Modèle de grandes déformations GDEF_LOG

Résumé :

Ce document présente une formulation hypoélastique de grandes déformations pour les lois de comportement de type von Mises appelée GDEF_LOG dans Code_Aster.
Ce modèle, dû à C.Miehe, N.Apel et M.Lambrecht [13] est un modèle de grandes déformations basé sur une mesure logarithmique, avec un tenseur de contraintes en dualité particulier. Il est valable quel que soit le comportement en petites déformations et présente l'avantage de fournir une matrice tangente symétrique. Aucune modification des variables internes cinématique n'est nécessaire. Il pemet une intégration incrémentalement objective des lois de comportement (comme le modèle SIMO_MIEHE). Toutefois, comme toutes les lois hypoélastiques, les lois de comportement sont en toute rigueur limitées aux faibles déformations élastiques.

On illustre dans ce document les capacités de ce modèle et les avantages par rapport à l'approximation PETIT_REAC.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1Introduction....3
2Écriture et hypothèses....4
2.1Éléments de cinématique....4
2.2Lois de comportement hypo-élastoplastiques....6
2.3Tenseurs de déformation et de contrainte....7
3Algorithme....9
3.1Pré-traitement....9
3.2Branchement à la loi de comportement HPP....9
3.3Post-traitement....9
4Validité des modèles de grandes déformations....11
4.1Identification des paramètres....11
5Comparaison avec PETIT_REAC....12
5.1Approximation des grandes déformations par PETIT_REAC....12
5.2Comparaison sur un exemple....13
6Bibliographie....14
7Description des versions du document....14
8Annexe 1 : Calcul des déformations logarithmiques....15
8.1Notations :....15
8.2Expression des contraintes en configuration Lagrangienne....15
8.3Expression de l'opérateur tangent en configuration Lagrangienne....16
8.4Calcul effectif des déformations logarithmiques....17

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

La plupart des lois de comportement de Code_Aster sont utilisables sous l'hypothèse des petites perturbations (HPP), qui permet de confondre les configurations géométriques initiale et actuelle. Cependant, lorsque les déformations deviennent importantes (on fixe en général la limite à 5%), cette hypothèse n'est plus vérifiée. Les notions de dérivées particulaire et partielle sont alors différentes, et de ce fait les lois de comportement formulées incrémentalement perdent leur caractère objectif (indépendance de l'état mécanique en fonction de l'observateur) ; une conséquence ennuyeuse est l'évolution possible des contraintes pour un mouvement de corps rigide, contraire à la physique.
Afin de retrouver l'objectivité, indispensable donc pour garantir une bonne fiabilité du résultat, une stratégie grandes déformations est possible. L'objet de ce document est de présenter le formalisme mis en place dans Code_Aster pour traiter les lois de comportement à écrouissages isotrope et cinématique et critère de Von Mises.
On présente le formalisme GDEF_LOG, dû à C.Miehe, N.Apel et M.Lambrecht [13] qui est un modèle de grandes déformations basé sur une mesure logarithmique, avec un tenseur de contraintes en dualité particulier. Il est valable quelque soit le comportement en petites déformations et présente l'avantage de fournir une matrice tangente symétrique. Aucune modification des variables internes cinématique n'est nécessaire.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Écriture et hypothèses

Cet algorithme, dû à C.Miehe; N.Apel et M.Lambrecht [13] est basé sur une formulation énergétique et la matrice de rigidité est fournie dans [13].

2.1 Éléments de cinématique

Les éléments cinématiques dans le cas continu peuvent être trouvés par exemple dans [3]. On s'intéressera ici au cas directement discrétisé en temps permettant de définir les grandeurs utilisées dans le formalisme présenté dans ce document. On considère un domaine continu initial fermé $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$, dont chaque point est repéré par ses coordonnées $X \in \Omega_0$, subissant un champ de déformation φ le faisant passer dans la configuration Ω :

$$\varphi : \Omega_0 \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

On notera $x \in \Omega$ les coordonnées de ce point dans la configuration courante.
La déformée évoluant au cours du temps, on définit en réalité, par le truchement de la discrétisation temporelle, une famille de champ φ_n correspondant chacun à un instant t_n de l'histoire d'évolution du domaine.
Dans le cas du formalisme grandes déformations traité ici, il est nécessaire d'introduire quatre configurations pour le domaine et son évolution (cf. Figure 1) : la configuration Ω_0 initiale de référence (c'est-à-dire pour laquelle les déformations sont nulles), la configuration Ω_n au début du pas de temps courant $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, la configuration Ω_{n+1} à la fin de ce pas de temps, et une configuration milieu du pas de temps, $\Omega_{n+\frac{1}{2}}$, le formalisme étant intégré avec une règle de point milieu.

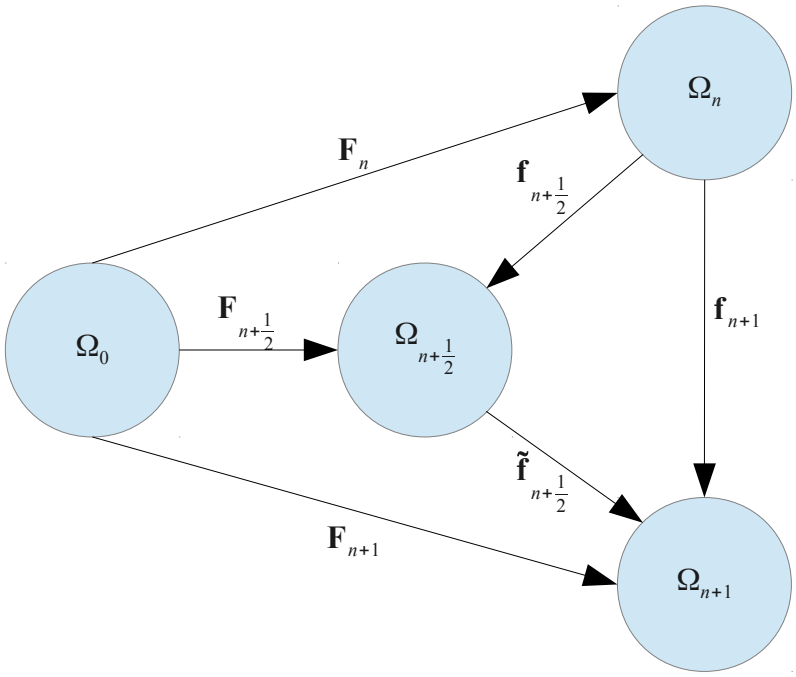


Figure 1 : Configurations nécessaires et gradients de transformation

A partir de ces configurations, on définit les champs de déplacements et les gradients de transformation pour passer de l'une à l'autre. Les grandeurs faisant passer de la configuration initiale à

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

une configuration donnée sont notées en majuscule $(\boldsymbol{U}, \mathbf{F})$ et les grandeurs reliant deux configurations déformées entre elles sont notées en minuscule $(\boldsymbol{u}, \mathbf{f})$. Le Tableau 1 récapitule les différentes grandeurs et leurs expressions.

Configuration de départ	Configuration d'arrivée	Déplacement	Gradient de transformation
Ω_0	Ω_n	$\boldsymbol{U}_n$	$\mathbf{F}_n = \mathbf{I}_d + \mathbf{grad}_0 \boldsymbol{U}_n$
Ω_0	Ω_{n+1}	$\boldsymbol{U}_{n+1}$	$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{I}_d + \mathbf{grad}_0 \boldsymbol{U}_{n+1}$
Ω_0	$\Omega_{n+\frac{1}{2}}$		$\mathbf{F}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}_n + \mathbf{F}_{n+1}\right)$
Ω_n	$\Omega_{n+\frac{1}{2}}$		$\mathbf{f}_{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{I}_d + \frac{1}{2}\mathbf{grad}_n \boldsymbol{u}$ $\mathbf{f}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}_{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{F}_n^{-1}$ $\mathbf{f}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{f}_n + \mathbf{I}_d\right)$
Ω_n	Ω_{n+1}	$\boldsymbol{u}$	$\mathbf{f}_{n+1} = \boldsymbol{I}_d + \mathbf{grad}_n \boldsymbol{u}$ $\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \cdot \mathbf{F}_n^{-1}$ $\mathbf{f}_{n+1} = \Delta \mathbf{F}$
$\Omega_{n+\frac{1}{2}}$	Ω_{n+1}		$\tilde{\mathbf{f}}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}_{n+1} \cdot \mathbf{f}_{n+\frac{1}{2}}^{-1}$ $\tilde{\mathbf{f}}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}_{n+1} \cdot \mathbf{F}_{n+\frac{1}{2}}^{-1}$

Tableau 1 : récapitulatif des déplacements et gradients de transformation

A partir de ces gradients de transformation, il est possible de définir les taux de déformation $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L}_\circ = \dot{\mathbf{F}}_\circ \dot{\mathbf{F}}_\circ^{-1} \tag{2}$$

Les tenseurs taux de rotation $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{d}_\circ = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L}_\circ + \mathbf{L}_\circ^T\right) \tag{3}$$

et les tenseurs taux de déformation $\mathbf{d}$:

$$\boldsymbol{\omega}_\circ = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L}_\circ - \mathbf{L}_\circ^T\right) \tag{4}$$

avec $\circ$ désignant la configuration n, $n+1$ ou $n+\frac{1}{2}$. Le tenseur de déformation Eulérien entre les configurations Ω_n et Ω_{n+1} se déduit de ces définitions :

$$\mathbf{e}_{n+1} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{I}_d - \left(\mathbf{f}_{n+1} \cdot \mathbf{f}_{n+1}^T\right)^{-1}\right] \tag{5}$$

Le taux de déformation est alors bien lié à la déformation eulérienne :

$$\mathbf{d}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{f}}_{n+\frac{1}{2}}^{-1} \cdot \mathbf{e}_{n+1} \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{n+\frac{1}{2}} \tag{6}$$

La dernière grandeur à introduire pour notre algorithme est le gradient de déplacement incrémental, relatif à la configuration $\Omega_{n+\frac{1}{2}}$ et défini par :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathbf{h}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{grad}_n \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{f}^{-1}_{n+\frac{1}{2}} \tag{7}$$

Ce dernier permet de déterminer le taux de rotation dans la même configuration par la relation :

$$\boldsymbol{\omega}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\,\Delta t}\left[\mathbf{h}_{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{h}^{T}_{n+\frac{1}{2}}\right] \tag{8}$$

A partir de ces éléments de cinématique, il est possible de définir des lois de comportement hypoélastiques dont l'intégration est objective en grandes déformations. Le paragraphe suivant présente ce type de formulation des lois de comportement.

2.2 Lois de comportement hypo-élastoplastiques

Dans cette section, la classe de modèle phénoménologique de plasticité (ici indépendante du temps) avec hypoélasticité est considérée. Elle constitue une extension *ad hoc* de l'écriture des lois en petites déformations, ce qui permet une certaine généricité et représente un avantage dans le contexte d'un code de calcul : on verra dans le chapitre suivant qu'il est possible de réaliser son intégration numérique de façon équivalente à celle des petites déformations.

Cette classe de modèles est à opposer à la classe hyperélastique, basée sur l'approche thermodynamique des milieux continus. Dans ce contexte, une énergie libre, pouvant par exemple être considérée comme une fonction de la température et la déformation de Green-Lagrange, est définie ; les évolutions des contraintes et éventuellement des variables internes en découlent. On peut citer par exemple le cas de la loi hyperélastique de Signorini (cf. [4]) en élasticité et le formalisme Simo-Miehe en hypérélastoplasticité (cf. [3]).

Une loi de comportement hypo-élastoplastique se construit généralement en cinq étapes.

1. À l'instar de la décomposition additive des petites déformations, le taux de déformation $\mathbf{d}$ est tout d'abord décomposé en une partie élastique et une partie plastique :
$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p \tag{9}$$
2. Une dérivée de la contrainte de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau} = det(\mathbf{F})\boldsymbol{\sigma}$ est alors déterminée par une relation incrémentale fonction du taux élastique de déformation, avec $\mathring{\boldsymbol{x}}$ une dérivée objective à définir et $\mathbf{C}$ le tenseur d'élasticité. :
$$\mathring{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{C} : \left[\mathbf{d} - \mathbf{d}^p\right] \tag{10}$$
3. On construit un domaine de réversibilité convexe définissant l'espace admissible des contraintes à partir d'une fonction f, avec $\boldsymbol{S}$ l'espace des contraintes et $\mathbf{q}$ l'ensemble des m variables internes représentant l'écrouissage cinématique du matériau et α les variables scalaires (y compris l'écrouissage isotrope) :
$$\mathrm{E}_{\boldsymbol{\tau}} = \{(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}, \alpha) \in \boldsymbol{S} \times \mathbb{R}^{m+1} \,|\, f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}, \alpha) \leqslant 0\} \tag{11}$$
4. Les lois d'évolution de ces variables internes suivent un principe de normalité (on ne considère ici que les lois de comportement associées), avec $\gamma \geqslant 0$ le multiplicateur plastique, $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}, \alpha)$ définissant la direction d'écoulement plastique et $g(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}, \alpha)$ l'évolution des autres variables internes :
$$\begin{aligned} \mathbf{d}^p &= \gamma \frac{\partial f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}, \alpha)}{\partial \boldsymbol{\tau}} \\ \mathring{\boldsymbol{q}} &= -\gamma\, g(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}, \alpha) \end{aligned} \tag{12}$$
5. L'écriture des conditions de charge/décharge, classiquement représentées par Kuhn-Tucker et la condition de cohérence :
$$\begin{cases} \gamma \geqslant 0 \\ f(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{q}, \alpha) \leq 0 \\ \gamma\, f(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{q}, \alpha) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Cette classe de modèle se caractérise donc par une analogie forte avec les formalismes petites déformations, avec une écriture incrémentale des contraintes qui n'est pas sans poser quelques difficultés d'intégration numérique : en effet, afin d'empêcher les évolutions de contraintes par un mouvement de corps rigide, il convient d'avoir une intégration objective de l'équation (10).

2.3 Tenseurs de déformation et de contrainte

Le modèle se base sur la déformation logarithmique définie par :

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}\log\left[\mathbf{F}^{\mathbf{T}}.\mathbf{F}\right] \tag{14}$$

La définition de cette expression est fournie en annexe 2. La contrainte $\mathbf{T}$ est définie dans l'espace logarithmique comme duale de $\mathbf{E}$, de sorte que la densité de puissance mécanique p_m s'exprime par leur produit $\mathbf{T}:\dot{\mathbf{E}}$. Ce n'est pas un tenseur de contraintes classique, mais on peut le relier aux tenseurs habituels. En effet la puissance mécanique s'écrivant :

$$p_m=\mathbf{T}:\dot{\mathbf{E}}=\mathbf{\Pi}:\dot{\mathbf{F}} \tag{15}$$

On obtient :

$$p_m=\mathbf{T}:\dot{\mathbf{E}}=\mathbf{T}:\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{F}}:\dot{\mathbf{F}}=\mathbf{\Pi}:\dot{\mathbf{F}}=\mathbf{T}:\mathbf{P}_{\Pi}:\mathbf{F} \tag{16}$$

Avec $\mathbf{\Pi}$ le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de première espèce. Ce qui définit le tenseur (d'ordre quatre en 3D) de projection $\mathbf{P}_{\Pi}$:

$$\mathbf{P}_{\Pi}=\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{F}} \tag{17}$$

On a donc :

$$\mathbf{\Pi}=\mathbf{T}:\mathbf{P}_{\Pi} \tag{18}$$

Les tenseurs de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$ s'écriront de façon habituelle :

$$J\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\tau}=\mathbf{\Pi}\,\mathbf{F}^{T} \tag{19}$$

On peut calculer également le second tenseur de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$ en fonction de $\mathbf{T}$:

$$p_m=\mathbf{T}:\dot{\mathbf{E}}=\mathbf{S}:\dot{\mathbf{\Delta}}=\mathbf{S}:\frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} \tag{20}$$

Avec $\mathbf{\Delta}$ le tenseur des déformations de Green-Lagrange tel que :

$$\mathbf{\Delta}=\frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{I})=\frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^{T}\mathbf{F}-\mathbf{I}\right) \tag{21}$$

On a une nouvelle forme de la puissance mécanique :

$$p_m=\mathbf{T}:\dot{\mathbf{E}}=\mathbf{T}:\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{C}}:\dot{\mathbf{C}}=\mathbf{S}:\frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} \tag{22}$$

On obtient pour le second tenseur de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S}=\mathbf{T}:\mathbf{P}\ \text{ avec }\ \mathbf{P}=2\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{C}} \tag{23}$$

Si la physique choisie est particulière, le modèle permet toutefois de garder la décomposition additive des déformations élastiques et plastiques classique en HPP avec :

$$\mathbf{E}^{p}=\frac{1}{2}\log\left(\mathbf{F}^{p,T}.\mathbf{F}^{p}\right) \tag{24}$$

Un tel choix est toujours licite. Cela revient simplement à adopter une définition pour la déformation élastique. Or, celle-ci s'avère cohérente avec une décomposition multiplicative, en l'absence de rotation (situation coaxiale). En outre, l'incompressibilité plastique est assurée car:

$$tr\,\mathbf{E}^{p}=\log J^{p} \tag{25}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'énergie élastique ψ^e du modèle prend également la même forme que celle des petites déformations, mais en adoptant les notions de contrainte et déformation spécifiques à ce formalisme, on a :

$$\psi^e = \frac{1}{2}\|\mathbf{E}-\mathbf{E}^p\|_E^2 = \frac{1}{2}\mathbf{T}:\mathbf{C}^{-1}:\mathbf{T} \quad (26)$$

Cette formulation présente certains avantages :

- la dimension cinématique du modèle est confinée en amont et en aval de l'intégration du comportement ; ceci était l'un des éléments principaux pour le choix du formalisme ; tous les modèles de comportement disponible en petites déformations sont *a priori* disponibles, à condition bien sûr que cela ait un sens physique (les grandes déformations hypoélastiques sont bien adaptées aux comportements métalliques, et pas aux comportements du béton) ;
- si le modèle HPP admet une expression énergétique, il en sera de même du modèle grandes déformations : la matrice tangente est donc symétrique ;
- la seule difficulté semble *a priori* concentrée dans la définition de la déformation logarithmique, mais l'article [13] fournit un algorithme de calcul distinguant les cas difficiles (entités propres multiples) ;
- le modèle, d'après les exemples présentés par les auteurs, donnent des résultats très proches de ceux obtenus par un formalisme classique à décomposition multiplicative ;
- le modèle peut être étendu aux cas d'anisotropie (initiale ou induite).

De plus, l'article [13] fournit une expression de la matrice tangente dans la configuration utilisant Π (appelée nominale) ; toutefois, comme elle est basée sur une écriture à partir des contraintes de Piola-Kirchhoff de première espèce, non-symétrique, ce qui n'est pas classique et jamais réalisé dans *Code_Aster*, on préfère ici utiliser le second tenseur de Piola-Kirchhoff pour calculer les forces internes et la matrice tangent sur la configuration initiale, en se référant à [15] par exemple.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Algorithme

3.1 Pré-traitement

Le tenseur des déformations logarithmiques calculé par décomposition spectrale :

$$\mathbf{E}_{n+1}=\frac{1}{2}\log\left[\mathbf{F}_{n+1}^{T}\cdot\mathbf{F}_{n+1}\right]=\frac{1}{2}\log\mathbf{C}_{n+1} \tag{27}$$

C'est-à-dire que, si les $\lambda^{(i)}$ sont les valeurs propres de $\mathbf{C}_{n+1}$ et $\boldsymbol{N}^{(i)}$ les vecteurs propres associés, alors la mesure de déformation choisie s'écrit :

$$\mathbf{E}_{n+1}=\frac{1}{2}\sum_{i=1,3}\log\left(\lambda^{(i)}\right)\boldsymbol{N}^{(i)}\otimes\boldsymbol{N}^{(i)} \tag{28}$$

Cette mesure permet d'obtenir une décomposition additive :

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}^{e}+\mathbf{E}^{p} \tag{29}$$

Avec :

$$\mathbf{E}^{p}=\frac{1}{2}\log\left[\mathbf{F}^{p,T}\cdot\mathbf{F}^{p}\right]\text{ et }\mathbf{E}^{e}=\frac{1}{2}\log\left[\mathbf{F}^{e,T}\cdot\mathbf{F}^{e}\right] \tag{30}$$

De plus on peut écrire également, entre l'instant n et l'instant $n+1$:

$$\mathbf{E}_{n+1}=\mathbf{E}_{n}+\Delta\mathbf{E} \tag{31}$$

3.2 Branchement à la loi de comportement HPP

La loi de comportement HPP doit fournir le tenseur des contraintes $\mathbf{T}$, défini par :

$$\mathbf{T}_{n+1}=\hat{\mathbf{T}}\left(\Delta\mathbf{E};\mathbf{E}_{n},\mathbf{T}_{n},\beta_{n}\right) \tag{32}$$

où β_n représente l'ensemble des variables internes à l'instant n et $\mathbf{T}_n$ les contraintes à l'instant n. Il faut donc recalculer $\mathbf{T}_n$ en fonction des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}_n$ stockées à l'instant n. Ces contraintes s'écrivent $\mathbf{T}_n=\mathbf{S}_n:\mathbf{P}_n^{-1}$. Toutefois cela nécessite la transformation de $\boldsymbol{\sigma}_n$ en $\mathbf{S}_n$ et le calcul de $\mathbf{P}_n^{-1}$ qui peut être coûteux. On choisit donc de stocker les tenseurs $\mathbf{T}$ en tant que variables internes.

Remarque
Les tenseurs $\mathbf{T}$ étant stockés en tant que variables internes, l'utilisateur souhaitant imposer un état de contrainte initiale devra utiliser les opérandes VARI et DEPL du mot-clé facteur ETAT_INIT de la commande STAT_NON_LINE. En effet, il faut donner en entrée le tenseur de contrainte défini dans l'espace logarithmique $\mathbf{T}$ (et non celui de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$). L'utilisateur souhaitant utiliser le formalisme GDEF_LOG avec un champ de contrainte initial (ETAT_INIT) est avisé de se reporter au cas test *ssnp159b (V6.03.159).*

3.3 Post-traitement

Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de deuxième espèce s'obtient par :

$$\mathbf{S}_{n+1}=\mathbf{T}_{n+1}:\mathbf{P}_{n+1} \tag{33}$$

Avec $\mathbf{P}_{n+1}=\partial_{\mathbf{C}}\left(\mathbf{E}_{n+1}\right)$. Cette quantité est calculée *via* un algorithme présenté dans [13] et rappelé en annexe 2. On rappelle également que le tenseur des contraintes de Cauchy est obtenu par :

$$J\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\tau}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{F}^{T}=\mathbf{F}\cdot\left(\mathbf{T}:\mathbf{P}\right)\cdot\mathbf{F}^{T} \tag{34}$$

On obtient le module tangent, en configuration dite «Lagrangienne», par dérivation de $\mathbf{S}_{n+1}$:

$$\dot{\mathbf{S}}_{n+1}=\mathbf{C}_{n+1}^{ep}:\frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}}_{n+1}\text{ avec }\mathbf{C}_{n+1}^{ep}=\mathbf{P}_{n+1}^{T}:\mathbf{E}_{n+1}^{ep}:\mathbf{P}_{n+1}+\mathbf{T}_{n+1}:\mathbf{L}_{n+1} \tag{35}$$

$\mathbf{E}_{n+1}^{ep}=\frac{\partial\mathbf{T}_{n+1}}{\partial\mathbf{E}_{n+1}}$ représente l'opérateur tangent issu de la loi de comportement et $\mathbf{L}_{n+1}$ est le tenseur d'ordre six (en 3D) défini par :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathbf{L}_{n+1}=4\,\partial^2_{\mathbf{CC}}\left(\mathbf{E}_{n+1}\right) \tag{36}$$

On peut alors calculer sur cette configuration les forces internes et la matrice tangente, sur la configuration initiale, comme dans [14]. L'objectivité est préservée (contraintes invariantes par rotation en écrouissages isotrope et cinématique) et la précision bonne (résultats identiques à SIMO_MIEHE en isotrope).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

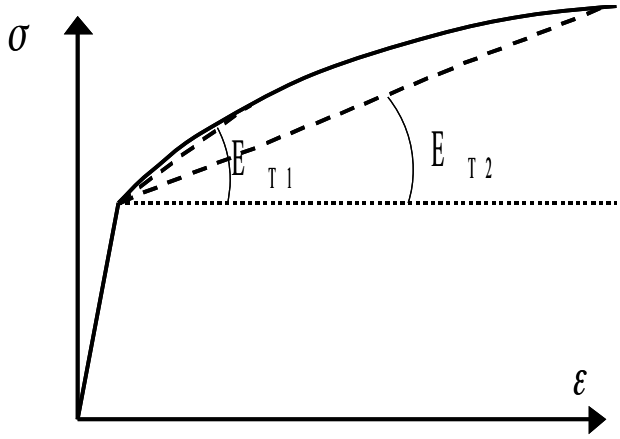
4 Validité des modèles de grandes déformations

4.1 Identification des paramètres

Il faut également préciser que le formalisme ici présenté et étudié n'étend pas la validité des lois de comportement dans le domaine des grandes déformations, il ne fait qu'en proposer une dérivation objective. Pour clarifier ce propos, il est possible de considérer le cas d'une loi élastoplastique à écrouissage isotrope linéaire. Ce type de loi de plasticité est valide physiquement en petites déformations ; son utilisation est étendue aux grandes déformations, mais sa validité physique peut être justement remise en question.

De plus, une identification faite sur des essais en petites déformations doit être potentiellement reconsidérée ; sur la figure 2, on présente une courbe de traction modélisée par un écrouissage isotrope linéaire : le module tangent doit forcément être défini par rapport à la plage de déformation considérée. En petites déformations, il semble plus judicieux d'utiliser E_{T1} ; si les déformations sont plus importantes, il semble plus judicieux d'utiliser E_{T2} comme valeur de la pente d'écrouissage. Mais on sent bien que c'est la validité physique de la loi elle-même qui devrait être remise en cause.

Figure 2 : Identification en grandes ou petites déformations



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Comparaison avec PETIT_REAC

5.1 Approximation des grandes déformations par PETIT_REAC

Le principe de la formulation PETIT_REAC consiste simplement à réactualiser la géométrie du problème au cours des itérations de Newton (et non à la fin de chaque pas de temps). Ceci signifie que toutes les quantités intervenant dans les équations du problème sont évaluées sur la configuration actuelle. Rien d'autre n'est modifié par rapport au cas petites perturbations.

5.1.1 Description cinématique

La description cinématique est la même que celle des petites perturbations. Ceci signifie qu'un incrément de déformation est calculé par :

$$\Delta\varepsilon=\frac{1}{2}(\nabla_{\Omega_i}(\Delta u)+\nabla^T_{\Omega_i}(\Delta u)) \tag{37}$$

Ω_i étant la configuration réactualisée. La déformation totale est ensuite la somme de chacun de ces incréments de déformation linéarisée, calculés sur des configurations différentes. Il est donc délicat de lui donner un sens physique et mieux vaut l'utiliser comme un indicateur du niveau de déformation atteint. On applique l'hypothèse de décomposition additive des déformations.

5.1.2 Relation de comportement élastoplastique

Dans l'expression de la relation contraintes-déformations élastiques, on a vu la nécessité d'utiliser une dérivée objective : $\mathring{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{C}:[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p]$. Avec PETIT_REAC on remplace la dérivée objective par la simple dérivée en temps : elle n'est donc pas objective. En conséquence, l'emploi de PETIT_REAC n'est donc pas approprié aux grandes rotations mais il l'est aux grandes déformations, sous certaines conditions [10] :

- très petits incréments ;
- très petites rotations (ce qui implique un chargement quasi-radial) ;
- déformation élastiques petites devant les déformations plastiques ;
- comportement isotrope.

5.1.3 Équilibre et matrice tangente

En terme d'éléments finis, la résolution par PETIT_REAC implique à chaque pas de charge la résolution du même système non linéaire qu'en petites déformations [11] :

$$\begin{cases} L^{\text{int}}(u_i,t_i)+B^T.\lambda_i=L^{ext}(t_i) \\ B.u_i=u^d(t_i) \end{cases} \tag{38}$$

A la différence près que les forces internes sont formellement calculées par :

$$L^{\text{int}}(u_i,t_i)=Q^T(u_i):\sigma \tag{39}$$

où l'opérateur Q dépend des déplacements. Dans ce cadre, le calcul de la matrice tangente mène à :

$$K_i^n=\frac{\partial L^{\text{int}}}{\partial u}\Big|_{(u_i^n,t_i)}=Q(u):\frac{\partial\sigma}{\partial u}\Big|_{(u_i^n,t_i)}+\frac{\partial Q(u)}{\partial u}\Big|_{(u_i^n,t_i)}:\sigma \tag{40}$$

Le premier terme est la contribution du comportement, similaire à ce qui a été présenté en petites transformations, à la différence que cette contribution est ici évaluée en configuration actuelle. Le second terme est la contribution de la géométrie qui n'est pas présente en petites transformations.
Dans le cadre de la résolution PETIT_REAC, ce terme n'est pas présent dans le calcul de la matrice tangente. On a donc :

$$K_i^n=Q(u):\frac{\partial\sigma}{\partial u}\Big|_{(u_i^n,t_i)} \tag{41}$$

L'absence de la contribution géométrique dans la matrice tangente peut parfois rendre la convergence difficile.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.2 Comparaison sur un exemple

Le formalisme PETIT_REAC (cf. [6]) se base sur une actualisation de la géométrie pour le calcul de l'incrément de déformation avant d'intégrer le comportement de façon identique aux petites déformations. Ceci permet un traitement simple des grandes déformations, mais de façon très approchée, non objective et pouvant engendrer de grandes erreurs.
Pour s'en convaincre, considérons la traction-rotation alternée d'un cube ; pour plus de détails sur le test, on se référera à [7] par exemple.

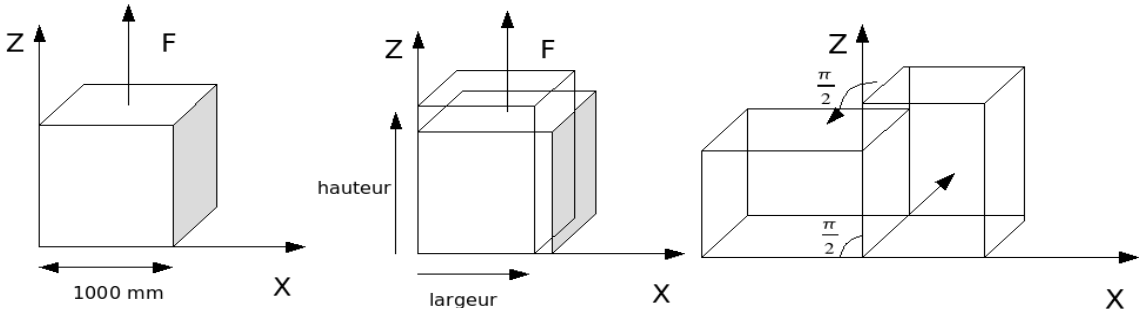


Figure 3 : Exemple de traction rotation d'un cube

Durant les phases de rotation, la contrainte doit rester constante : un mouvement de corps rigide n'engendre pas de contraintes (en statique tout du moins et sans viscosité).

Si on considère la réponse obtenue avec un comportement VMIS_ISOT_LINE pour les déformations PETIT_REAC et GDEF_LOG , le type de déformation PETIT_REAC est mis en défaut alors que GDEF_LOG est valide (et fournit une réponse identique à SIMO_MIEHE).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Bibliographie

1 Simo J.C., Hughes T.J.R., Computational Inelasticity, Mechanics and Materials, Interdisciplinary Applied Mathematics Vol. 7 , Edition Springer-Verlag, New York, 1998.

2 Manuel utilisation de Aster U4.51.11, Comportement Non Linéaires

3 Manuel de référence Aster R5.03.21, Modélisation élasto-(visco)-plastique avec écrouissage isotrope en grandes déformations,

4 Manuel de référence Aster R5.03.19, Loi de comportement hyperélastique. Matériau presque incompressible.

5 Note interne EDF HI-74/98/006/0, Introduction dans le Code_Aster d'un modèle de comportement en grandes déformations élastoplastique avec écrouissage isotrope, V. Cano E . Lorentz, 1998.

6 Manuel utilisation Aster U4.51.11, Comportements Non Linéaires.

7 Manuel validation Aster ssna106, Traction-rotation alternée d'un élément. Loi plastique isotrope.

8 Grandes transformations, contraintes planes, déformations planes généralisées, Leblond, 1989.

9 Manuel de références Aster R5.03.40, Modélisation statique et dynamique des poutres en grandes rotations.

10 Compte-rendu EDF/DER-MMN 1536/07 : Grandes déformations plastiques. Modélisation dans Aster par PETIT_REAC. E.Lorentz, 24 juin 1996

11 Manuel de références Aster R5.03.01, Algorithme de STAT_NON_LINE

12 CR-AMA-09.201. « Modèles de grandes déformations compatibles avec la plupart des comportements ». Rapport de stage de Julie Coloigner. R. Bargellini,J.-M. Proix.

13 Miehe C., Apel N., Lambrecht M.: Anisotropic additive plasticity in the logarithm strain space : modular kinematic formulation and implementation based on incremental minimization principles for standard materials., Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191, pp.5383-5425, 2002.

14 Manuel de référence Aster R5.03.20, relation de comportement élastique non linéaire en grands déplacements.

15 « Computational methods for plasticity » Wiley 2008, de EA de Souza Neto, D. Peric, DRJ. Owen

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
10.2	R.BARGELLINI,J.M.PROIX R&D/AMA J.COLOIGNER Univ. Rennes	Texte initial
10.4	R.BARGELLINI,J.M.PROIX R&D/AMA	Ajout de la description de l'algorithme utilisant la dérivée de Lie, du calcul de l'opérateur tangent, et de l'algorithme GDEF_LOG
13.1	M.Abbas	Suppression de GDEF_HYPO_ELAS

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Annexe 1 : Calcul des déformations logarithmiques

8.1 Notations :

$\mathbf{A}$ désigne un tenseur d'ordre deux, et $\bar{\mathbf{A}}$ un tenseur d'ordre quatre. Nous adoptons la notation de Voigt, (voir par exemple [16]) définie pour un tenseur d'ordre deux :

$$\mathbf{A}=\begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{33} \\ \sqrt{2}\,A_{12} \\ \sqrt{2}\,A_{13} \\ \sqrt{2}\,A_{23} \end{Bmatrix} \tag{42}$$

Et pour un tenseur d'ordre quatre:

$$\bar{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & \sqrt{2}\,A_{1112} & \sqrt{2}\,A_{1123} & \sqrt{2}\,A_{1113} \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2233} & \sqrt{2}\,A_{2212} & \sqrt{2}\,A_{2223} & \sqrt{2}\,A_{2213} \\ A_{3311} & A_{3322} & A_{3333} & \sqrt{2}\,A_{3312} & \sqrt{2}\,A_{3323} & \sqrt{2}\,A_{3313} \\ \sqrt{2}\,A_{1211} & \sqrt{2}\,A_{1222} & \sqrt{2}\,A_{1233} & 2\,A_{1212} & 2\,A_{1223} & 2\,A_{1213} \\ \sqrt{2}\,A_{1311} & \sqrt{2}\,A_{1322} & \sqrt{2}\,A_{1333} & 2\,A_{1312} & 2\,A_{1323} & 2\,A_{1313} \\ \sqrt{2}\,A_{2311} & \sqrt{2}\,A_{2322} & \sqrt{2}\,A_{2333} & 2\,A_{2312} & 2\,A_{2323} & 2\,A_{2313} \end{bmatrix} \tag{43}$$

Où les composantes relatives à la notation de Voigt seront désignées par une lettre grecque :

$$\|A_{ij}\|=\|A_{\alpha}\| \tag{44}$$

On a alors les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}:\mathbf{B}&=A_{ij}B_{ij}=A_{\alpha}B_{\alpha} \\ \bar{\mathbf{A}}:\mathbf{B}&=A_{ijkl}B_{kl}=A_{\alpha\beta}B_{\beta} \\ \bar{\mathbf{A}}:\bar{\mathbf{B}}&=A_{ijkl}B_{klmn}=A_{\alpha\beta}B_{\beta\gamma} \end{aligned} \tag{45}$$

L'inverse d'un tenseur d'ordre qutre comportant des symétries mineures ($A_{ijrs}=A_{jirs}=A_{ijsr}$) s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}:\bar{\mathbf{A}}^{-1}&=\bar{\mathbf{I}}_d \\ A_{ijrs}A^{-1}_{rskl}&=I_{ijkl}=\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right) \\ A_{\alpha\gamma}A^{-1}_{\gamma\beta}&=I_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{46}$$

8.2 Expression des contraintes en configuration Lagrangienne

La puissance des efforts intérieurs s'écrit :

$$p_{\text{int}}=\mathbf{T}:\dot{\mathbf{E}}=\mathbf{S}:\bar{\mathbf{P}}^{-1}\,\dot{\mathbf{E}} \tag{47}$$

avec $\bar{\mathbf{P}}=2\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{C}}$ ce qui permet de calculer $\mathbf{S}=\mathbf{T}:\mathbf{P}$ (ou $S_{ij}=T_{kl}:P_{klij}$). Pour calculer le tenseur des contraintes de Cauchy, il suffit d'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{det\,\mathbf{F}}\mathbf{F}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{F}^{T} \tag{48}$$

Cas particulier des contraintes planes :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans ce cas, on ne connait pas entièrement $det\,\mathbf{F}$. En effet, la composante zz du tenseur de déformations logarithmiques $\mathbf{E}$ est inconnue, car dépendante de la loi de comportement. En se limitant aux comportements tels que $det\,\mathbf{F}^p=0$ (incompressibilité plastique), on a alors $det\,\mathbf{F}=det\,\mathbf{F}^e$.
Suivant [16] on peut calculer cette expression :

$$det\,\mathbf{F}^e=e^{E^e_{xx}+E^e_{yy}+E^e_{zz}} \tag{49}$$

Où $\mathbf{E}^e$ représente la partie élastique des déformations logarithmiques, connue pour toute loi de comportement élasto-plastique ou élasto-viscoplastique par la loi de Hooke $\mathbf{E}^e=\mathbf{\Lambda}^{-1}\cdot\mathbf{T}$.
On va démontrer cette relation. On rappelle la définition des déformations logarithmiques :

$$E_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{k=1,3}\log\left(\lambda^{(k)}\right)\boldsymbol{N}_i^{(k)}\otimes\boldsymbol{N}_j^{(k)} \tag{50}$$

Ce qui conduit à cette expression du déterminant :

$$det\,\mathbf{F}^e=\sqrt{det\,\mathbf{F}^T\mathbf{F}}=\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \tag{51}$$

λ_i étant les valeurs propres de $\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F}$. Donc :

$$\log\left(det\,\mathbf{F}^e\right)=\frac{1}{2}\left[\log\left(\lambda_1\right)+\log\left(\lambda_2\right)+\log\left(\lambda_3\right)\right] \tag{52}$$

En appliquant la fonction exponentielle, on a le résultat (49).

8.3 Expression de l'opérateur tangent en configuration Lagrangienne

En dérivant l'expression $\mathbf{S}=\mathbf{T}:\mathbf{P}$ par rapport au temps :

$$\dot{\mathbf{S}}=\dot{\mathbf{T}}:\bar{\mathbf{P}}+\mathbf{T}:\dot{\bar{\mathbf{P}}}=\left(\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\mathbf{E}}:\dot{\mathbf{E}}\right):\bar{\mathbf{P}}+\mathbf{T}:\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{P}}}{\partial\mathbf{C}}:\dot{\mathbf{C}}\right)=\left[\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\mathbf{E}}:\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{C}}:\dot{\mathbf{C}}\right)\right]:\bar{\mathbf{P}}+\mathbf{T}:\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{P}}}{\partial\mathbf{C}}:\dot{\mathbf{C}}\right) \tag{53}$$

Soit :

$$\dot{\mathbf{S}}=\left(\bar{\mathbf{P}}^T:\bar{\bar{\mathbf{E}}}^p:\bar{\mathbf{P}}+\mathbf{T}:\bar{\bar{\mathbf{L}}}\right):\frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} \tag{54}$$

avec $\bar{\bar{\mathbf{L}}}=4\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial\mathbf{C}\partial\mathbf{C}}$ et $\bar{\bar{\mathbf{E}}}^p=\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\mathbf{E}}$. Ce qui définit l'opérateur tangent $\bar{\bar{\mathbf{C}}}^{ep}=\left(\bar{\mathbf{P}}^T\cdot\bar{\bar{\mathbf{E}}}^p\cdot\bar{\mathbf{P}}+\mathbf{T}:\bar{\bar{\mathbf{L}}}\right)$ qui vérifie $\dot{\mathbf{S}}=\bar{\bar{\mathbf{C}}}^{ep}:\frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}}$. Ou encore, en fonction des déformations de Green-Lagrange $\mathbf{\Delta}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{C}-\mathbf{I}_d\right)$:

$$\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{\Delta}}=\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{C}}:\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\mathbf{\Delta}}=2\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{C}}=\bar{\bar{\mathbf{C}}}^{ep} \tag{55}$$

L'expression de cet opérateur tangent ainsi que le tenseur des contraintes, tous deux en configuration Lagrangienne, permettent, pour le calcul des forces internes, d'utiliser une formulation variationnelle en configuration initiale, comme dans [R5.03.20] par exemple. On écrit l'équilibre sous forme variationnelle sur la configuration initiale :

$$\delta W_{\text{int}}\cdot\delta\mathbf{v}+SW_{\text{ext}}\cdot\delta\mathbf{v}=0\quad\forall\,\delta\mathbf{v}\ \text{cinématiquement admissible} \tag{56}$$

Sous l'hypothèse que le chargement ne dépend pas de la transformation géométrique, le travail virtuel des efforts extérieurs s'écrit comme une forme linéaire :

$$\delta W_{\text{ext}}\cdot\delta\mathbf{v}=\int_{\Omega_0}\rho_0 F_i\delta v_i\,d\Omega_0+\int_{\partial_F\Omega_0}T_i^d\delta v_i\,dS_o \tag{57}$$

Avec $\mathbf{F}$ le chargement volumique et $\mathbf{T}^d$ un chargement surfacique s'exerçant sur le bord $\partial_F\Omega_0$. Là encore, nous choisissons la configuration initiale comme configuration de référence, pour exprimer le travail des efforts intérieurs [R5,03,20].[R7.02.03] :

$$SW_{\text{int}}\cdot\delta\mathbf{v}=-\int_{\Omega_0}F_{ik}S_{kl}\delta v_{i,l}\,d\Omega_o\ \text{ avec }\ \delta v_{i,l}=\frac{\partial\,dv_i}{\partial X_l} \tag{58}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans l'optique d'une résolution par une méthode de Newton, il importe d'exprimer également la variation seconde du travail virtuel des efforts intérieurs, à savoir, la rigidité géométrique :

$$d^2 W_{\text{int}} \cdot \delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{v} = -\int_{\Omega_0} \delta u_{i,k} S r_{kl} \delta v r_{i,l} d\Omega_0 \tag{59}$$

Et la rigidité élastique :

$$-\int_{\Omega_0} \delta u_{i,q} F_{ip} \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{\Delta}} \right)_{pqkl} F_{jk} \delta v_{j,l} d\Omega_0 \tag{60}$$

8.4 Calcul effectif des déformations logarithmiques

Les déformations logarithmiques sont définies par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \log(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \log(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) \tag{61}$$

En toute rigueur, il faudrait ajouter le tenseur métrique dans le cas d'une configuration initiale définie dans un espace différent de l'espace euclidien (cas des coques par exemple). Pour simplifier les écritures, nous nous placerons dans le cas d'une configuration initiale euclidienne, les composantes des vecteurs et tenseurs étant écrites dans un repère orthonormé 3D. La restriction au 2D est immédiate. Le calcul de la déformation logarithmique ne peut se faire que dans le repère propre. Il faut donc déterminer les trois valeurs propres $\lambda^{(i)}$ et vecteurs propres $\boldsymbol{N}^{(i)}$ solutions du problème aux valeurs propres suivant :

$$\mathbf{C}\,\boldsymbol{N}^{(i)} = \lambda^{(i)} \boldsymbol{N}^{(i)} \tag{62}$$

On peut alors calculer les trois valeurs dans l'espace « propre » :

$$e^{(i)} = \frac{1}{2} \log(\lambda^{(i)}) \tag{63}$$

Les déformations logarithmiques sont alors transportées dans l'espace d'origine par :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1,3} \log(\lambda^{(k)}) \boldsymbol{N}_i^{(k)} \otimes \boldsymbol{N}_j^{(k)} \tag{64}$$

Car la fonction logarithmique est une fonction isotrope du tenseur $\mathbf{C}$ [16]. Pour le post-traitement (voir §3.3), c'est à dire le calcul du tenseur des contraintes et de l'opérateur tangent, il faut calculer les quantités $\bar{\mathbf{P}} = 2\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{C}}$:

$$\bar{\mathbf{P}} = \sum_{i=1,3} \frac{1}{2} d^{(i)} \boldsymbol{N}^{(i)} \otimes \boldsymbol{N}^{(i)} \otimes \boldsymbol{M}^{(ii)} + \sum_{i=1,3} \sum_{j \neq i}^{3} \theta_{ij} \boldsymbol{N}^{(i)} \otimes \boldsymbol{N}^{(j)} \otimes \boldsymbol{M}^{(ij)} \tag{65}$$

Et la quantité $\mathbf{T} : \bar{\mathbf{L}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \bar{\bar{\mathbf{L}}} = & \sum_{i}^{3} \frac{1}{4} f^{(i)} \zeta^{(ii)} \mathbf{M}^{(ii)} \otimes \mathbf{M}^{(ii)} + \sum_{i}^{3} \sum_{j \neq i}^{3} \sum_{k \neq i, k \neq j}^{3} 2\eta \zeta^{(ij)} \mathbf{M}^{(ik)} \otimes \mathbf{M}^{(ij)} \\ & + \sum_{i}^{3} \sum_{j \neq i} 2\xi^{(ij)} \left[\zeta^{(ij)} \left(\mathbf{M}^{(ij)} \otimes \mathbf{M}^{(jj)} + \mathbf{M}^{(jj)} \otimes \mathbf{M}^{(ij)} \right) + \zeta^{(jj)} \mathbf{M}^{(ij)} \otimes \mathbf{M}^{(ij)} \right] \end{aligned} \tag{66}$$

Avec $d^{(i)} = \frac{1}{\lambda^{(i)}}$, $f^{(i)} = \frac{-2}{(\lambda^{(i)})^2}$, $\zeta^{(ij)} = \mathbf{T} : \boldsymbol{N}^{(i)} \otimes \boldsymbol{N}^{(j)}$, $\mathbf{M}_{ab}^{(ij)} = \boldsymbol{N}_a^{(i)} \boldsymbol{N}_b^{(j)} + \boldsymbol{N}_a^{(j)} \boldsymbol{N}_b^{(i)}$. $\theta^{(ij)}$, $\xi^{(ij)}$ et $\eta^{(ij)}$ sont définis par :

- si toutes les valeurs propres sont différentes :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\theta^{(ij)}=\frac{\left(e^{(i)}-e^{(j)}\right)}{\left(\lambda^{(i)}-\lambda^{(j)}\right)}$$
$$\xi^{(ij)}=\frac{\left(\theta^{(ij)}-\frac{1}{2}d^{(j)}\right)}{\left(\lambda^{(i)}-\lambda^{(j)}\right)} \quad (67)$$
$$\eta=\sum_{i}^{3}\sum_{j\neq i}^{3}\sum_{k\neq i,k\neq j}^{3}\frac{e^{(i)}}{2(\lambda^{(i)}-\lambda^{(j)})(\lambda^{(i)}-\lambda^{(k)})}$$

- si deux valeurs propres sont égales $\lambda^{(i)}=\lambda^{(j)}\neq\lambda^{(k)}$:

$$\theta^{(ij)}=\theta^{(ji)}=\frac{1}{2}d^{(j)},\ \xi^{(ij)}=\xi^{(ji)}=\frac{1}{8}f^{(j)},\ \eta=\xi^{(ki)}$$
$$\text{pour } n=k,\ m\in\{i,j\} \text{ ou } m=k,\ n\in\{i,j\}$$
$$\theta^{(mn)}=\frac{\left(e^{(m)}-e^{(n)}\right)}{\left(\lambda^{(m)}-\lambda^{(n)}\right)} \text{ et } \xi^{(mn)}=\frac{\left(\theta^{(mn)}-\frac{1}{2}d^{(n)}\right)}{\left(\lambda^{(m)}-\lambda^{(n)}\right)} \quad (68)$$

- si les trois valeurs propres sont égales $\lambda^{(i)}=\lambda^{(j)}=\lambda^{(k)}$:

$$\theta^{(ij)}=\frac{1}{2}d^{(j)},\ \xi^{(ij)}=\frac{1}{8}f^{(j)},\ \eta=\frac{1}{8}f^{(j)} \quad (69)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)