Routine : CJSSMD

Objectif :
calcul du seuil du mécanisme plastique déviatoire.

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     SIG    :  CONTRAINTE
       VIN    :  VARIABLES INTERNES
OUT    SEUILD :  SEUIL ELASTICITE DU MECANISME DEVIATOIRE
```

6.3.19 Routine : CJSSMI

Objectif :
calcul du seuil du mécanisme plastique isotrope.

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     SIG    :  CONTRAINTE
```


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

```
        VIN    :  VARIABLES INTERNES
 OUT       SEUILI :  SEUIL ELASTICITE DU MECANISME ISOTROPE
```

6.3.20 Routine : CJST

Objectif :

calcul de $t = \frac{\partial \det s}{\partial s}$.

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     S       :  MATRICE
OUT    T       :  T (SOUS FORME VECTORIELLE AVEC RAC2)
```

6.3.21 Routine : CJSTDE

Objectif :

calcul de la matrice tangente pour le mécanisme plastique déviatoire

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     MOD     :  MODELISATION
       MATER   :  COEFFICIENTS MATERIAU
       NVI     :  NB DE VARIABLES INTERNES
       EPS     :  DEFORMATIONS
       SIG     :  CONTRAINTES
       VIN     :  VARIABLES INTERNES
OUT    DSDESY  :  MATRICE TANGENTE SYMETRISEE
```

Organisation de CJSTDE

- calcul de l'opérateur élastique,
- calcul de lois d'écrouissage G^R et $\boldsymbol{G}^X$,
- calcul de la loi d'écoulement du mécanisme plastique déviatoire $\boldsymbol{G}^d$,
- calcul de termes intermédiaires
- calcul de la matrice tangente
- symétrisation de la matrice tangente

6.3.22 Routine : CJSTEL

Objectif :

calcul de la matrice tangente pour le mécanisme élastique

Variables d'entrée et de sortie :

```
IN     MOD     :  MODELISATION
       MATER   :  COEFFICIENTS MATERIAU
       SIG     :  CONTRAINTES
OUT    HOOK    :  OPERATEUR RIGIDITE ELASTIQUE
```

Organisation de CJSTEL

- calcul de l'opérateur élastique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6.3.23 Routine : CJSTID

Objectif :
calcul de la matrice tangente pour les mécanismes plastiques isotrope et déviatoire

Variables d'entrée et de sortie :
```
IN     MOD     :  MODELISATION
       MATER   :  COEFFICIENTS MATERIAU
       NVI     :  NB DE VARIABLES INTERNES
       EPS     :  DEFORMATIONS
       SIG     :  CONTRAINTES
       VIN     :  VARIABLES INTERNES
OUT    DSDESY  :  MATRICE TANGENTE SYMETRISEE
```

Organisation de CJSTEL
- calcul de l'opérateur élastique,
- calcul de lois d'écrouissage G^R et $\boldsymbol{G}^X$,
- calcul de la loi d'écoulement du mécanisme plastique déviatoire $\boldsymbol{G}^d$,
- calcul de termes intermédiaires
- calcul de la matrice tangente
- symétrisation de la matrice tangente

6.3.24 Routine : CJSTIS

Objectif :
calcul de la matrice tangente pour le mécanisme plastique isotrope

Variables d'entrée et de sortie :
```
IN     MOD     :  MODELISATION
       MATER   :  COEFFICIENTS MATERIAU
       SIG     :  CONTRAINTES
       VIN     :  VARIABLES INTERNES
OUT    DSDE    :  MATRICE TANGENTE
```

Organisation de CJSTEL
- calcul de la matrice tangente

6.3.25 Routine : LCDETE

Objectif :
calcul d'une matrice déterminant 3□3

Variables d'entrée et de sortie :
```
IN     A       :  MATRICE
OUT    LCDETE  :  DETERMINANT
```

6.3.26 Routine : NMCJS

Objectif :
réalisation de l'intégration de la loi CJS : calcul des contraintes à t+dt et/ou de la matrice tangente, selon l'option de calcul choisie.

Variables d'entrée et de sortie :
```
IN     TYPMOD  TYPE DE MODELISATION
```


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

```
        IMAT    ADRESSE DU MATERIAU CODE
        COMP    COMPORTEMENT DE L ELEMENT
        CRIT    CRITERES  LOCAUX
        INSTAM  INSTANT T
        INSTAP  INSTANT T+DT
        TEMPM   TEMPERATURE A T
        TEMPF   TEMPERATURE A T+DT
        TREF    TEMPERATURE DE REFERENCE
        EPSD    DEFORMATION TOTALE A T
        DEPS    INCREMENT DE DEFORMATION TOTALE
        SIGD    CONTRAINTE A T
        VIND    VARIABLES INTERNES A T    + INDICATEUR ETAT T
        OPT     OPTION DE CALCUL A FAIRE
OUT     SIGF    CONTRAINTE A T+DT
        VINF    VARIABLES INTERNES A T+DT + INDICATEUR ETAT T+DT
        DSDE    MATRICE DE COMPORTEMENT TANGENT A T+DT OU T
```

Organisation de NMCJS

- récupération de données matériaux, du nombre de composantes des champs, du nombre de variables internes et du niveau CJS choisi :
  - appel de CJSMAT
- blocage de variables internes selon le niveau CJS choisi
- calcul des contraintes à t+dt
  - prédiction élastique : CJSELA
  - calcul des seuils des mécanismes isotrope et déviatoire : CJSSMI et CJSSMD
  - si l'un des seuils est dépassé, calcul élasto-plastique : CJSPLA
- calcul de la matrice tangente en fonction du mécanisme mis en jeu
  1) élastique : CJSTEL
  2) plastique isotrope : CJSTIS
  3) plastique déviatoire : CJSTDE
  4) plastique isotrope et déviatoire : CJSTID

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Bibliographie

[1] M. MALEKI, B. CAMBOU, P. DUBUJET, "Modélisation hiérarchisée du comportement des sols", Revue Française de Génie Civil, Volume 4 - Issue 7-8, 2000. http://dx.doi.org/10.1080/12795119.2000.9692702.

[2] B. CAMBOU, K. JAFARI, "Modèle de comportement des sols non cohérents", Rev. Franç. Géotech. n°44, p.p 43-55, 1988.

[3] K. ELAMRANI, "Contribution à la validation du modèle CJS pour les matériaux granulaires", Thèse de Doctorat de l'École Centrale de Lyon, 1992.

8 Fonctionnalités et vérification

Ce document concerne la loi de comportement CJS (mot clé COMPORTEMENT de STAT_NON_LINE) et son matériau associé CJS (commande DEFI_MATERIAU).

Cette loi de comportement est vérifiée par les cas tests suivants :

SSNV135	Essai triaxial drainé avec le modèle CJS (niveau 1)	[V6.04.135]
SSNV136	Essai triaxial drainé avec le modèle CJS (niveau 2)	[V6.04.136]
SSNV154	Essai triaxial drainé avec le modèle CJS (niveau 3)	[V6.04.154]
SSNV155	Essai triaxial drainé sur un échantillon tourné d'un angle de –PI/6 par rapport à l'axe x avec le modèle CJS (niveau 2)	[V6.04.155]
WTNV100	Essai triaxial non drainé avec le modèle CJS (niveau 1)	[V7.31.100]

9 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
6,4	*C. CHAVANT, Ph. AUBERT* EDF-R&D/AMA EDF-DIS/CNEPE	Texte initial

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)