Modélisation élasto(visco)plastique avec écrouissage isotrope en grandes déformations

Résumé

On décrit ici une relation de comportement thermoélastoplastique avec écrouissage isotrope écrite en grandes déformations et proposée par Simo et Miehe. Ce modèle est disponible dans la commande STAT_NON_LINE par l'intermédiaire du mot-clé RELATION : 'VMIS_ISOT_TRAC', 'VMIS_ISOT_PUIS' ou 'VMIS_ISOT_LINE' sous le mot-clé facteur COMPORTEMENT et avec le mot-clé DEFORMATION : 'SIMO_MIEHE'. Une version visqueuse de ce modèle est également proposée : 'VISC_ISOT_TRAC' et 'VISC_ISOT_LINE'.

Ce modèle est implanté pour les modélisations tridimensionnelles (3D), axisymétrique (AXIS) et en déformations planes (D_PLAN).

On présente l'écriture et le traitement numérique de cette loi, ainsi que la formulation variationnelle associée. Il s'agit d'une formulation variationnelle eulérienne, avec réactualisation de la géométrie et qui tient compte de la rigidité de comportement et de la rigidité géométrique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Introduction....3
2 Notations....4
3 Rappels sur les grandes déformations....5
3.1 Cinématique....5
3.2 Contraintes....6
3.3 Objectivité....7
4 Présentation du modèle de comportement....7
4.1 Aspect cinématique....7
4.2 Relations de comportement....8
4.3 Correction de l'énergie élastique en présence de thermique....10
4.4 Choix de la fonction d'écrouissage....10
4.5 Contraintes et variables internes....11
4.6 Domaine d'utilisation....11
4.7 Intégration de la loi de comportement....12
5 Formulation variationnelle....14
5.1 Cas du milieu continu....14
5.2 Discrétisation par éléments finis....15
5.3 Expression de la matrice tangente du comportement....16
6 Bibliographie....17
7 Description des versions du document....17

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Nous présentons ici une loi de comportement thermoélastoplastique écrite en grandes déformations proposée par SIMO J.C. et MIEHE C. [bib1] qui tend en petites déformations vers le modèle de comportement élastoplastique à écrouissage isotrope et critère de Von Mises, décrit en [R5.03.02]. Les choix cinématiques permettent, comme avec la simple réactualisation disponible via le mot-clé PETIT_REAC, de traiter des grands déplacements et des grandes déformations mais également des grandes rotations de manière exacte.
Les spécificités de ce modèle sont les suivantes :

- tout comme en petites déformations, on suppose l'existence d'une configuration relâchée, c'est-à-dire localement libre de contrainte, qui permet de décomposer la déformation totale en une partie thermoélastique et une partie plastique,
- la décomposition de cette déformation en des parties thermoélastique et plastique n'est plus additive comme en petites déformations (ou pour les modèles grandes déformations écrits en taux de déformation avec par exemple une dérivée de Jaumann) mais multiplicative,
- les déformations élastiques sont mesurées dans la configuration actuelle (déformée) tandis que les déformations plastiques sont mesurées dans la configuration initiale,
- comme en petites déformations, les contraintes dépendent uniquement des déformations thermo-élastiques,
- les déformations plastiques se font à volume constant. La variation de volume est alors uniquement due aux déformations thermo-élastiques,
- ce modèle conduit lors de son intégration numérique à un modèle incrémentalement objectif (cf. [§3.3]) ce qui permet d'obtenir la solution exacte en présence de grandes rotations.

Une version visqueuse de ce modèle est également disponible (loi en sinus hyperbolique comme dans le cas du modèle de Rousselier ROUSS_VISC, cf. [R5.03.07]).

Par la suite, on rappelle brièvement quelques notions de mécanique en grandes déformations, puis on présente les relations de comportement du modèle et son intégration numérique pour traiter les équations d'équilibre.

On propose une formulation variationnelle eulérienne, avec réactualisation de la géométrie. A ce titre, on exprime le travail des efforts intérieurs et sa variation (dans le but d'une résolution par la méthode de Newton) pour le problème continu, qui fournissent respectivement après discrétisation par éléments finis le vecteur des forces intérieures et la matrice tangente.

Nota Bene :

> *On trouvera dans [bib2] ou [bib3] une présentation approfondie sur les grandes déformations. Ce document est extrait de [bib4] où l'on fait une présentation plus détaillée du modèle élastoplastique, de son intégration numérique et où l'on donne quelques exemples de validation.*

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Notations

On notera par :

$\mathbf{Id}$	matrice identité
$\mathrm{tr}\, A$	trace du tenseur $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$	transposé du tenseur $\mathbf{A}$
$\det A$	déterminant de $\mathbf{A}$
$\langle X \rangle$	partie positive de X
$\tilde{A}$	partie déviatorique du tenseur $\mathbf{A}$ définie par $\tilde{A} = A - (\frac{1}{3} tr\, A)\, \mathbf{Id}$
:	produit doublement contracté : $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij} = tr(\mathbf{A}\mathbf{B}^{T})$
$\otimes$	produit tensoriel : $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$
A_{eq}	valeur équivalente de von Mises définie par $A_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{A} : \tilde{A}}$
$\nabla_{\mathrm{x}} \mathbf{A}$	gradient : $\nabla_X \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{X}}$
$\mathrm{div}_x \mathbf{A}$	divergence : $(\mathrm{div}_x \mathbf{A})_i = \sum_j \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}$
λ, μ, E, ν, K	coefficients de l'élasticité isotrope
σ_y	limite d'élasticité
α	coefficent de dilatation thermique
T	température
T_{ref}	température de référence

Par ailleurs, dans le cadre d'une discrétisation en temps, toutes les quantités évaluées à l'instant précédent sont indicées par $^-$, les quantités évaluées à l'instant $t + \Delta t$ ne sont pas indicées et les incréments sont désignés par Δ. On a ainsi :

$$\Delta Q = Q - Q^-$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Rappels sur les grandes déformations

3.1 Cinématique

Considérons un solide soumis à des grandes déformations. Soit Ω_0 le domaine occupé par le solide avant déformation et $\Omega(t)$ le domaine occupé à l'instant t par le solide déformé.

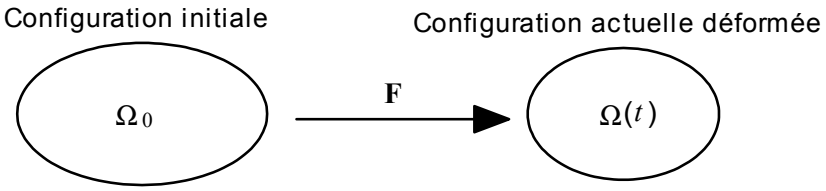


Figure 3.1-a : Représentation de la configuration initiale et déformée

Dans la configuration initiale Ω_0, la position de toute particule du solide est désignée par $\mathbf{X}$ (description lagrangienne). Après déformation, la position à l'instant t de la particule qui occupait la position $\mathbf{X}$ avant déformation est donnée par la variable $\mathbf{x}$ (description eulérienne).

Le mouvement global du solide est défini, avec $\mathbf{u}$ le déplacement, par :

$$\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X},t)=\mathbf{X}+\mathbf{u}$$

Pour définir le changement de métrique au voisinage d'un point, on introduit le tenseur gradient de la transformation $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F}=\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}}=\mathbf{Id}+\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}$$

Les transformations de l'élément de volume et de la masse volumique valent :

$$d\Omega=Jd\Omega_o \text{ avec } J=\det F=\frac{\rho_o}{\rho}$$

où ρ_o et ρ sont respectivement la masse volumique dans les configurations initiale et actuelle.

Différents tenseurs de déformations peuvent être obtenus en éliminant la rotation dans la transformation locale. Par exemple, en calculant directement les variations de longueur et d'angle (variation du produit scalaire), on obtient :

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{Id}) \text{ avec } \mathbf{C}=\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\mathbf{F}$$

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2}(\mathbf{Id}-\mathbf{b}^{-1}) \text{ avec } \mathbf{b}=\mathbf{F}\mathbf{F}^{T}$$

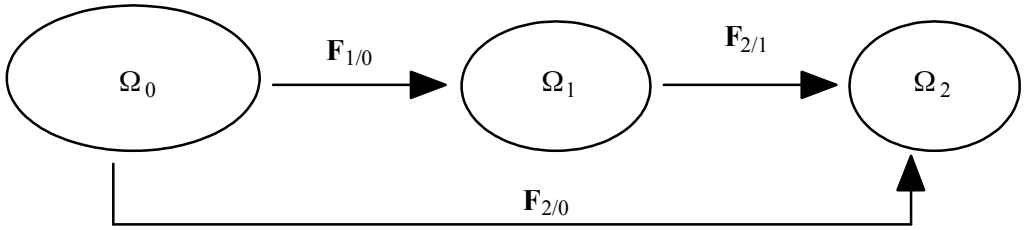
$\mathbf{E}$ et $\mathbf{A}$ sont respectivement les tenseurs de déformation de Green-Lagrange et d'Euler-Almansi et $\mathbf{C}$ et $\mathbf{b}$, les tenseurs de Cauchy-Green droit et gauche respectivement.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En description lagrangienne, on décrira la déformation par les tenseurs $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{E}$ car ce sont des quantités définies sur Ω_0 , et en description eulérienne par les tenseurs $\mathbf{b}$ ou $\mathbf{A}$ (définis sur Ω).

Remarque :

Soit un solide subissant deux transformations successives, par exemple la première transformation fait passer le solide de la configuration initiale Ω_0 à une configuration Ω_1 (tenseur gradient $\mathbf{F_{1/0}}$ et vecteur déplacement $\mathbf{u_{1/0}}$), puis la seconde transformation de la configuration Ω_1 à Ω_2 (tenseur gradient $\mathbf{F_{2/1}}$ et vecteur déplacement $\mathbf{u_{2/1}}$).



Le passage de la configuration Ω_0 à Ω_2 est donné par le tenseur gradient $\mathbf{F_{2/0}}$ (déplacement $\mathbf{u_{2/0}}=\mathbf{u_{2/1}}+\mathbf{u_{1/0}}$) tel que :

$$\mathbf{F_{2/0}}=\mathbf{F_{2/1}}\mathbf{F_{1/0}}$$

On obtient alors, par exemple, pour le tenseur de déformation de Green-Lagrange $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E_{2/0}}=\mathbf{F_{1/0}^T}\mathbf{E_{2/1}}\mathbf{F_{1/0}}+\mathbf{E_{1/0}}$$

où $\mathbf{E_{2/0}}$, $\mathbf{E_{1/0}}$ et $\mathbf{E_{2/1}}$ sont les déformations de Green-lagrange des configurations Ω_2 par rapport à Ω_0 associées à $F_{2/0}$, Ω_1 par rapport à Ω_0 associées à $F_{1/0}$ et Ω_2 par rapport à Ω_1 associées à $\mathbf{F_{2/1}}$, respectivement.
Ceci constitue une des difficultés rencontrées lors de l'écriture d'une loi de comportement en grandes déformations car on ne peut plus écrire une formule analogue à celle écrite en petites déformations, à savoir $\boldsymbol{\varepsilon}_{2/0}=\boldsymbol{\varepsilon}_{2/1}+\boldsymbol{\varepsilon}_{1/0}$ où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le tenseur de déformation totale linéarisé.
Pour retrouver $\boldsymbol{\varepsilon}_{2/0}=\boldsymbol{\varepsilon}_{2/1}+\boldsymbol{\varepsilon}_{1/0}$ en petites déformations à partir de l'expression de $\mathbf{E_{2/0}}$, il faut négliger tous les termes d'ordre 2 de $\nabla \mathbf{u_{2/0}}$, $\nabla \mathbf{u_{1/0}}$ et $\nabla \mathbf{u_{2/1}}$. Dans ce cas, on a $\mathbf{E_{2/0}}\simeq\boldsymbol{\varepsilon}_{2/0}$, $\mathbf{E}_{1/0}\simeq\boldsymbol{\varepsilon}_{1/0}$ et $\mathbf{F_{1/0}^T}\mathbf{E_{2/1}}\mathbf{F_{1/0}}\simeq\boldsymbol{\varepsilon}_{2/1}$.

3.2 Contraintes

Pour le modèle décrit ici, le tenseur des contraintes utilisé est le tenseur eulérien de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$ défini par :

$$J\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\tau}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur eulérien de Cauchy. Le tenseur $\boldsymbol{\tau}$ résulte donc d'une « mise à l'échelle » par la variation de volume du tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$; ceci n'est pas le cas d'autres tenseurs de contraintes utilisés (premier et second tenseur de Piola-Kirchhoff).

En description eulérienne, les équations d'équilibre sont données par :

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}_x\,\boldsymbol{\sigma}+\rho\,\mathbf{f}=0 \text{ sur } \Omega\\ &\boldsymbol{\sigma}\,.\,\mathbf{n}=\mathbf{t^d} \qquad \text{sur } \partial\Omega^f\end{aligned}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

où f est la force volumique appliquée sur le domaine Ω, $\mathbf{n}$ la normale extérieure à la frontière $\partial\Omega^f$ et $\partial\Omega^f$ la partie de la frontière du domaine Ω où sont appliquées les forces surfaciques $\mathbf{t^d}$.

3.3 Objectivité

Lorsqu'on écrit une loi de comportement en grandes déformations, on doit vérifier que cette loi est objective, c'est-à-dire invariante par tout changement de référentiel spatial de la forme :

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\,\mathbf{x}$$

où $\mathbf{Q}$ est un tenseur orthogonal qui traduit la rotation du référentiel et $\mathbf{c}$ un vecteur qui traduit la translation.
Plus concrètement, si on réalise un essai de traction dans la direction $\mathbf{e_1}$, par exemple, suivi d'une rotation de 90° autour de $\mathbf{e_3}$, ce qui revient à effectuer un essai de traction selon $\mathbf{e_2}$, alors le danger avec une loi de comportement non objective est de ne pas retrouver un tenseur des contraintes uniaxial dans la direction $\mathbf{e_2}$ (ce qui est notamment le cas avec la cinématique PETIT_REAC).

4 Présentation du modèle de comportement

4.1 Aspect cinématique

Ce modèle suppose, tout comme en petites déformations, l'existence d'une configuration relâchée Ω^r, c'est-à-dire localement libre de contrainte, qui permet alors de décomposer la déformation totale en des parties élastique et plastique, cette décomposition étant multiplicative.
Par la suite, on notera par $\mathbf{F}$ le tenseur gradient qui fait passer de la configuration initiale Ω_0 à la configuration actuelle $\Omega(t)$, par $\mathbf{F^p}$ le tenseur gradient qui fait passer de la configuration Ω_0 à la configuration relâchée Ω^r, et $\mathbf{F^e}$ de la configuration Ω^r à $\Omega(t)$. L'indice p se réfère à la partie plastique, l'indice e à la partie élastique.

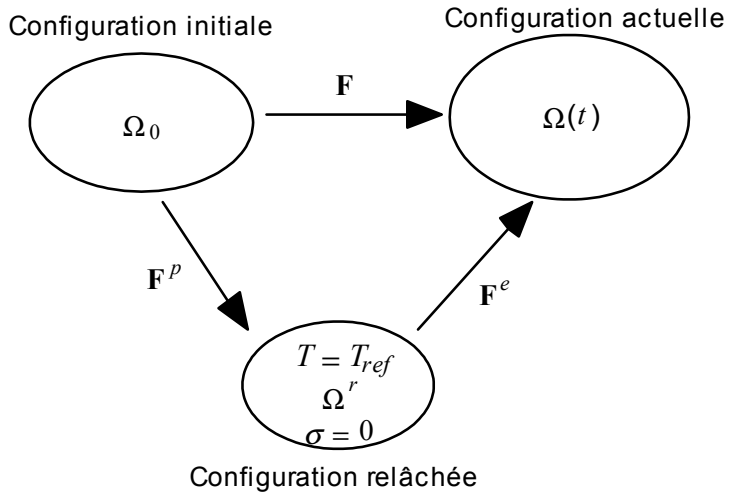


Figure 4.1-a : Décomposition du tenseur gradient $\mathbf{F}$ en une partie élastique $\mathbf{F^e}$ et plastique $\mathbf{F^p}$

Par composition des mouvements, on obtient la décomposition multiplicative suivante :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F^e}\,\mathbf{F^p}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les déformations élastiques sont mesurées dans la configuration actuelle avec le tenseur eulérien de Cauchy-Green gauche $\mathbf{b}^{\mathbf{e}}$ et les déformations plastiques dans la configuration initiale par le tenseur $\mathbf{G}^{\mathbf{p}}$ (description lagrangienne). Ces deux tenseurs sont définis par :

$$\mathbf{b}^{\mathbf{e}}=\mathbf{F}^{\mathbf{e}}\mathbf{F}^{eT}\ ,\ \mathbf{G}^{\mathbf{p}}=(\mathbf{F}^{pT}\mathbf{F}^{\mathbf{p}})^{-1}\quad \text{d'où}\ \ \mathbf{b}^{\mathbf{e}}=\mathbf{F}\mathbf{G}^{p}\mathbf{F}^{\mathbf{T}}$$

Le modèle présenté est écrit de facon à distinguer les termes isochores des termes de changement de volume. On introduit pour cela les deux tenseurs suivants :

$$\bar{\mathbf{F}}=J^{-1/3}\mathbf{F}\ \text{ et }\ \bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}=J^{-2/3}\mathbf{b}^{\mathbf{e}}\ \text{ avec }\ J=\det\mathbf{F}$$

Par définition, on a : $\det\bar{\mathbf{F}}=1$ et $\det\ \bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}=1$.

4.2 Relations de comportement

La loi présentée est un modèle thermoélasto(visco)plastique avec écrouissage isotrope qui tend sous l'hypothèse des petites déformations vers le modèle [R5.03.02] avec critère de Von Mises (il s'agit du modèle plastique). Les déformations plastiques se font à volume constant si bien que :

$$J^{p}=\det F^{p}=1\quad \text{d'où}\ \ J=J^{e}=\det\mathbf{F}^{\mathbf{e}}$$

Les relations de comportement sont données par :

- la définition de l'énergie libre hyperélastique:
  $\psi=\psi_{ther}(T,J)+\psi_{elas}(J,\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}})+K(\alpha)$,
  avec en particulier $\psi_{elas}(J,\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}})=\frac{1}{2}\frac{E}{3(1-2\nu)}\left[\frac{1}{2}(J^{2}-1)-\ln J\right]+\frac{\mu}{2}(tr\,\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}-3)$
  et $\psi_{ther}(T,J)=-3\alpha\Delta T\left(J-\frac{1}{J}\right)$
- relation contrainte - déformation thermoélastique :

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}=\mu\,\bar{\tilde{\mathbf{b}}}^{e}$$
$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\tau}=\frac{3\mathrm{K}}{2}(J^{2}-1)-\frac{9\mathrm{K}}{2}\alpha(T-T_{ref})(J+\frac{1}{J})$$

- seuil de plasticité (on admet qu'il s'exprime avec les contraintes de Kirchhoff) :

$$f=\tau_{eq}-R(p)-\sigma_{y}$$

où R est la variable d'écrouissage isotrope, fonction de la déformation plastique cumulée p.

- lois d'écoulement :

$$\bar{\mathbf{F}}\dot{\mathbf{G}}^{p}\bar{\mathbf{F}}^{T}=-\dot{\lambda}\frac{3}{\tau_{eq}}\tilde{\boldsymbol{\tau}}\,\bar{\mathbf{b}}^{e}=-3\dot{\lambda}\left(\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\ \bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}+\frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}{\mu}\right)\frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}{\tau_{eq}}$$
$$\dot{p}=\dot{\lambda}$$

Pour le modèle de plasticité, le multiplicateur plastique est obtenu en écrivant la condition de cohérence $\dot{f}=0$ et on a :

$$\dot{p}\geq 0,\ f\leq 0\ \text{ et }\ \dot{p}\,f=0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans le cas visqueux, on prend $\dot{p}$ égale à :

$$\dot{p}=\dot{\varepsilon}_0\left[\mathrm{sh}\left(\frac{\langle f\rangle}{\sigma_0}\right)\right]^m$$

où $\dot{\varepsilon}_0$, σ_0 et m sont les coefficients de viscosité. Signalons que cette loi se réduit à une loi de type Norton lorsque les 2 paramètres matériaux $\dot{\varepsilon}_0$ et σ_0 sont très grands.

On rappelle que :

$$\bar{\mathbf{b}}^e=J^{-2/3}\mathbf{b}^{\mathbf{e}}$$

$$\bar{\mathbf{F}}=J^{-1/3}\mathbf{F}$$

et que la partition des déformations s'écrit :

$$\bar{\mathbf{b}}^e=\bar{\mathbf{F}}\,\mathbf{G}^{\mathbf{p}}\,\bar{\mathbf{F}}^T$$

Pour des matériaux métalliques où le rapport τ_{eq}/μ est petit devant 1, l'expression de la loi d'écoulement peut être approchée par :

$$\bar{\mathbf{F}}\dot{\mathbf{G}}^p\bar{\mathbf{F}}^T=-\dot{\lambda}\,\mathrm{tr}\;\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}\frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}{\tau_{eq}}+O\left(\frac{\tau_{eq}}{\mu}\right) \qquad \text{éq.4.2-1}$$

où $O\left(\frac{\tau_{eq}}{\mu}\right)$ est négligeable devant le premier terme.

C'est cette dernière expression qui est implantée dans le *Code_Aster*.

Remarque :

Si les déformations sont petites, on a :

$$J\simeq 1+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\mathbf{b}^{\mathbf{e}}\simeq\mathbf{Id}+2\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}}$$
$$\mathbf{G}^{\mathbf{p}}\simeq\mathbf{Id}-2\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ *est la déformation totale,* $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}}$ *la déformation élastique et* $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$ *la déformation plastique en petites déformations.*

En remplaçant ces trois expressions dans les équations de la loi de comportement présentée ici, on retrouve bien le modèle classique thermo-élasto-plastique avec écrouissage isotrope et critère de Von Mises.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Correction de l'énergie élastique en présence de thermique

L'expression de l'énergie hyperélastique ψ_{elas} pose quelques difficultés. En effet, elle dépend de J ; en présence de déformation thermique, J inclus une composante thermique qui perturbe l'expression et qu'il convient de corriger.

La démarche de la correction de l'énergie de Simo-Miehe en présence de thermique est la suivante :

1. annulation de l'énergie en thermique pure lorsque la contrainte est nulle ;
2. résolution de l'équation en J obtenue, dont on appelle J_0 la solution.
3. calcul final de l'énergie élastique de Simo-Miehe en présence de thermique :

$$\psi_{elas}^{corrigee}=\psi_{elas}\left(J,\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}\right)+\psi_{ther}\left(T,J\right)+\psi_{elas}\left(J,\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}\right)-\psi_{elas}\left(J_{0,}\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}=\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{d}}\right)-\psi_{ther}\left(T,J_0\right)$$

L'annulation de la contrainte en thermique pure conduit à l'équation :

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\tau}=0\Leftrightarrow\left(J^2-1\right)-3\alpha(T-T_{ref})(J+\frac{1}{J})=0\Leftarrow\{\begin{matrix}J^3-J-3\alpha\Delta T\left(J^2-1\right)\\J\neq0\end{matrix}$$

Cette équation, sous l'hypothèse $3\alpha\Delta T\ll1$, a des solutions proches de -1, 0 et 1. Seule la plus grande est physiquement acceptable. On pose donc :

$$J_0=MAX\{J\,tq\,J^3-J-3\alpha\Delta T\left(J^2-1\right)=0\}$$

L'énergie corrigée en présence de thermique s'écrit finalement :

$$\psi_{elas}^{corrigee}=\psi_{elas}\left(J,\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}\right)+\psi_{ther}\left(T,J\right)+\psi_{elas}\left(J,\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}\right)-\psi_{elas}\left(J_{0,}\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}=\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{d}}\right)-\psi_{ther}\left(T,J_0\right)$$

4.4 Choix de la fonction d'écrouissage

Cette relation de comportement est disponible dans l'opérateur STAT_NON_LINE, sous le mot-clé facteur COMPORTEMENT et l'argument 'SIMO_MIEHE' du mot-clé facteur DEFORMATION. On peut choisir pour la fonction d'écrouissage, un écrouissage linéaire ou bien fournir une courbe de traction. Cinq relations peuvent être utilisées.

```
RELATION =    /   'VMIS_ISOT_TRAC'
              /   'VMIS_ISOT_PUIS'
              /   'VMIS_ISOT_LINE'
              /   'VISC_ISOT_TRAC'
              /   'VISC_ISOT_LINE'
```

Pour un comportement purement thermoélastique, l'utilisateur choisit l'argument 'VMIS_ISOT_LINE' par exemple, avec SY très grand (le comportement est alors hyperélastique) ; pour un écrouissage isotrope donné par une courbe de traction, l'utilisateur choisit l'argument 'VMIS_ISOT_TRAC' dans le cas plastique ou 'VISC_ISOT_TRAC' dans le cas visqueux et pour un écrouissage isotrope linéaire, l'argument 'VMIS_ISOT_LINE' dans le cas plastique ou 'VISC_ISOT_LINE' dans le cas visqueux.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour un comportement élastoplastique dont la courbe d'écrouissage (courbe de traction rationnelle) est donnée par une loi en puissance, de la forme

$R(p)=\sigma_y+\sigma_y\left(\frac{E}{a\sigma_y}p\right)^{\frac{1}{n}}$, l'utilisateur choisit l'argument 'VMIS_ISOT_PUIS'.

Les différentes caractéristiques du matériau sont renseignées dans l'opérateur DEFI_MATERIAU ([U4.23.01]) sous les mots-clés :

- ELAS quelque soit la loi (on donne le module d'Young, le coefficient de Poisson et éventuellement le coefficient de dilatation thermique),
- TRACTION pour 'VMIS_ISOT_TRAC' et 'VISC_ISOT_TRAC' (on donne la courbe de traction rationnelle),
- ECRO_PUIS pour 'VMIS_ISOT_PUIS' (on donne les paramètres de la loi puissance),
- ECRO_LINE pour 'VMIS_ISOT_LINE' et 'VISC_ISOT_LINE' (on donne la limite d'élasticité et la pente d'écrouissage),
- VISC_SINH pour 'VISC_ISOT_TRAC' et 'VISC_ISOT_LINE' (on donne les trois coefficients de viscosité).

Remarque :

L'utilisateur doit bien s'assurer que la courbe de traction « expérimentale » utilisée, soit directement, soit pour en déduire la pente d'écrouissage est bien donnée dans le plan contrainte rationnelle $\sigma=F/S$ *- déformation logarithmique* $\ln(1+\Delta l/l_0)$ où l_0 *est la longueur initiale de la partie utile de l'éprouvette,* Δl *la variation de longueur après déformation,* F *la force appliquée et* S *la surface actuelle. On remarquera que* $\sigma=F/S=\frac{F}{S_0}\frac{l_0}{l}\frac{1}{J}$ *d'où* $\tau=J\sigma=\frac{F}{S_0}\frac{l_0}{l}$ *. En général, c'est bien la quantité* $\frac{F}{S_0}\frac{l_0}{l}$ *qui est mesurée par les expérimentateurs et ceci donne directement la contrainte de Kirchhoff utilisée dans le modèle de Simo et Miehe.*

4.5 Contraintes et variables internes

Les contraintes sont les contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, calculées donc sur la configuration actuelle (six composantes en 3D, quatre en 2D).
Les variables internes produites dans le *Code_Aster* sont :

- $V1$, la déformation plastique cumulée p ,
- $V2$ l'indicateur de plasticité (0 si le dernier incrément calculé est élastique, 1 sinon).
- $V3$ à $V8$: l'opposé de la déformation élastique $\bar{\mathbf{b}}^e$

Remarque :

Si l'utilisateur veut récupérer éventuellement des déformations en post-traitement de son calcul, il faut tracer les déformations de Green-Lagrange $\mathbf{E}$ *, qui représente une mesure des déformations en grandes déformations (options* EPSG_ELGA *ou* EPSG_ELNO *). Les déformations linéarisées* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *classiques mesurent des déformations sous l'hypothèse des petites déformations et n'ont pas de sens en grandes déformations.*

4.6 Domaine d'utilisation

Le choix d'une cinématique DEFORMATION : 'PETIT_REAC' permet également de traiter une loi de comportement thermo-élastoplastique avec écrouissage isotrope et critère de Von Mises en grandes déformations. La loi est écrite en petites déformations et la prise en compte des grandes déformations se fait en réactualisant la géométrie.
Entre la loi présentée ici (SIMO_MIEHE) et PETIT_REAC,

- il n'y a pas de différence si les déformations sont petites

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- il n'y a pas de différence si les déformations sont grandes mais les rotations petites
- il y a des différences si les rotations sont importantes.

En particulier, la solution obtenue avec la cinématique PETIT_REAC peut s'écarter notablement de la solution exacte en présence de grandes rotations et ce quelle que soit la taille des pas de temps choisie par l'utilisateur, contrairement à la cinématique SIMO_MIEHE.

4.7 Intégration de la loi de comportement

Dans le cas d'un comportement incrémental, mot-clé facteur COMPORTEMENT, connaissant la contrainte $\boldsymbol{\sigma}^-$, la déformation plastique cumulée p^-, la trace divisée par trois du tenseur de déformations élastiques $\frac{1}{3}\mathrm{tr}\ \bar{\mathbf{b}}^{e-}$, les déplacements $\mathbf{u}^-$ et $\Delta\mathbf{u}$ et les températures T^- et T, on cherche à déterminer $(\boldsymbol{\sigma}, p, \frac{1}{3}\mathrm{tr}\ \bar{\mathbf{b}}^{e})$.

Les déplacements étant connus, les gradients de la transformation de Ω_0 à Ω^-, noté $\mathbf{F}^-$, et de Ω^- à Ω, noté $\Delta\mathbf{F}$, sont connus.

La discrétisation *implicite* de la loi donne :

$$\mathbf{F}=\Delta\mathbf{F}\,\mathbf{F}^-$$
$$J=\det\mathbf{F}$$
$$\bar{\mathbf{F}}=J^{-1/3}\mathbf{F}$$
$$\bar{\mathbf{b}}^{e}=\bar{\mathbf{F}}\,\mathbf{G}^{\mathbf{p}}\,\bar{\mathbf{F}}^{T}$$
$$J\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\tau}$$
$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}=\mu\,\tilde{\bar{\mathbf{b}}}^{e}$$
$$\frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\tau}=\frac{1}{2}K(J^2-1)-\frac{3}{2}K\alpha(T-T_{ref})(J+\frac{1}{J})$$
$$f=\tau_{eq}-R(p^-+\Delta p)-\sigma_y$$
$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{G}^{\mathbf{p}}-\mathbf{G}^{\mathbf{p}-})\bar{\mathbf{F}}^{T}=-\mathrm{tr}\ \bar{\mathbf{b}}^{e}\frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}{\tau_{eq}}\Delta p \quad \text{d'où} \quad \bar{\mathbf{b}}^{e}=\bar{\mathbf{F}}\,\mathbf{G}^{\mathbf{p}-}\,\bar{\mathbf{F}}^{T}-\mathrm{tr}\,\bar{\mathbf{b}}^{e}\frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}{\tau_{eq}}\Delta p$$

Dans le cas plastique : $\Delta p\geq 0, f\leq 0$ et $f\Delta p=0$

Dans le cas visqueux : $\langle\tau_{eq}-R(p^-+\Delta p)-\sigma_y\rangle-\sigma_0\,\mathrm{sh}^{-1}\left[\left(\frac{\Delta p}{\dot{\varepsilon}_0\Delta t}\right)^{\frac{1}{m}}\right]=0$

Remarque :

Cette formulation est incrémentalement objective car la seule quantité tensorielle incrémentale qui intervient dans la discrétisation est $\dot{\mathbf{G}}^{p}$. Comme $\mathbf{G}^{\mathbf{p}}$ et $\mathbf{G}^{\mathbf{p}-}$ sont mesurées sur la même configuration, c'est-à-dire la configuration initiale, la discrétisation de $\dot{\mathbf{G}}^{p}$, soit $\Delta\mathbf{G}^{\mathbf{p}}=\mathbf{G}^{\mathbf{p}}-\mathbf{G}^{\mathbf{p}-}$, est incrémentalement objective.

On introduit $\boldsymbol{\tau}^{Tr}$, le tenseur de Kirchhoff qui résulte d'une prédiction élastique (Tr : trial, en anglais essai) :

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{Tr}=\mu\,\tilde{\bar{\mathbf{b}}}^{eTr}$$

où

$$\bar{\mathbf{b}}^{eTr}=\bar{\mathbf{F}}\,\mathbf{G}^{\mathbf{p}-}\,\bar{\mathbf{F}}^{T}=\Delta\bar{\mathbf{F}}\,\bar{\mathbf{b}}^{e-}\,\Delta\bar{\mathbf{F}}^{T},\ \Delta\bar{\mathbf{F}}=(\Delta J)^{-1/3}\Delta\mathbf{F}\ \text{ et }\ \Delta J=\det(\Delta\mathbf{F})$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On obtient $\bar{\mathbf{b}}^{e-}$ à partir des contraintes $\boldsymbol{\tau}^{-}$ par la relation contrainte - déformation thermoélastique et de la trace du tenseur des déformations élastiques.

$$\bar{\mathbf{b}}^{e-}=\frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{-}}{\mu^{-}}+\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\;\bar{\mathbf{b}}^{e-}$$

Remarque :

L'intérêt de cette formulation est qu'il n'est pas nécessaire de calculer la déformation plastique $\mathbf{G}^{p-}$ *qui nous obligerait à inverser le gradient de la transformation* $\bar{\mathbf{F}}$ *. On a besoin uniquement de connaître* $\bar{\mathbf{F}}\mathbf{G}^{p-}\bar{\mathbf{F}}^{T}$ *.*

Si $\boldsymbol{\tau}_{eq}^{Tr}<R(p^{-})+\sigma_y$, on reste élastique. Dans ce cas, on a :

$$p=p^{-}\ ,\ \boldsymbol{\tau}=\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{Tr}+\frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\tau}^{Tr}\mathbf{Id}\ \text{ et }\ \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\;\bar{\mathbf{b}}^{e}=\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\;\bar{\mathbf{b}}^{eTr}$$

sinon, on obtient :

$\mathrm{tr}\;\bar{\mathbf{b}}^{e}=\mathrm{tr}\,\bar{\mathbf{b}}^{eTr}$, grâce à la simplification sur la loi d'écoulement : $\bar{\mathbf{b}}^{e}=\bar{\mathbf{b}}^{e^{Tr}}-\mathrm{tr}\,\bar{\mathbf{b}}^{e}\frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}{\tau_{eq}}\Delta p$

En prenant les parties déviatoriques de cette équation, et en les multipliant par μ on aboutit à :

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{Tr}=\tilde{\boldsymbol{\tau}}\,(1+\frac{\mu\,\mathrm{tr}\;\bar{\mathbf{b}}^{eTr}\Delta p}{\tau_{eq}})$$

En calculant la contrainte équivalente, on se ramène à une équation scalaire non linéaire en Δp :

$$\tau_{eq}^{Tr}-\tau_{eq}-\mu\,\mathrm{tr}\,\bar{\mathbf{b}}^{eTr}\Delta p=0$$

Dans le cas plastique : $\tau_{eq}=\sigma_y+R(p^{-}+\Delta p)$, ce qui conduit à Δp solution de l'équation :

$$\tau_{eq}^{Tr}-\sigma_y-R(p^{-}+\Delta p)-\mu\,\mathrm{tr}\,\bar{\mathbf{b}}^{eTr}\Delta p=0$$

Dans le cas viscoplastique : $\tau_{eq}=\sigma_y+R(p^{-}+\Delta p)+\sigma_0\,\mathrm{sh}^{-1}\left[\left(\frac{\Delta p}{\dot{\varepsilon}_0\Delta t}\right)^{\frac{1}{m}}\right]$, ce qui conduit à Δp solution de l'équation :

$$\tau_{eq}^{Tr}-\sigma_y-R(p^{-}+\Delta p)-\sigma_0\,\mathrm{sh}^{-1}\left[\left(\frac{\Delta p}{\dot{\varepsilon}_0\Delta t}\right)^{\frac{1}{m}}\right]-\mu\,\mathrm{tr}\,\bar{\mathbf{b}}^{eTr}\Delta p=0$$

Dans le cas où l'écrouissage est linéaire, ou bien donné par une courbe de traction définie point par point, donc affine par morceaux, l'équation à résoudre est linéaire. On obtient directement la solution . Δp Dans les autres cas, la résolution est effectuée dans *Code_Aster* par une méthode des sécantes avec intervalle de recherche (cf. [R5.03.05]). L'intégration peut être contrôlée par les paramètres `RESI_INTE_RELA` et `ITER_INTE_MAXI`.

Une fois Δp connu, on peut alors en déduire le tenseur de Kirchhoff, soit :

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\tau_{eq}}{\tau_{eq}^{Tr}}\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{Tr}+\left[\frac{K}{2}(J^2-1)-\frac{3K}{2}(T-T_{ref})(J+\frac{1}{J})\right]\mathbf{Id}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Une fois calculée la déformation plastique cumulée, le tenseur des contraintes et la matrice tangente, on effectue une correction sur la trace du tenseur des déformations élastiques $\bar{\mathbf{b}}^e$ pour tenir compte de l'incompressibilité plastique, qui n'est pas conservée avec la simplification faite sur la loi d'écoulement [éq 4.2.1]. Cette correction s'effectue en utilisant une relation entre les invariants de $\bar{\mathbf{b}}^e$ et $\tilde{\bar{\mathbf{b}}}^e$ et en exploitant la condition d'incompressibilité plastique $J^p=1$ (ou de manière équivalente $\det \bar{\mathbf{b}}^e=1$). Cette relation s'écrit :

$$x^3-\bar{J}_2^e x-(1-\bar{J}_3^e)=0$$

avec $\bar{J}_2^e=\frac{1}{2}\bar{b}_{eq}^{e^2}=\frac{\tau_{eq}^2}{2\mu^2}$, $\bar{J}_3^e=\det\tilde{\bar{\mathbf{b}}}^e=\det\frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}{\mu}$ et $x=\frac{1}{3}\operatorname{tr}\bar{\mathbf{b}}^e$

La résolution de cette équation du troisième degré permet d'obtenir $\operatorname{tr}\bar{\mathbf{b}}^e$ et par conséquent la déformation thermoélastique $\bar{\mathbf{b}}^{e-}$ au pas de temps suivant. Dans le cas où cette équation admet plusieurs solutions, on prend la solution la plus proche de la solution du pas de temps précédent. C'est d'ailleurs pourquoi on stocke dans une variable interne $\frac{1}{3}\operatorname{tr}\bar{\mathbf{b}}^e$.

5 Formulation variationnelle

Dans la mesure où les contraintes fournies par la loi de comportement sont eulériennes, on choisit une formulation variationnelle écrite sur la configuration actuelle (eulérienne) et non sur la configuration initiale, soit :

$$\underbrace{\int_\Omega \sigma \nabla_x \delta\mathbf{v}\, d\Omega}_{\mathbf{F}_{int}.\delta\mathbf{v}}=\underbrace{\int_\Omega \rho\mathbf{f}\,\delta\mathbf{v}\,d\Omega+\int_{\partial\Omega^f}\mathbf{t}^{\mathbf{d}}\,\delta\mathbf{v}\,dS}_{\mathbf{F}_{ext}.\delta\mathbf{v}} \qquad \delta\mathbf{v} \text{ Cinématiquement admissible}$$

Nous nous intéressons uniquement ici au travail des forces intérieures et à sa variation dans l'optique d'une résolution par la méthode de Newton. On trouvera dans [bib 4] la démonstration des expressions présentées.

5.1 Cas du milieu continu

On réécrit ici le travail des efforts intérieurs sous forme indicielle, soit :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{int}}.\delta\mathbf{v}=\int_\Omega \sigma_{ij}\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j}d\Omega$$

Nous avons besoin également d'exprimer la variation des efforts intérieurs dans la configuration actuelle Ω soit :

$$\delta\mathbf{F}_{\mathbf{int}}.\delta\mathbf{u}.\delta\mathbf{v}=\int_\Omega\left[\sigma_{ij}\frac{\partial\delta u_p}{\partial x_p}-\sigma_{ik}\frac{\partial\delta u_j}{\partial x_k}\right]\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j}d\Omega \quad \text{rigidité géométrique}$$
$$+\int_\Omega\left[\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\Delta F_{pq}}\frac{\partial\delta u_p}{\partial x_q^-}\right]\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j}d\Omega \quad \text{rigidité de comportement}$$

¿

où $\mathbf{x}^-$ sont les coordonnées d'un point sur la configuration Ω^- .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.2 Discrétisation par éléments finis

On discrétise les déplacements $\mathbf{u}$ et les déplacements virtuels $\mathbf{v}$ par éléments finis. Les notations sont les suivantes, en adoptant la convention de sommation des indices répétés :

$$u_i(x)=N^n(x)\,U_i^n \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_j}=D_j^n(x)\,U_i^n \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_j^-}=D_j^{-n}(x)\,U_i^n$$

où :

$N^n(x)$ est la fonction de forme associée au nœud n
U_i^n , la composante i du déplacement nodal du nœud n
$D_j^n(x)$, les composantes du gradient des fonctions de forme sur la configuration Ω
$D_j^{-n}(x)$, les composantes du gradient des fonctions de forme sur la configuration Ω^-

On obtient pour le vecteur des forces intérieures :

$$(F_{\text{int}})_i^n=\int_\Omega \sigma_{ij}\,D_j^n\,d\Omega$$

et pour la matrice tangente, qui n'est pas a priori symétrique :

$$K_i^{nm}{}_p=\int_\Omega \left[D_p^m\sigma_{ij}D_j^n-D_k^m\sigma_{ik}D_p^n\right]d\Omega + \int_\Omega \left[D_q^{-n}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\Delta F_{pq}}D_j^n\right]d\Omega$$

Dans le cas d'une modélisation bidimensionnelle (déformation plane), les expressions du vecteur des forces intérieures et de la matrice tangente sont identiques à ceci prêt que les indices correspondants aux composantes varient de 1 à 2 uniquement.

Dans le cas d'une modélisation axisymétrique, en numérotant les axes dans l'ordre (r,z,θ), le vecteur des forces intérieures s'écrit :

$$(F_{\text{int}}^{axi})_\alpha^n=\int_\Omega \left[\sigma_{\alpha\beta}D_\beta^n+\sigma_{33}\frac{N^n}{r}\delta_{\alpha 1}\right]d\Omega \quad,\ \alpha\in\{1,2\}\ ,\ \beta\in\{1,2\}$$

et la matrice tangente :

$$\left[\mathbf{K}^{axi}\right]=\left[\mathbf{K}\right]+\left[\mathbf{K}^{corr}\right]$$

avec :

$$\left[\mathbf{K}_{(1)}^{\mathbf{corr}}\right]_{1\beta}^{nm}=\int_\Omega \frac{N^n}{r}\sigma_{\beta\gamma}D_\gamma^m\,d\Omega+\int_\Omega \frac{N^n}{r^-}\frac{\partial\sigma_{\beta\gamma}}{\partial\Delta F_{33}}D_\gamma^m\,d\Omega$$

$$\left[\mathbf{K}_{(2)}^{\mathbf{corr}}\right]_{\alpha 1}^{nm}=\int_\Omega D_\alpha^n\sigma_{33}\frac{N^m}{r}d\Omega+\int_\Omega D_\gamma^{-n}\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\Delta F_{\alpha\gamma}}\frac{N^m}{r}d\Omega$$

$$\left[\mathbf{K}_{(3)}^{\mathbf{corr}}\right]_{11}^{nm}=\int_\Omega \frac{N^n}{r^-}\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\Delta F_{33}}\frac{N^m}{r}$$

D'un point de vue algorithmique, la matrice élémentaire tangente $\mathbf{K}$ n'est pas symétrique a priori. La résolution globale se fera donc par défaut avec un solveur non symétrique. Il est toutefois possible de

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

symétriser la matrice tangente globale avant résolution (mot-clé SOLVEUR), ce qui permet d'économiser du temps calcul mais peut dégrader la convergence.

5.3 Expression de la matrice tangente du comportement

On donne ici l'expression de la matrice tangente (option FULL_MECA au cours des itérations de Newton, option RIGI_MECA_TANG pour la première itération). Celle-ci est obtenue en linéarisant le système d'équations qui régit la loi de comportement. Nous donnons ici le résultat final de cette linéarisation. On trouvera dans [bib4] le détail de ce calcul.

On pose :

$$J=\det \mathbf{F}\ ,\ J^{-}=\det \mathbf{F}^{-}\ \text{ et }\ \Delta J=\det \Delta \mathbf{F}$$

- Pour l'option FULL_MECA , on a :

$$\mathbf{A}=\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \mathbf{F}}=\frac{(\Delta J)^{-1/3}}{J}\mathbf{H}-\frac{1}{3J\Delta J}(\mathbf{H}\Delta \bar{\mathbf{F}})\otimes\mathbf{B}-\frac{J^{-}}{J^{2}}\boldsymbol{\tau}\otimes\mathbf{B}$$
$$+\frac{J^{-}}{J}\left[KJ-\frac{3}{2}K\alpha(T-T_{ref})(1-J^{-2})\right]\mathbf{Id}\otimes\mathbf{B}$$

où **B** vaut :

$$B_{11}=\Delta F_{22}\Delta F_{33}-\Delta F_{23}\Delta F_{32}$$
$$B_{22}=\Delta F_{11}\Delta F_{33}-\Delta F_{13}\Delta F_{31}$$
$$B_{33}=\Delta F_{11}\Delta F_{22}-\Delta F_{12}\Delta F_{21}$$
$$B_{12}=\Delta F_{31}\Delta F_{23}-\Delta F_{33}\Delta F_{21}$$
$$B_{21}=\Delta F_{13}\Delta F_{32}-\Delta F_{33}\Delta F_{12}$$
$$B_{13}=\Delta F_{21}\Delta F_{32}-\Delta F_{22}\Delta F_{31}$$
$$B_{31}=\Delta F_{12}\Delta F_{23}-\Delta F_{22}\Delta F_{13}$$
$$B_{23}=\Delta F_{31}\Delta F_{12}-\Delta F_{11}\Delta F_{32}$$
$$B_{32}=\Delta F_{13}\Delta F_{21}-\Delta F_{11}\Delta F_{23}$$

H et $\mathbf{H}\Delta\bar{\mathbf{F}}$ sont donnés par :

Dans le cas élastique ($f<0$) :

$$H_{ijkl}=\mu\left(\delta_{ik}\bar{b}^{e-}_{lp}\Delta\bar{F}_{jp}+\Delta\bar{F}_{ip}\bar{b}^{e-}_{pl}\delta_{jk}\right)-\frac{2\mu}{3}\delta_{ij}\Delta\bar{F}_{kp}\bar{b}^{e-}_{lp}$$

et

$$\mathbf{H}\Delta\bar{\mathbf{F}}=2\mu\,\tilde{\tilde{\mathbf{b}}}^{eTr}$$

Dans le cas plastique ($f=0$) ou viscoplastique :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$H_{ijkl}=\frac{\mu}{a}(\delta_{ik}\bar{b}^{e-}_{lp}\Delta\bar{F}_{jp}+\Delta\bar{F}_{ip}\bar{b}^{e-}_{pl}\delta_{jk})$$
$$-2\mu\left[\frac{\delta_{ij}}{3a}+\frac{\bar{R}\Delta p\tilde{\tau}_{ij}}{\tau_{eq}(\bar{R}+\mu\,\mathrm{tr}\,\bar{b}^{eTr})}\right]\Delta\bar{F}_{kp}\bar{b}^{e-}_{lp}$$
$$+\frac{3\mu^2\,\mathrm{tr}\,\bar{b}^{eTr}(\bar{R}\Delta p-\tau_{eq})}{a\tau^3_{eq}(\bar{R}+mu\,\mathrm{tr}\,\bar{b}^{eTr})}\tilde{\tau}_{ij}\tilde{\tau}_{kq}\Delta\bar{F}_{qp}\bar{b}^{e-}_{lp}$$

et

$$\mathbf{H}\Delta\bar{F}=\frac{2\mu}{a}\bar{\mathbf{b}}^{eTr}-2\mu\,\mathrm{tr}\,\bar{\mathbf{b}}^{eTr}\left[\frac{\mathbf{Id}}{3a}+\frac{\bar{R}\Delta p\tilde{\boldsymbol{\tau}}}{\tau_{eq}(\bar{R}+\mu\,\mathrm{tr}\,\bar{\mathbf{b}}^{eTr})}\right]+\frac{3\mu^2\,\mathrm{tr}\,\bar{\mathbf{b}}^{eTr}(\bar{R}\Delta p-\tau_{eq})}{a\tau^3_{eq}(\bar{R}+\mu\,\mathrm{tr}\,\bar{\mathbf{b}}^{eTr})}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}:\bar{\mathbf{b}}^{eTr})\tilde{\boldsymbol{\tau}}$$

où $a=\dfrac{\tau^{Tr}_{eq}}{\tau_{eq}}$

et $\bar{R}=\mathrm{R}'(p)+\sigma_0\times\underbrace{\left(1+\left(\dfrac{\Delta p}{\dot{\varepsilon}_0\Delta t}\right)^2\right)^{\frac{-1}{2}}\times\dfrac{1}{m\left(\dot{\varepsilon}_0\Delta t\right)^{\frac{1}{m}}}\times(\Delta p)^{1/m-1}}_{\text{uniquement cas visqueux}}$,

$R'(p)$ étant la dérivée de l'écrouissage isotrope par rapport à la déformation plastique cumulée p.

- Pour l'option RIGI_MECA_TANG, il s'agit des mêmes expressions que celles données pour FULL_MECA mais avec $\Delta p=0$ et avec toutes les variables et coefficients du matériau pris à l'instant t^- (en principe, il faudrait dans le cas visqueux, prendre les expressions de FULL_MECA dans le cas élastique, toutes les variables étant prises à l'instant t^-). En particulier, on aura $\Delta\bar{\mathbf{F}}=\mathbf{Id}$.

6 Bibliographie

1) SIMO J.C., MIEHE C. : "Associative coupled thermoplasticity at finite strains : Formulation, numerical analysis and implementation", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 98, pp. 41-104, North Holland, 1992.

2) SIDOROFF F. : "Formulations élasto-plastiques en grandes déformations", Rapport Greco n29, 1981.

3) SIDOROFF F. : "Cours sur les grandes déformations", Rapport Greco n51, 1982.

4) CANO V., LORENTZ E. : "Introduction dans le *Code_Aster* d'un modèle de comportement en grandes déformations élastoplastiques avec écrouissage isotrope", Note interne EDF DER, HI-74/98/006/0, 1998

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) ou contributeur(s), organisme	Description des modifications
4.4	V.Cano, E.Lorentz EDF/R&D/AMA	Texte initial
6.3	V.Cano, E.Lorentz EDF/R&D/AMA	Fiche 6396
7.4	S.Michel-Ponnelle EDF/R&D/AMA	Fiche 8000 : ajout de la viscosité
9.4	J.M.Proix EDF/R&D/AMA	Ajout de VMIS_ISOT_PUIS.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

11.4	J.M.Proix EDF/R&D/AMA	Fiche 19650 ordre des variables internes

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)