# Matrices gyroscopiques des poutres droites et des disques

**Résumé :**

Ce document présente la formulation des matrices d'amortissement et de raideur gyroscopiques des éléments poutres, volumiques et discrets.

Les poutres sont uniquement des poutres droites (Éléments **POU_D_T** et **POU_D_E**). La section est constante sur la longueur et de forme circulaire. Le matériau est homogène, isotrope.

Les disques sont des cylindres de révolution dont l'axe est confondu avec l'axe de la poutre. Le disque est supposé indéformable.

Les hypothèses retenues sont les suivantes :
- Hypothèse de Timoshenko : le cisaillement transverse et tous les termes d'inertie sont pris en compte. Cette hypothèse est à utiliser pour des élancements faibles (Éléments **POU_D_T**).
- Hypothèse d'Euler : le cisaillement transverse est négligé. Cette hypothèse est vérifiée pour de forts élancements (Éléments **POU_D_E**).

La vitesse de rotation propre (suivant l'axe de la poutre) peut être constante ou variable.
Dans Code_Aster, la convention adoptée définit le sens positif suivant l'axe de rotation comme étant le sens **trigonométrique** usuel de rotation.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# Table des Matières

1 L'élément poutre de section circulaire constante....3
1.1 Définition des repères....3
1.2 Caractéristiques....4
1.3 Calcul de l'énergie cinétique de la poutre de Timoshenko....4
1.4 Fonctions d'interpolation....5
1.5 Calcul des équations d'équilibre....8
2 Le disque circulaire....9
2.1 Calcul de l'énergie cinétique du disque....10
2.2 Calcul des équations d'équilibre....10
3 L'élément 3D volumique....12
3.1 Position en mouvement dans le repère tournant....12
3.2 Expression des énergies cinétique et potentielle....14
3.3 Calcul des équations d'équilibre du système en rotation....15
4 Description des versions....15



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 L'élément poutre de section circulaire constante

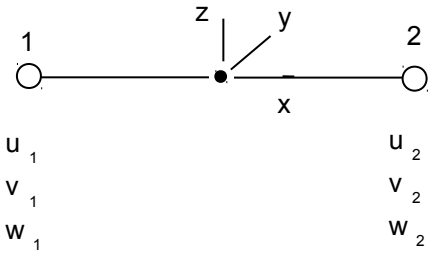
Une poutre est un solide engendré par une surface d'aire $S$, dont le centre d'inertie géométrique $G$ décrit une courbe $C$ appelée fibre moyenne ou fibre neutre.

Dans le cadre de cette modélisation, seules les poutres droites, à section constante et circulaire sont prise en compte.

Pour l'étude des poutres en général, on formule les hypothèses suivantes :
•La section droite de la poutre est indéformable,
•Le déplacement transversal est uniforme sur la section droite.

Ces hypothèses permettent d'exprimer les déplacements d'un point quelconque de la section, en fonction d'un accroissement de déplacement dû à la rotation de la section autour des axes transversaux.

La discrétisation en éléments « exacts » de poutre s'effectue sur un élément linéique à deux nœuds et six degrés de liberté par nœuds. Ces degrés de libertés se décomposent en trois translations $u$, $v$, $w$ (déplacements suivant les directions $x$, $y$ et $z$) et trois rotations $\theta_x$, $\theta_y$ et $\theta_z$ .(autour des axes $x$, $y$ et $z$).




Dans le cas des poutres droites, la ligne moyenne est suivant l'axe $x$ de la base locale, les déplacement transversaux s'effectuant ainsi dans le plan $(y,z)$.

Pour le stockage des grandeurs liées aux degrés de liberté d'un élément dans un vecteur ou une matrice élémentaire (donc de dimension $12$ ou $12^2$ ), on range d'abord les variables pour le nœud 1 puis celles du nœud 2. Pour chaque nœud, on stocke d'abord les grandeurs liées aux trois translations, puis celles liées aux trois rotations. Par exemple, un vecteur déplacement sera structuré de la manière suivante :

$$\underbrace{u_1,\ v_1,\ w_1,\theta_{x1},\theta_{y1},\theta_{z1}}_{sommet\ 1},\ \underbrace{u_2,\ v_2,\ w_2,\theta_{x2},\theta_{y2},\theta_{z2}}_{sommet\ 2}$$

## 1.1 Définition des repères

On définit :
• $x$ est l'axe de la fibre neutre de la poutre,
• $y$ et $z$ sont les axes principaux d'inertie de la section,
• $\mathrm{R}_0$ est le repère absolu lié à une section dans la configuration initiale,
• $\mathrm{R}$ est le repère lié à une section dans la configuration déformée,



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En ne considérant pas la torsion, le passage du repère $\mathrm{R}_0$ au repère $\mathrm{R}$ s'effectue à l'aide 3 rotations, deux suivant $y$ et $z$, et une rotation autour de $x$, notée $\phi$, telle que :
$\dot{\phi}$ : vitesse de rotation propre de l'arbre

## 1.2 Caractéristiques

Chaque élément est un élément poutre isoparamétrique de section circulaire et constante. On prend en compte le cisaillement transverse dans la formulation de cet élément (poutre droite de Timoshenko).

Notations :
• $x$ est l'axe de la fibre neutre de la ligne d'arbre,
•masse volumique : $\rho$
•longueur de l'élément : $L$
•module d'Young : $E$
•module de Poisson : $G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$
•section :
•rayon intérieur : $R_i$
•rayon extérieur : $R_e$
•aire : $A=\pi\left(R_e^2-R_i^2\right)$
•inertie polaire : $I_x=\dfrac{\pi}{2}\left(R_e^4-R_i^4\right)$
•inertie de section : $I_{yz}=I_y=I_z=\dfrac{\pi}{4}\left(R_e^4-R_i^4\right)$

## 1.3 Calcul de l'énergie cinétique de la poutre de Timoshenko

On calcule l'énergie cinétique de l'élément poutre de Timoshenko en considérant les déformations de membrane et de flexion. L'expression de l'énergie cinétique s'obtient en intégrant sur la longueur de l'élément poutre :

$$T=\frac{1}{2}\rho.A\int_{x=0}^{L}\left[\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2\right]dx+\frac{1}{2}\rho.\int_{x=0}^{L}\vec{\Omega}_{R/R0}.[J].\vec{\Omega}_{R/R0}\,dx$$

avec : $[J]=\begin{bmatrix}I_x & 0 & 0\\ 0 & I_y & 0\\ 0 & 0 & I_z\end{bmatrix}$ avec $I$ (en $m^4$)

Soit une poutre droite d'axe $o\vec{x}$ pour la configuration non déformée, il est nécessaire de définir deux bases intermédiaires pour caractériser le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{R/R0}$.

•Passage de la base B(O, $\vec{x}$ , $\vec{y}$ , $\vec{z}$ ) à la base $B_1$ (O, $\vec{x}_1$ , $\vec{y}_1$ , $\vec{z}_1$ ) par une rotation d'axe $o\vec{y}$ d'amplitude $\theta_y(x,t)$ tel que :
$\vec{y}_1=\vec{y}$

•Passage de la base $B$ ( $O$, $\vec{x}_1$ , $\vec{y}_1$ , $\vec{z}_1$ ) à la base $B_2$ ( $O$, $\vec{x}_2$ , $\vec{y}_2$ , $\vec{z}_2$ ) par une rotation d'axe $o\vec{z}_1$ d'amplitude $\theta_z(x,t)$ tel que :
$\vec{z}_2=\vec{z}_1$ et $\vec{y}_1=\cos\theta_z(x,t).\vec{y}_2+\sin\theta_z(x,t).\vec{x}_2$


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

•La rotation à la vitesse angulaire $\dot{\phi}(t)$ a lieu suivant l'axe $o\vec{x}_2$ .

• Ainsi le vecteur de rotation s'écrit : $\vec{\Omega}_{R/R0}=\dot{\phi}(t).\vec{x}_2+\dot{\theta}_y(x,t).\vec{y}_1+\dot{\theta}_z(x,t).\vec{z}_1$

•Étant donné que l'opérateur $[J]$ de l'élément poutre est écrit dans la base $B_2$ qui correspond à la position déformée, il est impératif à moins de changer de base l'opérateur d'inertie, d'écrire le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{R/R0}$ dans la base $B_2$.

$$\vec{\Omega}_{R/R0}=\dot{\phi}(t).\vec{x}_2+\dot{\theta}_y(x,t).\left(\cos\theta_z(x,t).\vec{y}_2+\sin\theta_z(x,t).\vec{x}_2\right)+\dot{\theta}_z(x,t).\vec{z}_2$$

•En considérant que les angles $\theta_y(x,t)$ et $\theta_z(x,t)$ sont petits, il est légitime d'effectuer un développement limité à l'ordre 1. L'expression du vecteur vitesse $\vec{\Omega}_{R/R0}$ devient alors :

$$\vec{\Omega}_{R/R0}=\left(\dot{\phi}(t)+\dot{\theta}_y(x,t).\theta_z(x,t)\right).\vec{x}_2+\dot{\theta}_y(x,t).\vec{y}_2+\dot{\theta}_z(x,t).\vec{z}_2$$

•Il reste à développer le produit scalaire suivant :

$$\frac{1}{2}\rho\int_{x=0}^{L}\vec{\Omega}_{R/R0}.[J].\vec{\Omega}_{R/R0}\,dx=\frac{1}{2}\rho I_{yz}\int_{x=0}^{L}\left[\dot{\theta}_y^2+\dot{\theta}_z^2\right]dx+\frac{1}{2}\rho I_x.L.\dot{\phi}^2+\rho\dot{\phi}I_x\int_{x=0}^{L}\dot{\theta}_y.\theta_z\,dx$$

Pour un élément poutre de section constante, l'expression devient :

$$T=\frac{1}{2}\rho A\int_{x=0}^{L}\left[\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2\right]dx+\frac{1}{2}\rho I_{yz}\int_{x=0}^{L}\left[\dot{\theta}_y^2+\dot{\theta}_z^2\right]dx+\frac{1}{2}\rho I_x.L.\dot{\phi}^2+\rho\dot{\phi}I_x\int_{x=0}^{L}\dot{\theta}_y.\theta_z\,dx$$

Avec :

$$I_x=\frac{\pi}{2}.\left[R_e^4-R_e^4\right]$$

$$I_{yz}=I_y=I_z=\frac{\pi}{4}.\left[R_e^4-R_e^4\right]$$

Les différents termes de l'énergie cinétique représentent :

•pour le premier terme, l'énergie cinétique de translation,
•pour les deux termes suivants, l'énergie cinétique de rotation,
•pour le quatrième terme, le terme d'effet gyroscopique.

## 1.4 Fonctions d'interpolation

Pour les déformations de membrane (traction – compression), le champ $u(x)$ est approché par une fonction linéaire des déplacements des nœuds 1 et 2 de l'élément poutre :

$$u(x)=\langle N_1^L(x)\ N_2^L(x)\rangle\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}\quad\text{avec}\quad\begin{cases}N_1^L(x)=1-\dfrac{x}{L}\\N_2^L(x)=\dfrac{x}{L}\end{cases}$$

Pour les déformations de flexion, on utilise des fonctions cubiques de type Hermite modifié. Les degrés de libertés $v(x),\theta_y(x),w(x),\theta_z(x)$ sont donc interpolés comme suit :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$v(x)=\langle \xi_1(x) \ -\xi_2(x) \ \xi_3(x) \ -\xi_4(x) \rangle \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

$$\theta_z(x)=\langle -\xi_5(x) \ \xi_6(x) \ -\xi_7(x) \ \xi_8(x) \rangle \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

$$w(x)=\langle \xi_1(x) \ \xi_2(x) \ \xi_3(x) \ \xi_4(x) \rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix}$$

$$\theta_y(x)=\langle \xi_5(x) \ \xi_6(x) \ \xi_7(x) \ \xi_8(x) \rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix}$$

On définit $K_{yz}$ coefficient de cisaillement dans les directions $y$ et $z$.

Pour un élément poutre de section constante :

$$K_{yz}=\frac{7+20.\alpha^2}{6} \quad \text{avec} \quad \alpha=\frac{R_i}{R_e.\left(1+\frac{R_i^2}{R_e^2}\right)}$$

En notant $\Phi_{yz}=\frac{12.E.I_{yz}}{K_{yz}.A.G.L^2}$, les fonctions $\xi_i$ sont définies ainsi :

$$\xi_1(x)=\frac{1}{1+\Phi_{yz}}\left[2.\left(\frac{x}{L}\right)^3-3.\left(\frac{x}{L}\right)^2-\Phi_{yz}.\left(\frac{x}{L}\right)+(1+\Phi_{yz})\right]$$

$$\xi_5(x)=\frac{6}{L.(1+\varphi_{yz})}.\left(\frac{x}{L}\right).\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)\right]$$

$$\xi_2(x)=\frac{L}{1+\Phi_{yz}}\left[-\left(\frac{x}{L}\right)^3+\frac{4+\Phi_{yz}}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2-\frac{2+\Phi_{yz}}{2}.\left(\frac{x}{L}\right)\right]$$

$$\xi_6(x)=\frac{1}{1+\Phi_{yz}}\left[3.\left(\frac{x}{L}\right)^2-(4+\Phi_{yz}).\left(\frac{x}{L}\right)+(1+\Phi_{yz})\right]$$

$$\xi_3(x)=\frac{1}{1+\Phi_{yz}}\left[-2.\left(\frac{x}{L}\right)^3+3.\left(\frac{x}{L}\right)^2+\Phi_{yz}.\left(\frac{x}{L}\right)\right]$$

$$\xi_7(x)=\frac{-6}{L.(1+\Phi_{yz})}.\left(\frac{x}{L}\right).\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)\right]$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\xi_4(x)=\frac{L}{1+\phi_{yz}}\left[-\left(\frac{x}{L}\right)^3+\frac{2-\phi_{yz}}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2+\frac{\phi_{yz}}{2}.\left(\frac{x}{L}\right)\right]$$
$$\xi_8(x)=\frac{1}{1+\phi_{yz}}\left[3.\left(\frac{x}{L}\right)^2+(-2+\phi_{yz}).\left(\frac{x}{L}\right)\right]$$

**Remarque :**

Dans le cas d'éléments poutres d'Euler (Éléments **POU_D_E**) le terme $\phi_{yz}$ est nul.

Le vecteur des degrés de liberté de l'élément poutre est défini par :

$$\langle q\rangle=\langle u_1\ v_1\ w_1\ \theta_{x1}\ \theta_{y1}\ \theta_{z1}\ u_2\ v_2\ w_2\ \theta_{x2}\ \theta_{y2}\ \theta_{z2}\rangle$$

On pose :

$$\langle\delta u\rangle=\langle u_1\ u_2\rangle$$
$$\langle\delta v\rangle=\langle v_1\ \theta_{z1}\ v_2\ \theta_{z2}\rangle$$
$$\langle\delta w\rangle=\langle w_1\ \theta_{y1}\ w_2\ \theta_{y2}\rangle$$

En remplaçant les approximations précédentes dans l'expression de l'énergie cinétique, on obtient :

$$T=\frac{1}{2}\langle\delta\dot{u}\rangle[M_1]\{\delta\dot{u}\}+\frac{1}{2}\langle\delta\dot{w}\rangle([M_2]+[M_4])\{\delta\dot{w}\}+\frac{1}{2}\langle\delta\dot{v}\rangle([M_3]+[M_5])\{\delta\dot{v}\}$$
$$+\dot{\phi}.\langle\delta\dot{v}\rangle[M_6]\{\delta w\}+\frac{1}{2}.\rho.I_x.\dot{\phi}^2$$

Avec :

$$[M_1]=\int_{x=0}^{L}\rho.A.\begin{Bmatrix}N_1^L(x\\N_2^L(x)\end{Bmatrix}.\langle N_1^L(x)\ N_2^L(x)\rangle.dx$$

$$[M_2]=\int_{x=0}^{L}\rho.A.\begin{Bmatrix}\xi_1(x)\\\xi_2(x)\\\xi_3(x)\\\xi_4(x)\end{Bmatrix}.\langle\xi_1(x)\ \xi_2(x)\ \xi_3(x)\ \xi_4(x)\rangle.dx$$

$$[M_3]=\int_{x=0}^{L}\rho.A.\begin{Bmatrix}\xi_1(x)\\-\xi_2(x)\\\xi_3(x)\\-\xi_4(x)\end{Bmatrix}.\langle\xi_1(x)\ -\xi_2(x)\ \xi_3(x)\ -\xi_4(x)\rangle.dx$$

$$[M_4]=\int_{x=0}^{L}\rho.I_{yz}.\begin{Bmatrix}\xi_5(x)\\\xi_6(x)\\\xi_7(x)\\\xi_8(x)\end{Bmatrix}.\langle\xi_5(x)\ \xi_6(x)\ \xi_7(x)\ \xi_8(x)\rangle.dx$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$[M_5]=\int_{x=0}^{L}\rho.I_{yz}.\begin{Bmatrix}-\xi_5(x)\\ \xi_6(x)\\ -\xi_7(x)\\ \xi_8(x)\end{Bmatrix}.\langle -\xi_5(x)\ \ \xi_6(x)\ \ -\xi_7(x)\ \ \xi_8(x)\rangle.dx$$

$$[M_6]=\int_{x=0}^{L}\rho.I_{x}.\begin{Bmatrix}-\xi_5(x)\\ \xi_6(x)\\ -\xi_7(x)\\ \xi_8(x)\end{Bmatrix}.\langle \xi_5(x)\ \ \xi_6(x)\ \ \xi_7(x)\ \ \xi_8(x)\rangle.dx$$

## 1.5 Calcul des équations d'équilibre

Les équations de Lagrange pour l'énergie cinétique de la poutre s'écrivent sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=0 \quad \text{avec} \quad \langle q\rangle=\langle u\ v\ w\rangle$$

Soit :

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial(\delta\dot{u})}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial(\delta u)}=[M_1]\{(\delta\ddot{u})\}\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial(\delta\dot{v})}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial(\delta v)}=\left([M_3]+[M_5]\right)\{(\delta\ddot{v})\}-\dot{\varphi}.[M_6]\{(\delta\dot{w})\}-\ddot{\varphi}.[M_6]\{(\delta w)\}\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial(\delta\dot{w})}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial(\delta w)}=\left([M_2]+[M_4]\right)\{(\delta\ddot{w})\}+\dot{\varphi}.[M_6]^T\{(\delta\dot{v})\}\end{cases}$$

Ces équations peuvent se mettre sous la forme :

$$[M]\langle\ddot{q}\rangle+[C_{gyro}]\langle\dot{q}\rangle+([K]+[K_{gyro}])\langle q\rangle=\langle 0\rangle$$

La matrice d'amortissement gyroscopique $[C_{gyro}]$ du système est constituée à partir de la matrice $[M_6]$ et de sa transposée. Elle est antisymétrique, et sa contribution doit être multipliée par la vitesse angulaire $\dot{\phi}$ .

En notant : $\phi=\phi_{yz}$

$$[M_6]=\frac{\rho.I_x}{30L(1+\phi)^2}\begin{bmatrix}-36 & 3L(1-5\phi) & 36 & 3L(1-5\phi)\\ -3L(1-5\phi) & L^2(4+5\phi+10\phi^2) & 3L(1-5\phi) & -L^2(1+5\phi-5\phi^2)\\ 36 & -3L(1-5\phi) & -36 & 3L(-1+5\phi)\\ -3L(1-5\phi) & -L^2(1+5\phi-5\phi^2) & -3L(-1+5\phi) & L^2(4+5\phi+10\phi^2)\end{bmatrix}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\left[C_{gyro}\right]=\frac{\rho . I_x}{30\,L(1+\phi)^2}\times$$

$$\begin{bmatrix}
- & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
 & 0 & 36 & - & -3L(1-5\phi) & 0 & - & 0 & -36 & - & -3L(1-5\phi) & 0 \\
 & & 0 & - & 0 & -3L(1-5\phi) & - & 36 & & - & 0 & -3L(1-5\phi) \\
 & & & - & - & - & - & - & & - & - & - \\
 & & & & 0 & L^2(4+5\phi+10\phi^2) & - & -3L(1-5\phi) & & - & 0 & -L^2(1+5\phi-5\phi^2) \\
 & & & & & 0 & - & 0 & -3L(1-5\phi) & - & L^2(1+5\phi-5\phi^2) & 0 \\
 & & & & & & - & - & & - & - & - \\
 & & & & & & & 0 & 36 & - & 3L(1-5\phi) & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & - & 0 & 3L(1-5\phi) \\
 & & & & & & & & & - & - & - \\
 & & & & & & & & & & 0 & L^2(4+5\phi+10\phi^2) \\
 & & & & & & & & & & & 0
\end{bmatrix}$$

Comme la matrice $\left[C_{gyro}\right]$ est anti-symétrique, seul le triangle supérieur est représenté.
(–) signifie que le degré de liberté n'est pas concerné par les matrices gyroscopiques.

La matrice de raideur gyroscopique $\left[K_{gyro}\right]$ du système est constituée à partir de la matrice $\left[M_6\right]$ .
Sa contribution doit être multipliée par l'accélération angulaire $\ddot{\phi}$ .

$$\left[K_{gyro}\right]=\frac{\rho . I_x}{30\,L(1+\phi)^2}\times$$

$$\begin{bmatrix}
- & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
- & 0 & 36 & - & -3L(1-5\phi) & 0 & - & 0 & -36 & - & -3L(1-5\phi) & 0 \\
- & 0 & 0 & - & 0 & 0 & - & 0 & & - & 0 & 0 \\
- & - & - & - & - & - & - & - & & - & - & - \\
- & 0 & 0 & - & 0 & 0 & - & 0 & & - & 0 & 0 \\
- & 0 & 3L(1-5\phi) & - & -L^2(4+5\phi+10\phi^2) & 0 & - & 0 & -3L(1-5\phi) & - & L^2(1+5\phi-5\phi^2) & 0 \\
- & - & - & - & - & - & - & - & & - & - & - \\
- & 0 & -36 & - & 3L(1-5\phi) & 0 & - & 0 & 36 & - & 3L(1-5\phi) & 0 \\
- & 0 & 0 & - & 0 & 0 & - & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
- & 0 & 0 & - & 0 & 0 & - & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\
- & 0 & 3L(1-5\phi) & - & L^2(4+5\phi+10\phi^2) & 0 & - & 0 & -3L(1-5\phi) & - & -L^2(4+5\phi+10\phi^2) & 0
\end{bmatrix}$$

La matrice pleine $\left[K_{gyro}\right]$ est remplie en entier (triangles supérieur et inférieur).

Rappel :

- avec $\langle q\rangle=\langle u_1\ v_1\ w_1\ \theta_{x1}\ \theta_{y1}\ \theta_{z1}\ u_2\ v_2\ w_2\ \theta_{x2}\ \theta_{y2}\ \theta_{z2}\rangle$
- dans le cas d'éléments poutres d'Euler (Éléments **POU_D_E**) le terme $\phi_{yz}$ est nul.

# 2 Le disque circulaire

L'objectif de ce chapitre est de caractériser les matrices gyroscopiques d'un disque circulaire infiniment rigide, soumis à une vitesse de rotation constante ou variable.

Les caractéristiques du disque sont les suivantes :

- axe du disque confondu avec l'axe de la fibre neutre de la poutre (axe $\vec{x}$ )
- centre de gravité du disque : $C$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

•rayon intérieur : $R_i$
•rayon extérieur : $R_e$
•épaisseur : $h$
•masse volumique supposée uniforme : $\rho$

Valeurs déduites :

•masse du disque : $M=\pi\,\rho\,h\,(R_e^2-R_i^2)$
•moment d'inertie massique / axes $y$ ou $z$ calculé au centre de gravité $C$ :

$$I_{yz}=\frac{M}{12}(3.R_e^2+3.R_i^2+h^2)$$

•moment d'inertie massique par rapport à l'axe $x$ calculé au centre de gravité $C$ :

$$I_x=\frac{M}{2}(R_e^2+R_i^2)$$

Remarques :

•Les axes $C\vec{x}$ , $C\vec{y}$ et $C\vec{z}$ étant axes principaux d'inertie du disque, les produits d'inertie $I_{xy}$ , $I_{yz}$ et $I_{xz}$ sont nuls.
•La symétrie du disque par rapport aux axes $C\vec{y}$ et $C\vec{z}$ impose : $I_{yz}=I_y=I_z$

Le déplacement du centre du disque est donné par : $u.\vec{x}+v.\vec{y}+w.\vec{z}$

On note :

• $\vec{\Omega}_{R/R0}$ : le vecteur vitesse de rotation du disque
• $\vec{x}.\vec{\Omega}_{R/R0}=\dot{\phi}(t)$ : vitesse de rotation propre

## 2.1 Calcul de l'énergie cinétique du disque

On calcule l'énergie cinétique du disque en appliquant la formule de Huygens :

$$T=\frac{1}{2}M.\left(\vec{V}_{C,D/R0}\right)^2+\frac{1}{2}\vec{\Omega}_{R/R0}.[J].\vec{\Omega}_{R/R0}$$

$$T=\frac{1}{2}M.\left(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2\right)^2+\frac{1}{2}\vec{\Omega}_{R/R0}.[J].\vec{\Omega}_{R/R0}$$

avec : $[J]=\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$ avec $I_{yz}=I_y=I_z$

En développant l'expression précédente, on obtient :

$$T=\frac{1}{2}\rho.\left(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2\right)^2+\frac{1}{2}I_{yz}.(\dot{\theta}_y^2+\dot{\theta}_z^2)+\frac{1}{2}I_x.(\dot{\phi}^2+2\dot{\theta}_y.\dot{\phi}.\theta_z)$$

Les différents termes de l'énergie cinétique représentent :
• pour le premier terme, l'énergie cinétique de translation,
• pour le deuxième terme, l'énergie cinétique de rotation,
• pour le terme $\frac{1}{2}I_x.\dot{\phi}^2$ , l'énergie « propre » de rotation,
• et pour le terme $I_x.(\dot{\theta}_y.\dot{\phi}.\theta_z)$ , l'effet gyroscopique.

## 2.2 Calcul des équations d'équilibre



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les équations de Lagrange sont utilisés pour formuler l'équilibre dynamique du disque. Dans ce cas particulier , l'énergie de déformation est nulle (disque infiniment rigide) et aucun effort extérieur n'est considéré, on a donc :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=0$ avec $\langle q\rangle=\langle u\ v\ w\ \theta_y\ \theta_z\rangle$ : vecteur des degrés de liberté de l'élément disque.

On ne tient pas compte du degré de liberté $\phi$ car on considère que la vitesse de rotation propre est imposée et donc connue. On obtient alors les équations suivantes :

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}\right)-\frac{\partial T}{\delta u}=M.\ddot{u}\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{v}}\right)-\frac{\partial T}{\delta v}=M.\ddot{v}\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{w}}\right)-\frac{\partial T}{\delta w}=M.\ddot{w}\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_y}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta_y}=I_{yz}.\ddot{\theta}_y+I_x.\dot{\phi}.\dot{\theta}_z+I_x.\ddot{\phi}.\theta_z\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_z}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta_z}=I_{yz}.\ddot{\theta}_z-I_x.\dot{\phi}.\dot{\theta}_y\end{cases}$$

Ces équations peuvent se mettre sous la forme :

$$[M]\langle\ddot{q}\rangle+[C_{gyro}]\langle\dot{q}\rangle+([K]+[K_{gyro}])\langle q\rangle=\langle 0\rangle$$

La matrice d'amortissement gyroscopique du disque s'obtient à partir du moment d'inertie $I_x$. Elle est antisymétrique, et sa contribution doit être multipliée par la vitesse angulaire propre $\dot{\phi}$.

$$[C_{gyro}]=\dot{\phi}.\begin{bmatrix}0&0&0&-&0&0\\0&0&0&-&0&0\\0&0&0&-&0&0\\-&-&-&-&-&-\\0&0&0&-&0&I_x\\0&0&0&-&-I_x&0\end{bmatrix}$$

avec $\langle u\ v\ w\ \theta_x\ \theta_y\ \theta_z\rangle$ vecteur des degrés de libertés de l'élément disque et tel que : $\dot{\theta}_x=\dot{\phi}$
Le tiret correspond au degré de liberté de rotation suivant l'axe de la poutre et conduit bien évidemment à des termes nuls.

La matrice de raideur gyroscopique du disque s'obtient aussi à partir du moment d'inertie $I_x$. Sa contribution doit être multipliée par l'accélération angulaire propre $\ddot{\phi}$.

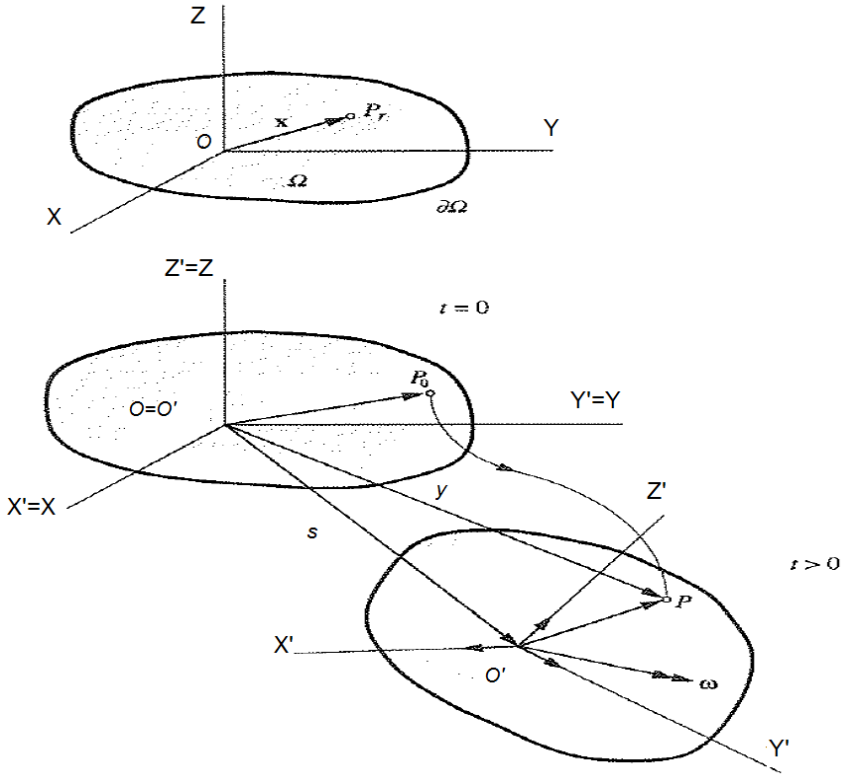


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\left[K_{gyro}\right]=\ddot{\Phi}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & I_x \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# 3 L'élément 3D volumique

La mise en équation d'une structure mobile peut se faire, soit dans le repère galiléen fixe (OXYZ), soit dans le repère d'inertie (O'X'Y'Z') attaché à la structure.




Pour une analyse dynamique, le choix du repère d'inertie comme système de référence permet de simplifier la formulation des équations différentielles régissant leur comportement dynamique.

Ce choix permet de caractériser l'effet Coriolis (effet gyroscopique vu du rotor) qui s'ajoute à l'amortissement. Aussi, deux autres effets de type raideur apparente s'ajoutent à la matrice de raideur : il s'agit de l'effet centrifuge et de l'effet gyroscopique associé à la variation de vitesse.

## 3.1 Position en mouvement dans le repère tournant

En toute généralité, on considèrera que référentiel mobile, dont l'origine est caractérisée par une translation $\mathbf{s}(t)={}^t(s_x, s_y, s_y)$ par rapport au repère d'inertie, tourne à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}={}^t(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ autour d'un axe quelconque passant par l'origine. Il est important de noter que les composantes de la vitesse de rotation sont mesurées dans repère corotationnel. On notera $\boldsymbol{\omega}'$ la projection de cette vitesse de rotation dans le repère fixe, ie $\boldsymbol{\omega}={}^t\mathbf{R}\,\boldsymbol{\omega}'$ où $\mathbf{R}(t)$ est la matrice de


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

changement de base, formé des cosinus directeurs des vecteurs de base du repère d'inertie, exprimés dans le référentiel fixe.

La position d'un point P dans le référentiel d'inertie (OXYZ), notée $\mathbf{y}$ , a alors pour expression :

$$\mathbf{y}=\mathbf{s}(t)+\mathbf{R}(t)\left[\mathbf{x}+\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\right]$$

où $\mathbf{x}$ est la position initiale du point P dans le système inertiel et $\mathbf{u}$ est le vecteur déplacement résultant de la déformation dynamique de la structure à un instant donné t.

La vitesse absolue $\dot{\mathbf{y}}$ du point P est définie comme étant la dérivée première par rapport au temps du vecteur $\mathbf{y}$ . Elle s'écrit :

$$\dot{\mathbf{y}}=\dot{\mathbf{s}}+\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x}+\mathbf{u})+\mathbf{R}\,\dot{\mathbf{u}}$$

où $\dot{\mathbf{s}}$ est la vitesse de translation de l'origine O' du repère tournant, écrite dans le repère fixe.

On démontre que la dérivée $\dot{\mathbf{R}}$ de la matrice de changement de base peut également s'écrire comme étant le produit vectoriel entre le vecteur de rotation dans le repère fixe $\boldsymbol{\omega}'$ et la matrice de changement de base $\mathbf{R}$ ou alors comme étant le produit de la matrice $\mathbf{R}$ et de la matrice antisymétrique $\boldsymbol{\Omega}$ qui englobe les trois composantes du tenseur de rotation dans le repère d'inertie $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\dot{\mathbf{R}}=\boldsymbol{\omega}'\wedge\mathbf{R}=\mathbf{R}\,\boldsymbol{\Omega} \text{ avec } \Omega=\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}$$

En insérant cette définition dans l'expression de la vitesse absolue, il en résulte que :

$$\dot{\mathbf{y}}=\dot{\mathbf{s}}+\boldsymbol{\omega}'\wedge\mathbf{R}(\mathbf{x}+\mathbf{u})+\mathbf{R}\,\dot{\mathbf{u}}$$

L'accélération absolue $\ddot{\mathbf{y}}$ du point P est définie comme étant la dérivée seconde par rapport au temps du vecteur vitesse $\mathbf{y}$ . Elle s'écrit :

$$\ddot{\mathbf{y}}=\ddot{\mathbf{s}}+\dot{\boldsymbol{\omega}}'\wedge\mathbf{R}(\mathbf{x}+\mathbf{u})+\boldsymbol{\omega}'\wedge[\,'\boldsymbol{\omega}'\wedge\mathbf{R}(\mathbf{x}+\mathbf{u})]+2\,\boldsymbol{\omega}'\wedge\mathbf{R}\,\dot{\mathbf{u}}+\mathbf{R}\,\ddot{\mathbf{u}}$$

avec $\ddot{\mathbf{s}}$ l'accélération de translation de l'origine O' du repère tournant, écrite dans le repère fixe et $\dot{\boldsymbol{\omega}}'$ est l'accélération instantanée de rotation définie par la relation $\dot{\boldsymbol{\omega}}={}^{t}\mathbf{R}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}'$ .

Par souci de clarté et sans perdre la généralité, on supposera dans la suite du document que l'origine O' du repère tournant est fixe, ie. $\dot{\mathbf{s}}=\ddot{\mathbf{s}}=0$ .

Après pré-multiplication par la transformation inverse ${}^{t}\mathbf{R}$ , on obtient alors la vitesse et l'accélération absolues exprimées dans le référentiel mobile :

$${}^{t}\mathbf{R}\,\dot{\mathbf{y}}=\dot{\mathbf{u}}+\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{R}(\mathbf{x}+\mathbf{u})$$

$${}^{t}\mathbf{R}\,\ddot{\mathbf{y}}=\ddot{\mathbf{u}}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\wedge(\mathbf{x}+\mathbf{u})+\boldsymbol{\omega}\wedge[\boldsymbol{\omega}\wedge(\mathbf{x}+\mathbf{u})]+2\,\boldsymbol{\omega}\wedge\dot{\mathbf{u}}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans cette expression, qui représente le théorème de la composition des accélérations d'un point matériel, on reconnaît les termes :

- d'accélération relative $\ddot{\mathbf{u}}$ , qui contribue à la matrice de masse;
- d'accélération d'entraînement $\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\mathbf{x}+\mathbf{u}) + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}+\mathbf{u})]$ (somme de l'effet Euler due à l'accélération de rotation et de l'effet d'adoucissement centrifuge, qui contribuent à la matrice de raideur);
- d'accélération complémentaire ou de Coriolis $2\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{u}}$ , qui contribue à la matrice d'amortissement.

## 3.2 Expression des énergies cinétique et potentielle

Sous sa forme générale, l'énergie cinétique est obtenue à partir de la vitesse absolue $\mathbf{y}$ comme suit :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho\, \dot{\mathbf{y}}^t \dot{\mathbf{y}}\; d\,\Omega$$

Le développement des termes donne l'expression suivante en fonction du déplacement $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho\, \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{u}}\; d\,\Omega + \int_{\Omega} \rho\, \dot{\mathbf{u}}^t \boldsymbol{\Omega}\, \mathbf{u}\; d\,\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho\, \mathbf{u}^t \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{u}\; d\,\Omega - \int_{\Omega} \rho\, \mathbf{u}^t \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x}\; d\,\Omega + \int_{\Omega} \rho\, \dot{\mathbf{u}}^t \boldsymbol{\Omega}\, \mathbf{x}\; d\,\Omega$$
$$- \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho\, \mathbf{x}^t \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x}\; d\,\Omega$$

L'énergie potentielle du système (énergie de déformation interne et travail des forces externes) a pour expression classique :

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\Lambda}\, \boldsymbol{\varepsilon}\; d\,\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^t \mathbf{f}\; d\,\Omega - \int_{\partial\Omega_\sigma} \mathbf{u}^t \mathbf{t}\; d\,(\partial\Omega)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le vecteur associé au tenseur des déformations, $\boldsymbol{\Lambda}$ est la matrice de comportement et où $\mathbf{f}$ et $\mathbf{t}$ sont, respectivement, les vecteurs des forces volumiques et surfaciques externes.

On approche le vecteur déplacement par la méthode des éléments finis. Pour ce faire, on utilisera les fonctions de forme classiques décrites dans le document [R3.01.01]. Le déplacement s'écrit alors sous la forme du produit d'une matrice d'interpolation des déplacements, notée $\mathbf{B}$ , et d'un vecteur des coordonnées généralisées $\mathbf{q}$ .

Les énergies cinétique et potentielle du corps déformable s'écrivent alors en fonction des matrices structurelles comme suit :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t [\mathbf{M}] \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t [\mathbf{G}] \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^t [\mathbf{N}] \mathbf{q} - \mathbf{q}^t \int_{\Omega} \rho\, \mathbf{B}^t \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x}\; d\,\Omega + \dot{\mathbf{q}}^t \int_{\Omega} \rho\, \mathbf{B}^t \boldsymbol{\Omega}\, \mathbf{x}\; d\,\Omega$$
$$- \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho\, \mathbf{x}^t \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x}\; d\,\Omega$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^t [\mathbf{K}] \mathbf{q} - \mathbf{q}^t \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \mathbf{f}\; d\,\Omega - \mathbf{q}^t \int_{\partial\Omega_\sigma} \mathbf{B}^t \mathbf{t}\; d\,(\partial\Omega)$$

Les trois premiers termes de l'énergie cinétique mettent en évidence les matrices :

- de masse $[\mathbf{M}] = \int_{\Omega} \rho\, \mathbf{B}^t \mathbf{B}\; d\,\Omega$ ;



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- de Coriolis $[\mathbf{G}]=2\int_{\Omega}\rho\,\mathbf{B}^t\boldsymbol{\Omega}\,\mathbf{B}\;d\,\Omega$ ;
- d'accélération centrifuge $[\mathbf{N}]=\int_{\Omega}\rho\,\mathbf{B}^t\boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{B}\;d\,\Omega$ .

Le premier terme de l'énergie potentielle met en évidence la matrice de raideur $[\mathbf{K}]=\int_{\Omega}\nabla\,\mathbf{B}^t\,\boldsymbol{\Lambda}\nabla\,\mathbf{B}\;d\,\Omega$ .

## 3.3 Calcul des équations d'équilibre du système en rotation

En faisant abstraction d'une éventuelle fonction classique de dissipation, caractérisée par la matrice d'amortissement, les équations de Lagrange pour les énergies cinétique et potentielle du solide s'écrivent comme suit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right)-\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\mathbf{q}}+\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\mathbf{q}}=0$$

En insérant les expressions des énergies dans les équations de Lagrange, on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[[\mathbf{M}]\dot{\mathbf{q}}+\frac{1}{2}[\mathbf{G}]\mathbf{q}+\frac{1}{2}[\mathbf{G}]\dot{\mathbf{q}}+[\mathbf{N}]\,\mathbf{q}+\int_{\Omega}\rho\,\mathbf{B}^t\boldsymbol{\Omega}\,\mathbf{x}\;d\,\Omega+\int_{\Omega}\rho\,\mathbf{B}^t\boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{x}\;d\,\Omega+[\mathbf{K}]\,\mathbf{q}-\int_{\Omega}\mathbf{B}^t\mathbf{f}\;d\,\Omega\right]$$
$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\int_{\partial\Omega_\sigma}\mathbf{B}^{\mathbf{t}}\mathbf{t}\;d\,(\partial\,\Omega)\right]=0$$

En explicitant la dérivée temporelle et en tenant compte de la dérivée de la matrice de transformation dans les équations de Lagrange, on obtient, après simplification et réarrangement des termes, la forme matricielle suivante :

$$[\mathbf{M}]\langle\ddot{\mathbf{q}}\rangle+[\mathbf{G}]\langle\dot{\mathbf{q}}\rangle+([\mathbf{K}]+[\mathbf{P}]+[\mathbf{N}])\langle\mathbf{q}\rangle=\langle\mathbf{r}\rangle$$

$[\mathbf{P}]$ est la matrice d'accélération angulaire, définie par $[\mathbf{P}]=\frac{1}{2}[\dot{\mathbf{G}}]=\int_{\Omega}\rho\,\mathbf{B}^t\dot{\boldsymbol{\Omega}}\,\mathbf{B}\;d\,\Omega$ , avec :

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}=\begin{bmatrix}0 & -\dot{\omega}_z & \dot{\omega}_y\\ \dot{\omega}_z & 0 & -\dot{\omega}_x\\ -\dot{\omega}_y & \dot{\omega}_x & 0\end{bmatrix}$$

$\langle\mathbf{r}\rangle$ est le vecteur réunissant les termes du membre de droite. Il regroupe les excitations externes $\int_{\Omega}\mathbf{B}^{\mathbf{t}}\mathbf{f}\;d\,\Omega+\int_{\partial\Omega_\sigma}\mathbf{B}^t\mathbf{t}\;d\,(\partial\,\Omega)$ et la précontrainte centrifuge $-\int_{\Omega}\rho\,\mathbf{B}^t(\dot{\boldsymbol{\Omega}}\,\mathbf{x}+\boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{x})\;d\,\Omega$ ).

# 4 Description des versions

| Version Aster | Auteur(s) Organisme(s) | Description des modifications |
|---|---|---|
| 9.4 | E. BOYERE, X. RAUD EDF/R&D AMA | Texte initial |
| 9,8 | M. Torkhani EDF/R&D AMA | Correction de coquilles |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)