Lois de comportement d'endommagement ductile plastique et viscoplastique GTN et VISC_GTN

Résumé :

Ce document décrit le modèle d'endommagement ductile de Gurson – Tvergaard – Needleman (GTN). Il est disponible en version locale et à gradient de variables internes (GRAD_VARI ou GRAD_INCO). La modélisation des grandes déformations est accessible via la cinématique GDEF_LOG . Le comportement peut être indépendant du temps (GTN) ou viscoplastique (VISC_ GTN). Dans ce dernier cas, la plasticité évolue selon un modèle de Norton dans lequel intervient la fonction seuil.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Domaine d'application

1.1 Finalité

L'endommagement ductile des matériaux métalliques résulte à gros traits de trois mécanismes : la germination de cavités, leur croissance au sein d'une matrice élastoplastique et leur coalescence. [Gurson, 19 77] a proposé un modèle de comportement d'inspiration micromécanique à même de rendre compte de manière simple de la croissance des cavités. Il a été complété de manière phénoménologique d ans [Tvergaard & Needleman, 1984] pour représenter également les étapes de germination et de coalescence : on parle alors du modèle GTN.

L'évolution de la porosité (volume des cavités rapporté au volume total) se traduit par un adoucissement du matériau, c'est-à-dire une baisse de la capacité à résister aux contraintes. Cela se traduit souvent par une localisation des déformations et de la porosité dans des bandes de faible épaisseur. Les forts gradients qui en résultent requièrent alors une extension de la loi de comportement pour prendre en compte des interactions à distance : on parle de formulations non locales du comportement. Une telle extension a été proposée pour le modèle GTN [Zhang et al., 2018] qui s'appuie sur le gradient de la variable interne d'écrouissage (GRAD_VARI, GRAD_INCO) selon [Lorentz & Andrieux, 1999]. C'est la formulation introduite dans code_aster.

Ces phénomènes se déroulent en général à des niveaux de déformation qui requièrent une cinématique non linéaire. Ici, elle s'appuie sur la déformation logarithmique (GDEF_LOG). Par ailleurs, à ces niveaux de déformation, la plasticité induit dans un premier temps un comportement quasi-incompressible. Pour s'affranchir des problèmes de verrouillage numérique qui peuvent en résulter, on recommande l'emploi d'une formulation mixte (GRAD_INCO), éventuellement complétée par un terme de pénalisation. Le modèle est toutefois disponible également en petites déformations (PETIT) ainsi qu'en l'absence d'une formulation mixte (GRAD_VARI), voire même en formulation locale du comportement (éléments finis standard).

Les effets de vitesse du chargement peuvent être pris en compte à travers une formulation viscoplastique sur la base d'une loi de Norton (VISC_GTN) ou bien ignorés (GTN). Ajoutons que la régularisation visqueuse [R5.03.34] est également recommandée pour stabiliser le comportement des points totalement cassés et donc sans résistance à la contrainte.

Enfin, p récisons que la partie élastique du modèle est exprimée de manière explicite, c'est-à-dire que la contrainte s'exprime comme une fonction de la déformation et de la déformation plastique à l'état courant. Il n'y a donc pas d'évolution incrémentale de la contrainte ; elle ne contribue pas à définir l'état mécanique du système, c'en est une conséquence

Remarque : en particulier, la contrainte n'entre pas dans la définition d'un état initial du système, l'état initial donné dans STAT_NON_LINE/ETAT_INIT par SIGM est donc ignoré.

1.2 Paramètres matériaux

L'expression modulaire de la relation de comportement permet de regrouper les différents paramètres du modèle par catégories:

- la partie élastique est isotrope et dépend du module de Young E et du coefficient de Poisson ν définis sous le mot-clé facteur ELAS (E, NU) de la commande DEFI_MATERIAU ;
- les paramètres de l'écrouissage isotrope sont définis sous le mot-clé facteur ECRO_NL (R0, RH, R1, GAMMA_1, R2, GAMMA_2, RK, P0, GAMMA_K) ;
- les paramètres d'endommagement du modèle sont rassemblés sous le mot-clé facteur GTN
  - Croissance de cavités : PORO_INIT, Q1 et Q2
  - Germination avec distribution de Gauss : NUCL_GAUSS_PORO f_N , NUCL_GAUSS_PLAS κ_N , NUCL_GAUSS_DEV s_N

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Germination avec distribution uniforme sur un intervalle : NUCL_CRAN_PORO c_0 , NUCL_CRAN_INIT κ_i , NUCL_CRAN_FIN κ_f
- Germination proportionnelle à la déformation plastique cumulée à partir d'un seuil : NUCL_EPSI_INIT E_c^p , NUCL_EPSI_PENTE b_0
- Coalescence : COAL_PORO f_c, COAL_ACCE δ_c (notons que la porosité à rupture f_F est alors égale à :

$$f_F=\left(1-\frac{1}{\delta}\right)f_c+\frac{1}{\delta}\frac{1}{q_1} \quad (1)$$

- les paramètres de la loi de viscosité de Norton, lorsqu'elle est présente, sont définis sous le mot-clé facteur NORTON (coefficient K et exposant N)
- en formulation non locale [R5.04.01], il faut également définir les paramètres correspondants sous le mot-clé facteur NON_LOCAL (C_GRAD_VARI , PENA_LAGR et PENA_LAGR_ INCO).

Les paramètres peuvent dépendre de la température (mots-clés facteur *_FO). La loi de comportement est exprimée en déformations mécaniques, c'est-à-dire qu'elle est compatible avec les termes de retrait usuels, notamment la déformation thermique.

1.3 Variables internes

La loi de comportement s'appuie sur douze variables internes. Elles sont regroupées dans le tableau suivant :

EPSEQ	V1	Variable d'écrouissage κ
POROSITE	V2	Porosité
INDIPLAS	V3	État du pas de temps courant (0, 1, 2 ou 3)
EPSPXX - EPSPYZ	V4 - V9	Composantes de la déformation plastique
EPCUM	V10	Déformation plastique cumulée E_{eq}^p
PORO_NUC	V11	Porosité liée à la germination f^{nu}
PORO_LOG	V12	Porosité logarithmique $\ln f-\ln f_0$

L'indicateur de plasticité dépend du régime de comportement pendant le pas de temps courant, avec comme valeurs 0=élastique, 1=plastique à écoulement régulier, 2=plastique à écoulement singulier (régime de pointe du cône) et 3=point cassé ($f=f_F$). Il n'est introduit qu'à des fins de post-traitement.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Modèle continu

2.1 Équations de comportement : modèle plastique local

On se place en grandes déformations logarithmiques, en notant $\boldsymbol{E}$ la déformation mécanique (logarithmique) et $\boldsymbol{T}$ la contrainte associée (par dualité). Les variables internes du modèle consistent en la déformation plastique $\boldsymbol{E^p}$, la variable d'écrouissage κ, la porosité f et la déformation plastique cumulée (qui gouverne une partie de la porosité de germination).

Tout d'abord, la relation contrainte – déformation s'appuie sur une décomposition additive en une partie plastique et une partie élastique :

$$\boldsymbol{T}=K\,tr(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E^p})\boldsymbol{Id}+2\mu\,dev(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E^p}) \text{ avec } 3K=\frac{E}{1-2\nu} \text{ et } 2\mu=\frac{E}{1+\nu} \quad (2)$$

où $tr()$ et $dev()$ désignent respectivement la trace et le déviateur d'un tenseur d'ordre deux.

La fonction seuil de plasticité notée F dépend du niveau d'écrouissage κ à travers la fonction d'écrouissage $R(\kappa)$, d'une mesure (isotrope) de l'intensité des contraintes notée T_* qui dépend aussi de la porosité (sur laquelle on revient ci-après) et de la déformation à travers le Jacobien de la transformation $J=\exp(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{E})$:

$$F(\boldsymbol{T},\kappa\ ;\ f,\boldsymbol{E})=\frac{T_*(\boldsymbol{T},f)}{J(\boldsymbol{E})}-R(\kappa) \quad (3)$$

La fonction d'écrouissage est identique à celle déployée dans la loi VMIS_ISOT_NL [R5.03.33], soit :

$$R(\kappa)=R_0+R_H\kappa+R_1(1-e^{-\gamma_1\kappa})+R_2(1-e^{-\gamma_2\kappa})+R_K(p_0+\kappa)^{\gamma_K} \quad (4)$$

Elle dépend au plus de neuf paramètres dont certains peuvent rester nuls si on ne souhaite pas activer tous les termes de l'expression (choix par défaut).

La définition de la contrainte de Gurson T_* est implicite. À contrainte $\boldsymbol{T}$ et porosité f données, T_* est la solution de l'équation suivante :

$$G(\boldsymbol{T},T_*,f)=0 \quad ; \quad G(\boldsymbol{T},T_*,f)\equiv\left(\frac{T_{eq}}{T_*}\right)^2+2q_1f^*\mathrm{ch}\left(\frac{3}{2}q_2\frac{T_H}{T_*}\right)-1-\left(q_1f^*\right)^2 \quad (5)$$

où q_1 et q_2 sont deux paramètres matériau et où on a introduit les invariants de la contrainte :

$$T_H=\frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}) \text{ et } T_{eq}=\sqrt{\frac{3}{2}\mathrm{dev}(\boldsymbol{T}):\mathrm{dev}(\boldsymbol{T})} \quad (6)$$

L'expression de T_* dépend également de f^* qui est une fonction de la porosité pour rendre compte de la coalescence. E lle s'exprime comme suit, où f_c désigne la porosité à coalescence et f_F la porosité à rupture :

$$f^*=\begin{cases} f & \text{si } f<f_c \\ f_c+\delta(f-f_c) & \text{si } f\geq f_c \end{cases} \quad (7)$$

Il apparaît que q_1f^* tient le rôle d'un endommagement effectif ; on le notera d :

$$d\equiv q_1f^* \quad (8)$$

On peut alors reformuler la surface seuil comme suit :

$$G(\boldsymbol{T},T_*,d)\equiv\left(\frac{T_{eq}}{T_*}\right)^2+2\,d\,\mathrm{chm}\left(\frac{3}{2}q_2\frac{T_H}{T_*}\right)-(1-d)^2 \quad ; \quad \mathrm{chm}(x)\equiv\mathrm{ch}(x)-1 \quad (9)$$

L'évolution de la déformation plastique est gouvernée par l'équation d'écoulement. Lorsque la fonction seuil est dérivable par rapport à $\boldsymbol{T}$, c'est-à-dire quand $\boldsymbol{T}\neq 0$, la direction d'écoulement est normale à la surface seuil :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\text{si} \quad \boldsymbol{T}\neq 0 \quad \dot{\boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{p}}=\dot{\kappa}\,\boldsymbol{N} \quad ; \quad \boldsymbol{N}=\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}=-\frac{1}{J}\left(\frac{\partial G}{\partial T_*}\right)^{-1}\left(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{T}}\right) \tag{10}$$

Dans le cas singulier où $\boldsymbol{T}=0$, la dérivée est généralisée via des notions d'analyse convexe (sous-gradient). La direction d'écoulement n'est alors assujettie qu'à la condition suivante :

$$\text{si} \quad \boldsymbol{T}=0 \quad \Pi_N(\dot{\boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{p}}, f)\leq\frac{\dot{\kappa}}{J} \tag{11}$$

La fonction d'appui Π_N a l'expression suivante, avec des notations similaires à (6) :

$$\Pi_N(\dot{\boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{p}}, f)=\frac{2}{q_2}\operatorname{arcosh}(1+C^*)\left|\dot{E}^p_H\right|+\frac{2}{3}\left(1-q_1 f^*\right)\sqrt{1-\gamma C^*}\,\dot{E}^p_{eq} \tag{12}$$

$$C^*=-\chi+\sqrt{\chi^2+\frac{2}{\gamma}(\chi-1)} \quad ; \quad \chi=\frac{(q_2\dot{E}^p_{eq})^2+\dfrac{(3\dot{E}^p_H)^2}{q_1 f^*}}{(q_2\dot{E}^p_{eq})^2} \quad ; \quad \gamma=\frac{2 q_1 f^*}{\left(1-q_1 f^*\right)^2} \tag{13}$$

Enfin, l'évolution de la variable d'écrouissage est fixée par la condition de cohérence :

$$\dot{\kappa}\geq 0 \quad ; \quad F(\boldsymbol{T},\kappa)\leq 0 \quad ; \quad \dot{\kappa}\,F(\boldsymbol{T},\kappa)=0 \tag{14}$$

A ce stade, il reste à définir l'évolution de la porosité. Elle se compose de deux termes, le premier lié à la croissance et la coalescence des cavités (*growth*), le second à leur germination (*nucleation*) :

$$\dot{f}=\dot{f}^{gr}+\dot{f}^{nu} \quad ; \quad f(0)=f_0 \tag{15}$$

o ù f_0 désigne la porosité initiale.

Le terme lié à la croissance et la coalescence découle de la conservation du volume plastique :

$$\dot{f}^{gr}=(1-f)\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{p}} \tag{16}$$

Le second terme est gouverné par le modèle de germination utilisé. Deux familles de modèles sont implantées :

$$f^{nu}=f^{nu}_{(1)}+f^{nu}_{(2)} \tag{17}$$

La première famille adopte une évolution de la porosité liée à celle de la variable d'écrouissage :

$$\dot{f}^{nu}_{(1)}=B_n(\kappa)\dot{\kappa} \quad \Rightarrow \quad f^{nu}_{(1)}(\kappa)=\int_0^{\kappa} B_n(s)\,ds \tag{18}$$

Pour recouvrir deux modèles utilisés dans la littérature, on choisit la fonction B_n suivante :

$$B_n(\kappa)=\frac{f_N}{s_N\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa-\kappa_N}{s_N}\right)^2\right]+\frac{c_0}{\kappa_f-\kappa_i}\chi_{[\kappa_i\,;\,\kappa_f]} \tag{19}$$

où χ_I vaut 1 dans l'intervalle I et 0 à l'extérieur. Compte tenu des primitives de ces deux termes, on en déduit :

$$f^{nu}_{(1)}=\frac{f_N}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{\kappa-\kappa_N}{\sqrt{2}s_N}\right)+\operatorname{erf}\left(\frac{\kappa_N}{\sqrt{2}s_N}\right)\right] \quad + \quad c_0\,\min\left(\frac{\langle\kappa-\kappa_i\rangle}{\kappa_f-\kappa_i},1\right) \tag{20}$$

où les crochets de McCauley $\langle x\rangle$ désignent la partie positive de x.

La seconde famille de modèles de germination dépend de la déformation plastique cumulée qui est définie comme suit :

$$\dot{E}^p_{eq}\equiv\sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{p}}:\dot{\boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{p}}} \tag{21}$$

La fonction de germination implantée est proportionnelle à E^p_{eq} à partir d'un seuil :

$$f^{nu}_{(2)}(E^p_{eq})=b_0\langle E^p_{eq}-E^p_c\rangle \tag{22}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Prise en compte de la viscosité

En présence de viscosité, l'écoulement plastique est différé. Plus exactement, la vitesse d'évolution de l'écrouissage n'est plus fixée par la condition de cohérence (14) mais elle est dorénavant fonction de l'intensité de la fonction seuil suivant la loi de Norton :

$$\dot{\kappa}=\left(\frac{\langle F(\boldsymbol{T},\kappa)\rangle}{K}\right)^{n} \tag{23}$$

Les autres équations du modèle restent inchangées. Lorsque $K\to 0$, on retrouve le modèle élastoplastique.

2.3 Prise en compte du gradient d'écrouissage

Une formulation non locale à gradient de variable interne est adaptée lorsque le gradient d'écrouissage $\nabla\kappa$ devient important. Elle consiste à introduire un terme supplémentaire Φ^{grad} dans l'énergie libre qui reflète les interactions entre points matériels voisins, voir [R5.04.01] :

$$\Phi^{grad}(\nabla\kappa)=\frac{1}{2}c(\nabla\kappa)^2 \tag{24}$$

En utilisant la formulation relaxée augmentée présentée dans [R5.04.01], l'impact sur la relation de comportement se traduit par une modification de la force thermodynamique associée à la variable d'écrouissage donc, en pratique, par une modification de la fonction d'écrouissage :

$$\widetilde{R}(\kappa)=R(\kappa)+r\kappa-\varphi \quad ; \quad \varphi=\lambda+ra \tag{25}$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange associé à la relaxation, $r>0$ le coefficient d'augmentation et a l'interprétation de la variable d'écrouissage à l'échelle de la structure. Ces trois quantités sont des données pour ce qui concerne la relation de comportement. Au final, la fonction d'écrouissage est corrigée d'un terme affine, ce qui ne rajoute donc pas de complexité par rapport au traitement numérique du modèle. En revanche, le signe et l'amplitude de φ n'étant pas fixés, cela explique qu'il faille prendre en compte le cas d'un écoulement singulier pour lequel $T_*=0$.

3 Intégration numérique

Pour ce qui concerne l'intégration de la loi de comportement, c'est-à-dire le calcul des variables internes et des contraintes à histoire de déformation (mécanique) donnée, il n'y a plus lieu de distinguer s'il s'agit d'une formulation locale ou à gradient. En effet, l'impact de cette dernière se limite à modifier la fonction d'écrouissage selon (25). On continuera ici à la noter $R(\kappa)$ sans distinction.

En revanche, on distinguera les cas plastique et viscoplastique, même si on peut montrer que ce dernier se limite également à une correction de la fonction seuil dans les équations discrétisées.

3.1 Équations discrétisées dans le cas sans viscosité

La discrétisation en temps des équations de comportement s'appuie sur un schéma étagé : à porosité fixée, on applique un schéma d'Euler implicite (même en viscoplasticité) pour calculer les variables plastiques (déformation plastique, variable d'écrouissage) ainsi que la contrainte, c'est-à-dire que les différentes variables du problème sont exprimées à l'instant final du pas de temps considéré. Puis on évalue l'évolution de la porosité en connaissant l'évolution des variables plastiques. On renvoie à [Zhang et al., 2018] pour plus d'informations sur la discrétisation temporelle et la résolution du système algébrique correspondant.

On note Q_n la valeur d'une quantité Q au début du pas de temps, ΔQ son incrément pendant le pas de temps et (simplement) Q sa valeur en fin de pas de temps. L'état mécanique au début du pas de temps $(\boldsymbol{E}_n,\boldsymbol{E^p}_n,\kappa_n,f_n)$ est supposé connu ainsi que l'incrément de déformation $\boldsymbol{\Delta E}$ (et donc également la déformation $\boldsymbol{E}$). Il s'agit alors de calculer les incréments de variables internes $\boldsymbol{\Delta E^p}_{\boldsymbol{n}}$, $\Delta\kappa$ et Δf , ainsi que la contrainte à la fin du pas de temps $\boldsymbol{T}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La discrétisation de la relation contrainte – déformation (2) s'écrit comme suit :

$$\boldsymbol{T}=K\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}}{}_{n}-\Delta\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}}\right)\boldsymbol{Id}+2\mu\,\mathrm{dev}\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}}{}_{n}-\Delta\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}}\right) \tag{26}$$

On choisit de faire apparaître une contrainte élastique (ou contrainte d'essai élastique), notée $\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{e}}$ et qui est connue :

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{e}}-K\,\mathrm{tr}\left(\Delta\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}}\right)-2\mu\,\mathrm{dev}\left(\Delta\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}}\right)\quad;\quad\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{e}}=K\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}}{}_{n}\right)\boldsymbol{Id}+2\mu\,\mathrm{dev}\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}}{}_{n}\right) \tag{27}$$

La discrétisation de la fonction seuil s'écrit simplement :

$$F\left(\boldsymbol{T},\kappa\right)=\frac{T_{*}}{J}-R\left(\kappa\right) \tag{28}$$

Et la condition de cohérence vaut :

$$\Delta\kappa\geq 0\quad;\quad F\left(\boldsymbol{T},\kappa\right)\leq 0\quad;\quad\Delta\kappa\;F\left(\boldsymbol{T},\kappa\right)=0 \tag{29}$$

En particulier, en charge plastique, $F=0$, si bien qu'on peut en déduire la contrainte équivalente de GTN en fonction du niveau d'écrouissage :

$$T_{*}\;=\;\hat{T}\left(\kappa\right)\equiv J\,R\left(\kappa\right) \tag{30}$$

Dans le cas d'un écoulement régulier, la discrétisation temporelle de (10) s'écrit :

$$\mathrm{tr}\left(\Delta\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}}\right)=3\frac{\lambda}{J}\Theta\left(\frac{T_{H}}{T_{*}},\frac{T_{eq}}{T_{*}}\right)\Lambda\left(\frac{T_{H}}{T_{*}}\right) \tag{31}$$

$$\mathrm{dev}\left(\Delta\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}}\right)=\frac{3}{2}\frac{\lambda}{J}\Theta\left(\frac{T_{H}}{T_{*}},\frac{T_{eq}}{T_{*}}\right)\frac{\mathrm{dev}\left(\boldsymbol{T}\right)}{T_{*}} \tag{32}$$

On y a introduit les fonctions suivantes :

$$\Lambda\left(x\right)=\frac{1}{2}q_{1}q_{2}f_{n}^{*}\sinh\left(\frac{3}{2}q_{2}x\right)\quad;\quad\Theta\left(x,y\right)=\left[y^{2}+3\,x\,\Lambda\left(x\right)\right]^{-1} \tag{33}$$

Par substitution de (31) et (32) dans (27), on en déduit :

$$\frac{T_{H}^{e}-T_{H}}{3K}=\frac{\lambda}{J}\Theta\left(\frac{T_{H}}{T_{*}},\frac{T_{eq}}{T_{*}}\right)\Lambda\left(\frac{T_{H}}{T_{*}}\right) \tag{34}$$

$$\mathrm{dev}\left(\boldsymbol{T}\right)=\left[1+3\mu\frac{\lambda}{J}\Theta\left(\frac{T_{H}}{T_{*}},\frac{T_{eq}}{T_{*}}\right)\frac{1}{T_{*}}\right]^{-1}\mathrm{dev}\left(\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{e}}\right) \tag{35}$$

Cette dernière expression indique que $\boldsymbol{T}$ a la même direction et le même sens que $\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{e}}$. En outre, en substituant Θ par son expression issue de (34), on obtient la valeur de T_{eq} en fonction de T_{H} et T_{*} :

$$T_{eq}=T_{eq}^{e}\left[1+\frac{\mu}{K}\frac{T_{H}^{e}-T_{H}}{T_{*}\Lambda\left(\frac{T_{H}}{T_{*}}\right)}\right]^{-1}\equiv\hat{T}_{eq}\left(T_{H},T_{*}\right) \tag{36}$$

Compte tenu de la définition de la contrainte équivalente de GTN (5), on peut exprimer un lien implicite entre T_{H} et T_{*} en y substituant (36) :

$$\hat{G}\left(T_{H},T_{*}\right)\equiv\left[\frac{\hat{T}_{eq}\left(T_{H},T_{*}\right)}{T_{*}}\right]^{2}+2\,q_{1}\,f_{n}^{*}\cosh\left[\frac{3}{2}q_{2}\frac{T_{H}}{T_{*}}\right]-1-\left(q_{1}\,f_{n}^{*}\right)^{2}\;=\;0 \tag{37}$$

Le multiplicateur plastique, égal à $\Delta\kappa$, se déduit de (34) :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\Delta\kappa = \hat{\lambda}(T_H, T_*) \equiv J \frac{T_H^e - T_H}{3K\Lambda\left(\frac{T_H}{T_*}\right)} \frac{1}{\Theta\left(\frac{T_H}{T_*}, \frac{\hat{T}_{eq}(T_H, T_*)}{T_*}\right)} \tag{38}$$

Lorsque l'écoulement est singulier, $T_*=0$ donc $\boldsymbol{T}=0$, ce qui permet de calculer $\Delta \boldsymbol{E}^p$ via (27). Il reste alors à vérifier que l'écoulement appartient bien au cône prescrit par (11) soit, après discrétisation :

$$\Pi_N(\Delta \boldsymbol{E}^p, f_n) \leq \frac{\Delta\kappa}{J} \tag{39}$$

Concernant l'intégration de l'évolution de la porosité, elle est réalisée dans un deuxième temps, lorsque $\Delta \boldsymbol{E}^p$ et $\Delta\kappa$ sont calculés. On adopte également un schéma d'Euler implicite, ce qui conduit après quelques manipulations algébriques à :

$$f^{gr} = \frac{f_n^{gr} + (1-f^{nu})\,\mathrm{tr}\,\Delta \boldsymbol{E}^p}{1+\mathrm{tr}\,\Delta \boldsymbol{E}^p} \tag{40}$$

Et la porosité de germination f^{nu} est simplement calculé via les fonctions (20) et (22) ; la déformation plastique cumulée est évaluée en cohérence avec le choix du schéma :

$$\Delta E_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3}\Delta \boldsymbol{E}^p : \Delta \boldsymbol{E}^p} \tag{41}$$

3.2 Résolution du problème discrétisé sans viscosité

Remarque préliminaire : les équations sont résolues à une certaine précision près. Si on note ϵ la précision fournie par l'utilisateur via le mot-clé RESI_INTE_RELA, on peut introduire les précisions suivantes, respectivement en termes de contrainte, de déformation et sans unité pour l'équation (37) :

$$\epsilon_\sigma = R(0)\epsilon \quad ; \quad \epsilon_\kappa = \frac{1}{10}\frac{R(0)}{E}\epsilon \quad ; \quad \epsilon_G = (1-d_n)\epsilon \tag{42}$$

où on rappelle que $d_n = q_1 f_n^*$. Et si $1-d_n < \epsilon^{1/2}$, on considère que le point est cassé : $\boldsymbol{T}=0$, $\Delta\kappa=0$, $f=f_F$. Dans le cas contraire, il faut résoudre le problème discrétisé.

Ce dernier admet une solution unique. On commence par déterminer le régime duquel elle relève : réponse élastique, réponse plastique à écoulement singulier ou réponse plastique à écoulement régulier. La solution est élastique si :

$$T_*^e < \hat{T}(\kappa_n) \tag{43}$$

Dans ce cas, $\Delta\kappa=0$, $\Delta \boldsymbol{E}^p=0$ et $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^e$.

Si la solution n'est pas élastique, on examine le cas d'un écoulement plastique singulier. Dans ce cas, $T_*=0$, $\boldsymbol{T}=0$, $\Delta \boldsymbol{E}^p$ est obtenu via (27) et on note Π_N^s la valeur correspondante de Π_N selon (12). On calcule également κ^z tel que (résolution par une méthode de Newton) :

$$\hat{T}(\kappa^z) = 0 \tag{44}$$

L'écoulement est singulier s i $\kappa^z \geq \kappa_n$ et si $J\,\Pi_N^s \leq \Delta\kappa^z$ d'après (39) ; on a alors $\kappa=\kappa^z$.

Enfin, dans le cas contraire, l'écoulement plastique est régulier et on a en particulier $0 < T_* < T_*^e$. On peut remarquer qu'à T_* donnée, l'équation (37) permet de remonter à la valeur de T_H. En notant $T_H = p\,T_H^e$, la fonction $\hat{g}: p \to \hat{G}(T_H, T_*)$ est croissante et la solution vérifie l'encadrement $0 \leq p \leq 1$. Pour faciliter la résolution, on peut calculer une borne minimale $p_{min} > 0$ en majorant la fonction $\hat{g}$. En notant $r \equiv T_H/T_*$ et $\alpha \equiv \mu/K$, on a :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\hat{g}(p)=\left(\frac{T^e_{eq}}{T_*}\right)^2\left(\frac{\Lambda(r)}{\alpha\frac{T^e_H}{T_*}+\Lambda(r)-\alpha\, r}\right)^2+d_n\,2\,\mathrm{chm}\left(\frac{3}{2}q_2 r\right)-(1-d_n)^2 \quad (45)$$

On peut minorer analytiquement le dénominateur du second facteur et on le note D_{min} . Comme en outre $\mathrm{chm}(x)\leq \mathrm{sh}(x)$, il vient :

$$\hat{g}(p)\leq\left(\frac{T^e_{eq}}{T_*}\right)^2\left(\frac{\Lambda(r)}{D_{min}}\right)^2+d_n\,2\,\mathrm{sh}\left(\frac{3}{2}q_2 r\right)-(1-d_n)^2 \quad (46)$$

La racine du membre de droite peut être obtenue analytiquement et permet de remonter à la borne p_{min} . Une résolution de l'équation $\hat{g}(p)=0$ par une méthode de Newton dans l'intervalle $p_{min}\leq p\leq 1$ permet de trouver la solution $p(T_*)$. On en contrôle la précision via la condition de convergence $|\hat{g}|\leq\epsilon_G$.

On peut ainsi ramener le problème incrémental à la seule inconnue $\Delta\kappa$. En effet, à κ donné, on peut calculer $T_*=\hat{T}(\kappa)$. De là, on en déduit $p(T_*)$ par résolution de l'équation précédente. Connaissant p donc T_H , on peut calculer $\lambda=\hat{\lambda}(T_H,T_*)$ via (38), ce qui ramène le problème à la résolution de l'équation scalaire $\Delta\kappa=\lambda$.

Grâce aux propriétés de convexité de la contrainte équivalente T_* par rapport à $\boldsymbol{T}$, l'analyse du schéma de « return mapping » utilisé montre qu'à λ croissant de 0 à $J\,\Pi^s_N$, T_* est décroissante de T^e_* à 0. La résolution du problème revient donc à trouver l'intersection de la courbe croissante $\Delta\kappa\rightarrow T_*$ avec la courbe décroissante $T_*\rightarrow\lambda$. Une borne minimale sur $\Delta\kappa$ est fournie par le maximum de 0 et de $\Delta\kappa_z$, car T_* solution doit être positive et $\Delta\kappa$ aussi. Une borne maximale est fournie par l e minimum de $J\,\Pi^s_N$ et de $\Delta\kappa^e$ tel que $\hat{T}(\kappa^e)=T^e_*$ (s'il existe), car T_* solution doit être positive et inférieure à T^e_* .

L'équation est résolue par une méthode de Newton entre ces deux bornes. On contrôle la précision de la solution en considérant que l'algorithme a convergé dès que l'une des conditions $|\Delta\kappa-\lambda|\leq\epsilon_\kappa$ ou $\left|\hat{T}(\Delta\kappa)-\hat{T}(\lambda)\right|\leq\epsilon_\sigma$ est atteinte. On choisit d'initialiser la méthode de Newton par la solution $\Delta\kappa_{VM}$ du problème équivalent de von Mises (i.e. en fixant $T_H=0$) lorsqu'elle respecte les bornes ou sinon par une méthode de corde vis-à-vis des valeurs aux bornes.

On remonte enfin à la contrainte via la relation suivante :

$$\boldsymbol{T}=T_H\,\mathbf{Id}+T_{eq}\frac{\mathbf{dev}\ \boldsymbol{T^e}}{T^e_{eq}} \quad (47)$$

3.3 Résolution du problème discrétisé dans le cas viscoplastique

En présence de viscosité, la condition de cohérence (14) est remplacée par la loi d'évolution de Norton (23). Une fois discrétisée, cette dernière s'écrit :

$$\frac{\Delta\kappa}{\Delta t}=\left(\frac{\langle F(\boldsymbol{T},\kappa)\rangle}{K}\right)^n \quad (48)$$

Et en inversant cette relation :

$$C_{\Delta t}\,\Delta\kappa^q=\langle F(\boldsymbol{T},\kappa)\rangle \quad ; \quad C_{\Delta t}=\frac{K}{\Delta t^{1/n}} \quad ; \quad q=\frac{1}{n} \quad (49)$$

Comme $n>1$, $0<q<1$.

Elle peut encore s'exprimer de manière équivalente sous la forme d'une relation de Kuhn et Tucker :

$$\Delta\kappa\geq 0 \quad ; \quad F_v(\boldsymbol{T},\kappa)\leq 0 \quad ; \quad F_v(\boldsymbol{T},\kappa)\Delta\kappa=0 \quad (50)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\text{où} \quad F_v(\boldsymbol{T},\kappa)=F(\boldsymbol{T},\kappa)-C_{\Delta t}\Delta\kappa^q=\frac{T_*}{J}-R_v(\kappa) \quad ; \quad R_v(\kappa)=R(\kappa)+C_{\Delta t}(\kappa-\kappa_n)^q \tag{51}$$

Après discrétisation, la prise en compte de la viscosité se réduit à l'ajout d'un terme (positif et croissant) dans la fonction d'écrouissage.

On pourrait être tenté d'appliquer la même méthode de résolution que précédemment mais, malheureusement, ce nouveau terme n'est pas dérivable en $\Delta\kappa=0$ (pente infinie) . C'est pourquoi on propose de distinguer deux régimes, l'un à forte pente, l'autre à pente faible. La pente « frontière » est fournie forfaitairement par $R'(0)$. Plus précisément, on note $V(\Delta\kappa)=C_{\Delta t}\Delta\kappa^q$ le terme visqueux. La valeur $\Delta\kappa_v$ frontière correspond à :

$$V'(\Delta\kappa_v)=R'(0) \tag{52}$$

Si $\Delta\kappa<\Delta\kappa_v$, on se situe dans le régime à pente forte, i.e. dominé par la viscosité. A l'inverse, si $\Delta\kappa>\Delta\kappa_v$, on est dans le régime à pente faible, dominé par la plasticité. Compte tenue de la monotonie de l'équation scalaire $\Delta\kappa-\hat{\lambda}=0$ à résoudre par rapport à $\Delta\kappa$, on peut déterminer dès le départ le régime de la solution et réduire le cas échéant l'intervalle de recherche.

Dans le régime dominé par la plasticité, on résout l'équation en $\Delta\kappa$ comme au paragraphe précédent ; le terme visqueux ne présente pas de difficultés numériques particulières.

Au contraire, dans le régime dominé par la viscosité, une méthode de Newton portant sur $\Delta\kappa$ n'est pas efficace (pentes trop fortes donc convergence très lente). On procède alors au changement de variable $v=V(\Delta\kappa)$ (qui élimine les fortes pentes au voisinage de 0) et on applique la méthode de Newton par rapport à v. Les critères de convergence restent inchangés.

3.4 Matrice tangente

Dans le cas local, il s'agit de déterminer le tenseur d'ordre 4 $\boldsymbol{H_{TE}}=\boldsymbol{\delta T}/\boldsymbol{\delta E}$. Dans le cas non local, il faut également construire les tenseurs d'ordre 2 $\boldsymbol{H_{T\varphi}}=\boldsymbol{\delta T}/\delta\varphi$ et $\boldsymbol{H_{\kappa E}}=\delta\kappa/\boldsymbol{\delta E}$ ainsi que le scalaire $H_{\kappa\varphi}=\delta\kappa/\delta\varphi$.

L'opérateur tangent dépend du régime d'écoulement. Dans le cas élastique, il se réduit à :

$$\boldsymbol{\delta T}=K\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\delta E})\,\boldsymbol{Id}+2\mu\,dev(\boldsymbol{\delta E}) \quad ; \quad \delta\kappa=0 \tag{53}$$

Dans le cas du régime singulier, l'expression est là aussi très simple :

$$\boldsymbol{\delta T}=0 \quad ; \quad \delta\kappa=-\left(\frac{\partial\hat{T}}{\partial\kappa}\right)^{-1}\left[\frac{\partial\hat{T}}{\partial\varphi}\delta\varphi+\frac{\partial\hat{T}}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial\boldsymbol{E}}\boldsymbol{\delta E}\right] \tag{54}$$

où la fonction $\hat{T}$ contient le cas échéant les termes liés au non local et à la viscosité.

Le régime d'écoulement régulier conduit à un opérateur tangent plus complexe. On se contente ici de décrire les grandes lignes de la méthode pour le calculer. Ce régime est caractérisé par la résolution du système d'équation $\hat{G}(T_H,T_*;T_H^e,T_{eq}^e,J)=0$ et $\Delta\kappa-\hat{\lambda}(T_H,T_*;T_H^e,T_{eq}^e,J)=0$ avec la relation $T_*=\hat{T}(\Delta\kappa;J,\varphi)$. La dérivée des fonctions implicites permet d'exprimer les variations des inconnues δT_H et $\delta\kappa$ en fonction des variations des données d'entrée du système (système linéaire 2x2 à résoudre). De là, on peut remonter à la variation de la contrainte en différentiant (47).

Enfin, il reste à lier les variations des données d'entrée à celles de la déformation $\boldsymbol{E}$ et de φ. La seule difficulté (minime) vient de la contrainte de von Mises. Pour cela, on rappelle la relation suivante :

$$\delta T_{eq}^e=\frac{3}{2}\frac{\mathrm{dev}\,\boldsymbol{T^e}}{T_{eq}^e} \tag{55}$$

Remarque : la phase de prédiction n'appelle pas de commentaires particuliers si ce n'est qu'au voisinage (à une précision ϵ_σ) de la contrainte de transition entre régime élastique et régime plastique, on opte

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

systématiquement pour l'opérateur tangent du régime plastique (car on se situe a priori en continuité d'un pas de temps plastique).

4 Bibliographie

- Gurson A. L. (1977) Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media. J. eng. Mater. Technol. 99, 2-15.
- Lorentz E., Andrieux S. (1999) A variational formulation for nonlocal damage models. Int. J. Plas. 15, 119-138.
- Tvergaard V., Needleman A. (1984) Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. Acta Metall. 32, 157-169.
- Zhang Y., Lorentz E., Besson J. (2018) Ductile damage modelling with locking-free regularised GTN model. Int. J. Numer. Methods Eng. 113, 1871-1903.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)