Loi de comportement en grandes rotations et petites déformations

Résumé :

On décrit ici la formulation adoptée pour traiter des grandes rotations et des petites déformations. Cette formulation est valable pour toutes les lois de comportement définies sous COMPORTEMENT de la commande STAT_NON_LINE et munies des modélisations tridimensionnelle (3D), axisymétrique (AXIS), en déformations planes (D_PLAN) et en contraintes planes (C_PLAN).

Cette fonctionnalité est choisie par l'intermédiaire du mot-clé DEFORMATION = 'GROT_GDEP' sous COMPORTEMENT.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Quelques définitions....3
2 Hypothèse des petites déformations et grandes rotations....3
3 Bibliographie....4
4 Description des versions du document....4

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Quelques définitions

On rappelle ici quelques définitions de tenseurs liés aux grandes déformations.
On appelle tenseur gradient de la transformation $\mathbf{F}$, le tenseur qui fait passer de la configuration initiale Ω_0 à la configuration actuelle déformée $\Omega(t)$.

$$\mathbf{F}=\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}}=\mathbf{Id}+\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u} \text{ avec } \mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X},t)=\mathbf{X}+\mathbf{u} \quad \textbf{éq 1-1}$$

où $\mathbf{X}$ est la position d'un point dans Ω_0, $\mathbf{x}$ la position de ce même point après déformation dans $\Omega(t)$ et $\mathbf{u}$ le déplacement.
Différents tenseurs de déformations peuvent être obtenus en éliminant la rotation dans la transformation locale. Ceci peut se faire de deux manières, soit en utilisant le théorème de décomposition polaire, soit en calculant directement les variations de longueur et d'angle (variation du produit scalaire).
On obtient en description lagrangienne (c'est-à-dire sur la configuration initiale) :

- Par la décomposition polaire :

$$\mathbf{F}=\mathbf{R}\,\mathbf{U} \quad \textbf{éq 1-2}$$

où $\mathbf{R}$ est le tenseur de rotation (orthogonal) et $\mathbf{U}$ le tenseur de déformations pures droit (symétrique et défini positif).

- Par un calcul direct des déformations :

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{Id}) \text{ avec } \mathbf{C}=\mathbf{F}^T\mathbf{F} \quad \textbf{éq 1-3}$$

où $\mathbf{E}$ est le tenseur de déformation de Green-Lagrange et $\mathbf{C}$ le tenseur de Cauchy-Green droit.
Les tenseurs $\mathbf{U}$ et $\mathbf{C}$ sont reliés par la relation suivante :

$$\mathbf{C}=\mathbf{U}^2 \quad \textbf{éq 1-4}$$

2 Hypothèse des petites déformations et grandes rotations

Lorsque les déformations sont petites, il n'y a pas de difficultés fondamentales pour écrire les lois de comportement : les différents modèles « grandes déformations » conduisent au même modèle « petites déformations », et ce aussi bien pour des comportements isotropes qu'anisotropes. Seule la difficulté d'ordre géométrique liée à la rotation finie subsiste.

Pour écrire le modèle en grandes rotations et petites déformations, on part de la décomposition polaire de $\mathbf{F}$ soit $\mathbf{F}=\mathbf{R}\,\mathbf{U}$. Comme le tenseur $\mathbf{U}$ est un tenseur de déformation pur et de surcroît petit, on peut calculer, par une loi de comportement petites déformations, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^*$ associé à cette l'histoire en déformation $\mathbf{U}$. Il suffit ensuite de faire subir à ce tenseur $\boldsymbol{\sigma}^*$, la rotation $\mathbf{R}$ pour obtenir le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ associé à l'histoire en déformation $\mathbf{F}$, comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{R}\,\boldsymbol{\sigma}^*\,\mathbf{R}^T \quad \textbf{éq 2-1}$$

On peut résumer ce schéma comme suit :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathbf{F}\rightarrow\mathbf{U}=\mathbf{Id}+\boldsymbol{\varepsilon}\overset{ldc\,HPP}{\rightarrow}\boldsymbol{\sigma}^{*}\rightarrow\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{R}\,\boldsymbol{\sigma}^{*}\,\mathbf{R}^{T} \qquad \textbf{éq 2-2}$$

L'inconvénient de cette chaîne de calcul est qu'elle nécessite la décomposition polaire de $\mathbf{F}$. Deux hypothèses sont faites alors pour l'éviter.
D'une part, pour éviter le calcul de $\mathbf{U}$, on peut approcher la déformation HPP $\boldsymbol{\varepsilon}$, par la déformation de Green $\mathbf{E}$, en tirant profit du fait que les déformations sont petites :

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\mathbf{F}^{T}\mathbf{F}-\mathbf{Id})=\frac{1}{2}(\mathbf{U}-\mathbf{Id})(\mathbf{U}+\mathbf{Id})=\boldsymbol{\varepsilon}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{2}\approx\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \textbf{éq 2-3}$$

On en déduit alors $\boldsymbol{\sigma}^{*}$ par la loi de comportement « petites déformations ».
D'autre part, de la même manière pour éviter le calcul de $\mathbf{R}$, on peut approcher le tenseur des contraintes HPP $\boldsymbol{\sigma}^{*}$ par le second tenseur de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S}=J\,\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{F}^{-T}=\mathrm{Det}(\mathbf{U})\,\mathbf{U}^{-1}\boldsymbol{\sigma}^{*}\mathbf{U}^{-1}=\boldsymbol{\sigma}^{*}+\boldsymbol{\sigma}^{*}\mathrm{O}(\boldsymbol{\varepsilon})\approx\boldsymbol{\sigma}^{*} \qquad \textbf{éq 2-4}$$

On en déduit alors $\boldsymbol{\sigma}$ par :

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{J}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^{T} \qquad \textbf{éq 2-5}$$

Finalement, en présence de grandes rotations et de petites déformations, il suffit d'écrire la loi de comportement « petites déformations » avec, en entrée, l'histoire des déformations de Green $\mathbf{E}$, et en sortie, l'histoire des contraintes de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$. Cette approche est valable aussi bien pour des lois de comportement isotropes qu'anisotropes.
Quant à la formulation variationnelle appropriée, il s'agit de celle adoptée en hyper-élasticité (comportement ELAS, ELAS_VMIS_XXX sous COMPORTEMENT avec les déformations de type GROT_GDEP). Pour plus de détails, on se reportera au document de référence associé [R5.03.20]. Il faut cependant être sûr que le problème étudié induit bien des petites déformations car sinon on ne peut plus faire les simplifications [éq 2-3] et [éq 2-4]. Sans cette hypothèse, l'écart avec un comportement plastique s'accroît rapidement avec l'intensité des déformations.

3 Bibliographie

1. CANO V., LORENTZ E., "Introduction dans le *Code_Aster* d'un modèle de comportement en grandes déformations élastoplastiques avec écrouissage isotrope", Note interne EDF DER, HI-74/98/006/0, 1998

4 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
6	V.Cano EDF-R&D/AMA	Texte initial
10,1	J.M.Proix EDF-R&D/AMA	Changement de GREEN en GROT_GDEP

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)