Réponse harmonique

Résumé

Ce document présente les bases théoriques du calcul du régime permanent de la réponse d'un système mécanique complexe, à comportement linéaire, soumis à une sollicitation dynamique harmonique. Le calcul porte indifféremment directement sur le système modélisé en éléments finis, ou bien représenté par une base modale ; dans ce dernier cas si la base modale est le produit de la technique de sous-structuration on se référera au document [R4.06.03].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

1 Introduction....3
2 Équation harmonique....4
2.1 Équation harmonique des structures....4
2.1.1 Calcul direct des structures élastiques....4
2.1.2 Calcul sur base modale de structure élastique....4
2.1.3 Calcul direct des structures viscoélastiques....5
2.2 Équation harmonique des fluides acoustiques....5
2.3 Équation harmonique des systèmes fluides-structures....6
2.4 Équation harmonique générale....6
3 Bibliographie....8

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Dans les problèmes harmoniques, le système étudié est soumis à une excitation variant comme le produit d'une fonction quelconque de l'espace par une fonction sinusoïdale du temps.
Rechercher la réponse consiste à calculer le champ des grandeurs représentées par les degrés de liberté de la modélisation en éléments finis du système. Quand le système a un comportement linéaire la réponse du champ des grandeurs observées tend rapidement (du fait de l'extinction de sa composante transitoire par dissipation interne) vers un régime permanent : le champ résultant varie finalement harmoniquement comme l'excitation. C'est ce régime permanent de la réponse qu'on se propose de calculer.

Notations générales :

t : temps
P : Point courant du modèle
ω : Pulsation ($rad.s^{-1}$)
j : Imaginaire pur unitaire $\left(j^2=-1\right)$
$\mathbf{M}$: Matrice de masse issue de la modélisation éléments finis
$\mathbf{K}$: Matrice de rigidité issue de la modélisation éléments finis
$\mathbf{C}$: Matrice d'amortissement issue de la modélisation éléments finis
$\mathbf{q}$: Vecteur des degrés de liberté issus de la modélisation éléments finis
$\mathbf{f}_{ext}$: Vecteur des forces extérieures au système
$\mathbf{\Phi}$: Matrice des vecteurs de la base des sous-structures
$\mathbf{\eta}$: Vecteur des degrés de liberté généralisés

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Équation harmonique

Nous établissons l'équation dynamique dans le cas d'une sollicitation harmonique pour trois sortes de systèmes mécaniques :

- les structures pures (sans fluide),
- les fluides purs (sans structure) à comportement de type acoustique linéaire,
- les systèmes mixtes structures et fluides en interaction fluide-structure.

2.1 Équation harmonique des structures

Le comportement vibratoire d'une structure pure résulte des forces extérieures qui lui sont appliquées. La grandeur à calculer est le déplacement en tout point P du modèle.

2.1.1 Calcul direct des structures élastiques

Dans le cas du calcul direct sur le modèle en éléments finis nous pouvons écrire :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}+\mathbf{K}\,\mathbf{u}=\mathbf{f}_{ext}(P,t) \tag{1}$$

où $\mathbf{M}$ est la matrice (réelle) de masse, $\mathbf{C}$ est la matrice (réelle) d'amortissement, $\mathbf{K}$ est la matrice (réelle) de rigidité, $\mathbf{f}_{ext}(P,t)$ est le vecteur (complexe) de champ des forces extérieures appliquées à S. Enfin $\mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{u}}$ et $\ddot{\mathbf{u}}$ sont les vecteurs (complexes) déplacement, vitesse et accélération, fonctions de P et t.
Dans un problème harmonique, on impose un chargement dynamique, spatialement quelconque, mais sinusoïdal dans le temps. On s'intéresse alors a la réponse stabilisée du système, sans tenir compte de la partie transitoire. Le champ des forces extérieures s'écrit :

$$\mathbf{f}_{ext}(P,t)=\{\mathbf{f}_{ext}(P)\}e^{j\omega t} \tag{2}$$

Le champ des déplacements s'écrit :

$$\mathbf{u}(P,t)=\{\mathbf{u}(P)\}e^{j\omega t} \tag{3}$$

Les champs de vitesse et d'accélération s'écrivent par dérivation temporelle des déplacements:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}(P,t)&=j\omega\{\mathbf{u}(P)\}e^{j\omega t}\\ \ddot{\mathbf{u}}(P,t)&=-\omega^2\{\mathbf{u}(P)\}e^{j\omega t}\end{aligned} \tag{4}$$

Finalement la structure S vérifie l'équation suivante :

$$(\mathbf{K}+j\omega\mathbf{C}-\omega^2\mathbf{M})\{u\}=\{\mathbf{f}_{ext}(P)\} \tag{5}$$

2.1.2 Calcul sur base modale de structure élastique

Le calcul de la réponse harmonique par la méthode de synthèse modale consiste a rechercher le champ de déplacement inconnu, issu de la modélisation éléments finis, sur un espace approprié, de dimension réduite (transformation de Ritz). On se référera aux documents [R4.06.02] et [R4.06.03].

Si on utilise plutôt cette méthode l'équation (5) est projetée sur la base modale de S et on aboutit à l'équation harmonique suivante :

$$(\overline{\mathbf{K}}+j\omega\overline{\mathbf{C}}-\omega^2\overline{\mathbf{M}})\{\eta\}=\{\bar{\mathbf{f}}_{ext}\} \tag{6}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

où $\overline{\mathbf{M}}=\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}$ est la matrice (réelle) de masse généralisée, $\overline{\mathbf{C}}=\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}$ est la matrice (réelle) d'amortissement généralisé, $\overline{\mathbf{K}}=\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{\Phi}$ est la matrice (réelle) de rigidité généralisée et $\{\overline{\mathbf{f}}_{ext}\}=\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\{\mathbf{f}_{ext}\}$ est le vecteur (complexe) des forces extérieures harmoniques généralisées appliquées.
On a noté $\mathbf{\Phi}$ la matrice (réelle) des vecteurs modaux de la base de Ritz, $\{\boldsymbol{\eta}(P)\}$ est le vecteur (complexe) des déplacements harmoniques généralisés.
Une fois $\{\boldsymbol{\eta}(P)\}$ déterminé par (6) on fait une restitution sur base physique (cf. [R4.06.02]).

2.1.3 Calcul direct des structures viscoélastiques

La loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire est du type $\boldsymbol{L}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{\epsilon}$ où $\boldsymbol{L}\,et\,\boldsymbol{M}$ sont des opérateurs différentielles linéaires de la variable temps (voir [R5.05.04]). Dans le domaine harmonique, cette loi de comportement devient du type $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{H}_c(\omega)\boldsymbol{\epsilon}$ où $\boldsymbol{H}_c(\omega)$ est un tenseur complexe dépendant de la pulsation. L'équation discrétisée de la structure s'écrit alors en harmonique :

$$\left(\mathbf{K}_{\mathrm{r}}(\omega)+j\mathbf{K}_{\mathrm{i}}(\omega)-\omega^2\mathbf{M}\right)\{u\}=\{\mathbf{f}_{ext}(P)\} \tag{7}$$

On note $\mathbf{K}_{\mathrm{c}}=\mathbf{K}_{\mathrm{r}}(\omega)+j\mathbf{K}_{\mathrm{r}}(\omega)$ la matrice de rigidité complexe dépendant de la fréquence.

Cas particulier : si l'amortissement est de type **hystérétique** « global » , la loi de comportement s'écrit $\boldsymbol{\sigma}=(1+j\,\eta)\boldsymbol{H}\boldsymbol{\epsilon}$ où $\boldsymbol{H}$ est le tenseur de Hooke réel et $\boldsymbol{\eta}$ est un coefficient de perte global (cf. [R5.05.04]). L'équation (7) s'écrit alors :

$$\left((1+j\,\eta)\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}\right)\{u\}=\{\mathbf{f}_{ext}(P)\} \tag{8}$$

On note que $\mathbf{K}_{\mathrm{c}}=\mathbf{K}+j\,\eta\mathbf{K}$ est une matrice de rigidité *complexe* . qui ne dépend plus de la fréquence.

2.2 Équation harmonique des fluides acoustiques

Le document [R4.02.01] décrit la modélisation par éléments finis d'un système fluide (sans transport) ayant un comportement acoustique linéaire.
Le système fluide F subit une sollicitation harmonique de vitesse acoustique sur une partie de sa frontière. La réponse harmonique est décrite par l'équation suivante, où la grandeur à calculer est la pression acoustique en tout point P du modèle.

$$\left(\mathbf{K}+j\,\omega\mathbf{C}-\omega^2\mathbf{M}\right)\{\mathbf{p}(P)\}=-j\,\omega\{\mathbf{v}_{\mathrm{n}}(P)\} \tag{9}$$

où $\mathbf{M}$ est la matrice (complexe) de « masse » acoustique, $\mathbf{C}$ est la matrice (complexe) d'« amortissement » acoustique (et en l'espèce du bord $\partial_z F$ où l'on applique une impédance acoustique) et $\mathbf{K}$ est la matrice (complexe) de « rigidité » acoustique.
On note $\mathbf{v}_{\mathrm{n}}(P,t)=\{\mathbf{v}_{\mathrm{n}}(P)\}e^{j\omega t}$ la vitesse, avec $\{\mathbf{V}_{\mathrm{n}}(P)\}$ le vecteur (complexe) de champ des vitesses acoustiques normales appliquées à la frontière $\partial_v F$ de F où l'on applique des vitesses acoustiques et $\mathbf{p}(P,t)=\{\mathbf{p}(P)\}e^{j\omega t}$ la pression, avec $\{\mathbf{p}(P)\}$ le vecteur (complexe) des pressions acoustiques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.3 Équation harmonique des systèmes fluides-structures

Le document [R4.02.02] décrit la modélisation par éléments finis d'un système $F+S$ constitué d'une partie fluide (sans transport) F en interaction avec une partie structure S (interaction en $F \cup S$). Fluide et structure ont un comportement linéaire.

Le système fluide F subit une sollicitation harmonique de vitesse acoustique normale sur une partie de sa frontière. La réponse harmonique est décrite par l'équation suivante où les grandeurs à calculer sont :

- la pression acoustique en tout point P du fluide F ,
- le déplacement en tout point P de la structure S ,
- auxiliairement le potentiel φ de déplacement en tout point P du fluide F ou d'autres variables auxiliaires décrites dans [R4.02.02].

$$\left(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}-j\,\omega^3\mathbf{I}\right)\begin{Bmatrix}\mathbf{u}(P)\\ \mathbf{p}(P)\\ \varphi(P)\end{Bmatrix}=+\,j\,\omega\{\mathbf{v_n}(P)\} \tag{10}$$

où $\mathbf{M}$ est la matrice (réelle) de « masse » fluide-structure issue des domaines F et S , $\mathbf{I}$ est la matrice (réelle) d' « impédance » fluide issue du bord $\partial_z F$ du domaine F où l'on applique une impédance et $\mathbf{K}$ est la matrice (réelle) de « rigidité » fluide-structure issue des domaines F et S .

Les champs solutions de forme harmonique. $\mathbf{v_n}(P,t)=\{\mathbf{v_n}(P)\}e^{j\omega t}$ est le vecteur (réel) du champ des vitesses acoustiques normales appliquées à la frontière $\partial_v F$ de F , $\mathbf{u}(P,t)=\{\mathbf{u}(P)\}e^{j\omega t}$ est le vecteur (complexe) du champ de déplacement dans la structure S , $\mathbf{p}(P,t)=\{\mathbf{p}(P)\}e^{j\omega t}$ est le vecteur (complexe) du champ de pression acoustique dans le fluide F et $\varphi(P,t)=\{\varphi(P)\}e^{j\omega t}$ est le vecteur (complexe) du champ de potentiel de déplacement dans le fluide F .

2.4 Équation harmonique générale

Dans le but de prendre en compte tous les cas d'équations harmoniques l'opérateur DYNA_VIBRA résout l'équation harmonique générale suivante :

$$\left(-j\,\omega^3\mathbf{I}-\omega^2\mathbf{M}+j\,\omega\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\{\mathbf{q}\}=\left\{\sum_{i=1}^{k}h_i(f)\cdot\omega^{n_i}\cdot e^{j\pi\frac{\varphi_i}{180}}\cdot\mathbf{g_i}(P)\right\} \tag{11}$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice d' « impédance » fluide éventuelle, $\mathbf{M}$ est la matrice de « masse », $\mathbf{C}$ la matrice d' « amortissement » et $\mathbf{K}$ la matrice de « rigidité ».

La solution est $\{\mathbf{q}(P)\}$. Le second membre contient $\{\mathbf{g_i}(P)\}$ qui est un vecteur champ aux nœuds correspondant à une ou plusieurs charges de force ou vitesse acoustique ou potentiel ou mouvement imposé,

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$h_i(f)$ une fonction réelle ou complexe de la fréquence f , $\omega=2\pi f$ est la pulsation, n_i est la puissance de la pulsation quand le chargement est fonction de la pulsation et φ_i est la phase en degrés de chaque composante de l'excitation par rapport à une référence de phase.

A titre d'exemple si on prend le cas d'un système de fluide modélisé en acoustique, sans degrés de liberté imposés, simplement sollicité sur une partie de sa frontière par un champ de vitesse normale $\mathbf{v_n}(P,t)=\{\mathbf{v_n}(P)\}e^{j\omega t}$, les termes de l'équation (11) deviennent :

$$\left(-\omega^2\mathbf{M}+j\omega\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\{\mathbf{p}\}=-\omega\left\{\mathbf{v_n}(P)\right\} \quad (12)$$

- pas de composante d'impédance $\mathbf{I}$,
- matrice de masse acoustique $\mathbf{M}$,
- *Éventuellement* , une matrice d'amortissement $\mathbf{C}$ issue de la modélisation éléments finis acoustique si impédance sur frontière,
- matrice de rigidité acoustique $\mathbf{K}$,
- le vecteur des inconnues $\{\mathbf{q}(P)\}$ est réduit à $\{\mathbf{p}(P)\}$, vecteur des pressions aux nœuds
- le chargement $\{\mathbf{g_i}(P)\}$ est $\{\mathbf{v_n}(P)\}$, vecteur champ de vitesse normale aux faces
- $h_i(f)$ est constant et vaut $-1.$
- la puissance n_i vaut 1 et la phase φ_i est nulle

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Bibliographie

1) R. DAUTRAY, J-L. LIONS, "Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques", Tome 2, Masson, 1985.

2) G. DHATT, G. TOUZOT, "Une présentation de la méthode des éléments finis", Maloine S.A., Paris, 1984.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)