Relations de comportement des éléments discrets

Résumé :

Ce document décrit les comportements non linéaires des éléments discrets qui sont appelés par les opérateurs de résolution de problèmes non linéaires STAT_NON_LINE ou DYNA_NON_LINE. Plus précisément, les comportements décrits dans ce document sont :

- le comportement de type Von Mises à écrouissage isotrope utilisé pour la modélisation des assemblages filetés, accessible par les mots clés DIS_GOUJ2E_PLAS et DIS_GOUJ2E_ELAS du mot-clé facteur COMPORTEMENT,
- le comportement élastique bilinéaire, accessible par le mot clé DIS_BILI_ELAS,
- le comportement de type Von Mises à écrouissage cinématique non linéaire, accessible par le mot-clé DIS_ECRO_CINE,
- le comportement rhéologique viscoélastique non linéaire, accessible par le mot-clé DIS_VISC,
- le comportement élastoplastique non linéaire, accessible par le mot-clé DIS_ECRO_TRAC,
- le comportement de type contact avec choc et frottement de Coulomb, en intégration explicite avec des raideurs de pénalisation, accessible par le mot-clé DIS_CHOC du mot-clé facteur COMPORTEMENT ,
- le comportement de type contact avec choc de solides et frottement de Coulomb, en intégration implicite, accessible par le mot-clé DIS_CONTACT ,
- les comportements CHOC_ENDO et CHOC_ENDO_PENA, qui permet de modéliser un comportement qui prend en compte un seuil pour l'effort de choc, ainsi qu'une variation de la raideur et de l'amortissement en fonction du déplacement relatif des nœuds de l'élément discret,
- le comportement de type contact unilatéral avec frottement de Coulomb, utilisé pour modéliser le comportement en translation et rotation de l'ensemble des ressorts de liaison grille-crayon des assemblages combustibles, accessible par le mot clé DIS_GRICRA.
- le comportement d'armement de ligne , accessible par le mot clé ARME ,
- le comportement de type « Dashpot », accessible par le mot-clé DASHPOT ,
- le comportement non linéaire, qui permet de modéliser une jonction en flexion entre un voile et un plancher ou un radier, accessible par le mot-clé JONC_ENDO_PLAS.

L'intégration des modèles de comportement mentionnés ci-dessus est détaillée dans ce document. D'autres comportements relatifs aux éléments discrets sont disponibles, mais non détaillés ici :

- assemblage non linéaire de cornières de pylônes (relation ASSE_CORN) [R5.03.32],
- le comportement élastoplastique non linéaire d'une fondation superficielle rectangulaire soumise à une sollicitation tridimensionnelle statique ou sismique, relation FONDA_SUPERFI [R5.03.31].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Principes généraux des relations de comportement des éléments discrets 6
1.1 Relations de comportement non linéaires (des éléments discrets) 6
1.2 Calcul des déformations (petites déformations) 8
1.3 Calcul des efforts et des forces nodales 8
1.4 Notations générales 9
2 Relation de comportement des assemblages filetés 10
2.1 Équations du modèle DIS_GOUJ2E_PLAS 10
2.2 Intégration de la relation DIS_GOUJ2E_PLAS 10
2.3 Variables internes 11
3 Comportement élastique bi-linéaire : DIS_BILI_ELAS 12
3.1 Définition 12
3.2 Variables internes 12
4 Comportement DIS_ECRO_CINE 13
4.1 Définition 13
4.2 Intégration du comportement 13
4.3 Variables internes 15
5 Comportement viscoélastique non linéaire DIS_VISC 15
5.1 Définition 15
5.2 Formulation du comportement 16
5.3 Mise en données 18
5.4 Intégration du comportement 18
5.4.1 Intégration locale 18
5.4.2 Intégration temporelle et équilibre global 18
5.5 Variables internes 19
6 Comportement non-linéaire DIS_ECRO_TRAC 21
6.1 Définition 21
6.2 Mise en données 21
6.3 Formulation du comportement 21
6.4 Intégration locale du comportement 22
6.5 Variables internes 22
7 Modélisation des chocs et du frottement : DIS_CHOC 23
7.1 Relation de contact unilatéral 23
7.2 Loi de frottement de Coulomb 24
7.3 Modélisation approchée des relations de contact par pénalisation 25
7.3.1 Modèle de force normale de contact 25
7.3.2 Modèle de force tangentielle de contact en dynamique 25
7.4 Définition des paramètres de contact 26
7.5 Variables internes 27

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Modélisation des chocs et du frottement : DIS_CONTACT 28
8.1 Relation de contact unilatéral 28
8.1.1 Définition de la distance de contact 28
8.1.2 Formulation du comportement 28
8.2 Intégration locale du comportement 29
8.3 Définition des paramètres de contact 29
8.4 Variables internes 30
9 Comportements : CHOC_ENDO et CHOC_ENDO_PENA 31
9.1 Formulation du comportement CHOC_ENDO 31
9.2 Variables internes 32
9.3 Formulation du comportement CHOC_ENDO_PENA 32
9.4 Variables internes 32
9.5 Définition des paramètres matériaux 33
10 Modélisation de la liaison grille-crayon : DIS_GRICRA 34
10.1 Présentation générale 34
10.2 Définition du repère local 35
10.3 Comportement en translation 36
10.3.1 Présentation du comportement 36
10.3.2 Paramètres introduits 37
10.4 Comportement en rotation 37
10.4.1 Présentation du comportement 37
10.4.2 Paramètres introduits 38
10.5 Remarque 41
10.6 Utilisation 41
10.6.1 Type d'éléments 41
10.6.2 Définition des caractéristiques du matériau 41
10.6.3 Variables internes 42
11 Comportement ARME 43
11.1 Définition 43
11.2 Variables internes 44
12 Comportement DASHPOT 45
12.1 Définition 45
12.2 Variables internes 45
13 Comportement FONDATION 46
13.1 Définition 46
13.2 Variables internes 46
14 Comportement JONC_ENDO_PLAS 48
14.1 Définition 48
14.2 Paramètres de la loi de comportement 49
14.3 Formulation de la loi de comportement 50

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

14.4 Intégration numérique locale de la loi de comportement 52
14.5 Variables internes 53
15 Bibliographie 54
16 Description des versions du document 55

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Principes généraux des relations de comportement des éléments discrets

1.1 Relations de comportement non linéaires (des éléments discrets)

Les relations disponibles dans *Code_Aster* pour les éléments discrets sont des relations de comportement incrémentales données sous le mot-clé facteur COMPORTEMENT par le mot-clé RELATION dans les opérateurs non linéaires STAT_NON_LINE et DYNA_NON_LINE. On distingue :

- le comportement de type Von Mises à écrouissage isotrope utilisé pour la modélisation des assemblages filetés, mis en œuvre dans MACR_GOUJ2E_CALC et accessible par les mots clés DIS_GOUJ2E_PLAS et DIS_GOUJ2E_ELAS,
- le comportement élastique bilinéaire, accessible par le mot clé DIS_BILI_ELAS,
- le comportement de type Von Mises à écrouissage cinématique non linéaire, accessible par le mot clé DIS_ECRO_CINE,
- le comportement non-linéaire, accessible par le mot-clé DIS_ECRO_TRAC,
- le comportement viscoélastique linéaire, accessible par le mot clé DIS_VISC,
- le comportement de type contact avec choc et frottement de Coulomb, accessible par le mot-clé DIS_CHOC,
- le comportement de type contact avec choc de solides et frottement de Coulomb, en intégration implicite, accessible par le mot-clé DIS_CONTACT ,
- le comportement de type contact avec choc de solides, avec dégradation de raideur, déplacement anélastique et amortissement variable, en intégration implicite, accessible par le mot-clé CHOC_ENDO ; une version avec intégration explicite est accessible par le mot-clé CHOC_ENDO_PENA ,
- le comportement de type contact unilatéral avec frottement de Coulomb, utilisé pour modéliser le comportement en translation et rotation de l'ensemble des ressorts de liaison grille – crayon des assemblages combustibles, accessible par le mot clé DIS_GRICRA ,
- le comportement d'armement de ligne, accessible par le mot clé ARME ,
- le comportement de type « Dashpot », accessible par le mot-clé DASHPOT,
- le comportement non linéaire, qui permet par exemple de modéliser une jonction en flexion entre un voile et un plancher ou un radier, accessible par le mot-clé JONC_ENDO_PLAS.

Les comportements suivants sont détaillés dans d'autres documents :

- assemblage non linéaire de cornières de pylônes (relation ASSE_CORN) [R5.03.32],
- le comportement élastoplastique non linéaire d'une fondation superficielle rectangulaire soumise à une sollicitation tridimensionnelle statique ou sismique (relation FONDA_SUPERFI) [R5.03.31].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les paramètres nécessaires à ces relations sont fournis dans l'opérateur DEFI_MATERIAU par les mots clés :

Comportement dans STAT_NON_LINE DYNA_NON_LINE	Type d'élément (modélisation) dans AFFE_MODELE	Mots clé dans DEFI_MATERIAU	AFFE_CARA_ELEM mots clé sous DISCRET
DIS_GOUJ2E_ELAS DIS_GOUJ2E_PLAS	2D_DIS_T : élément discret 2D à deux nœuds en translation	TRACTION	CARA : 'K_T_D_L'
DIS_ECRO_CINE	DIS_T, D_DIS_T, DIS_TR, 2D_DIS_TR : éléments discrets 2D ou 3D à un ou deux nœuds en translation / rotation	DIS_ECRO_CINE	CARA : 'K_T_D_L' CARA : 'K_TR_D_L' CARA : 'K_T_D_N' CARA : 'K_TR_D_N'
DIS_VISC	DIS_T, 2D_DIS_T, DIS_TR, 2D_DIS_TR : éléments discrets 2D ou 3D à un ou deux nœuds en translation / rotation	DIS_VISC	CARA : 'K_T_D_L' CARA : 'K_TR_D_L' CARA : 'K_T_D_N' CARA : 'K_TR_D_N'
DIS_BILI_ELAS	DIS_T, 2D_DIS_T, DIS_TR, 2D_DIS_TR : éléments discrets 2D ou 3D à un ou deux nœuds en translation / rotation	DIS_BILI_ELAS	CARA : 'K_T_D_L' CARA : 'K_TR_D_L' CARA : 'K_T_D_N' CARA : 'K_TR_D_N'
DIS_CHOC contact et choc avec frottement de Coulomb, traité par pénalisation	DIS_T, 2D_DIS_T : éléments discrets 2D ou 3D à deux nœuds en translation.	DIS_CONTACT	CARA : 'K_T_D_L' CARA : 'K_T_D_N' Pour le calcul de rigidité élastique et de modes propres
DIS_CONTACT contact et choc de solides avec frottement de Coulomb	DIS_T, 2D_DIS_T : éléments discrets 2D ou 3D à deux nœuds en translation.	DIS_CONTACT	CARA : 'K_T_D_L' CARA : 'K_T_D_N' Pour le calcul de rigidité élastique et de modes propres
DIS_GRICRA	DIS_TR : éléments discrets 3D à deux nœuds en translation / rotation	DIS_GRICRA	CARA : 'K_TR_L' Pour le calcul de rigidité élastique et de modes propres
DIS_ECRO_TRAC	DIS_T, DIS_TR : éléments discrets 3D à un ou deux nœuds en translation / rotation.	DIS_ECRO_TRAC	CARA : 'K_T_D_L' CARA : 'K_T_D_N' Pour le calcul de rigidité élastique et de modes propres.
ARME	DIS_TR : éléments discrets 3D à deux nœuds en translation / rotation	ARME	CARA : 'K_TR_L' Pour le calcul de rigidité élastique et de modes propres
FONDA_SUPERFI	DIS_TR : éléments discrets 3D à un nœud en translation / rotation	FONDA_SUPERFI	CARA : 'K_TR_D_N'
JONC_ENDO_PLAS	DIS_TR : éléments discrets 3D à deux nœuds en translation / rotation	JONC_ENDO_PLAS	CARA : 'K_TR_D_N'

Contrairement aux modèles de comportement 1D [bib3], ces relations lient directement les efforts et les déplacements, au lieu d'être formulées entre contraintes et déformations. Elles ne sont valables qu'en petites déformations. On décrit pour chaque relation de comportement le calcul du champ

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

d'efforts à partir d'un incrément de déplacement donné (cf. algorithme de Newton [R5.03.01]), le calcul des forces **nodales** $\mathbf{R}$ et de la matrice tangente.

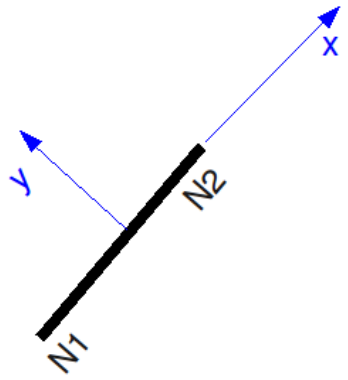
1.2 Calcul des déformations (petites déformations)

Pour chacun des éléments finis du *Code_Aster*, dans STAT_NON_LINE, l'algorithme global (Newton) fournit à la routine élémentaire, qui intègre le comportement, un accroissement du champ de déplacement [R5.03.01]
Pour les éléments discrets à 2 nœuds, on en déduit l'accroissement d'élongation (en translation) ou de rotation, entre les nœuds 1 et 2 de l'élément : $\Delta\varepsilon=\Delta u_2-\Delta u_1$.
Pour les éléments discrets à un nœud, on obtient simplement : $\Delta\varepsilon=\Delta u_1$.

1.3 Calcul des efforts et des forces nodales

Après intégration du comportement, il faut fournir à l'algorithme global (Newton) un vecteur contenant les efforts généralisés, d'une part, et d'autre part un vecteur contenant les forces nodales $\mathbf{R}$ [R5.03.01] en repère global (X,Y,Z).

Pour les éléments discrets, la résolution du problème local non linéaire fournit directement les efforts dans l'élément (uniformes dans l'élément), en repère local (x,y,z), qui sont de la forme :



$$\mathbf{F}=\begin{Bmatrix}F_1(noeud\,1)\\F_2(noeud\,2)\end{Bmatrix}$$ avec en 2D : $F_1=F_2=\begin{Bmatrix}F_x\\F_y\end{Bmatrix}$

en 3D : $F_1=F_2=\begin{Bmatrix}F_x\\F_y\\F_z\end{Bmatrix}$ en translation seule,

$F_1=F_2=\begin{pmatrix}F_x & F_y & F_z & M_x & M_y & M_z\end{pmatrix}$ en translation et rotation.

Le vecteur $\mathbf{R}$ des forces nodales équivalentes (qui est exprimé dans le repère global) est déduit de $\mathbf{F}$ par changement de repère :

$$\mathbf{R}=\mathbf{P}^T.\mathbf{R}_{loc}.\mathbf{P}\quad avec\quad \mathbf{R}_{loc}=\begin{Bmatrix}-F_1(noeud\,1)\\F_2(noeud\,2)\end{Bmatrix}$$

où $\mathbf{P}$ est la matrice de changement de repère, permettant le passage du repère global vers le repère local, comme pour les éléments de poutre [R3.08.01].

Ce vecteur $\mathbf{R}$ des forces nodales associées à la loi de comportement non linéaire est ajouté aux contributions :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- des efforts d'inertie associés aux accélérations et aux paramètres de masse fournis dans la commande AFFE_CARA_ELEM (mot-clé facteur DISCRET ou DISCRET_2D, mot-clé CARA = 'M_T_D_N', etc...) [U4.42.01],
- des efforts d'amortissement visqueux associés aux vitesses et aux paramètres d'amortissement fournis dans la commande AFFE_CARA_ELEM (mot-clé facteur DISCRET ou DISCRET_2D, mot-clé CARA = 'A_T_D_N', etc...) [U4.42.01].

Attention :

Cependant, on note que les efforts de rigidité élastique associés aux déplacements et aux paramètres de raideur fournis dans la commande AFFE_CARA_ELEM (mot-clé facteur DISCRET ou DISCRET_2D, mot-clé CARA = 'K_T_D_N', etc...) [U4.42.01] ne sont pas pris en compte dès qu'on introduit une relation de comportement non linéaire sur l'élément discret et sur le (les) degré(s) de liberté considérés.

1.4 Notations générales

Toutes les quantités évaluées à l'instant précédent sont indicées par $^-$.

Les quantités évaluées à l'instant $t+\Delta t$ ne sont pas indicées.

Les incréments sont désignés par Δ. On a ainsi :

$$Q=Q(t+\Delta t)=Q^-(t)+\Delta Q(t)=Q^-+\Delta Q$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Relation de comportement des assemblages filetés

2.1 Équations du modèle DIS_GOUJ2E_PLAS

Elles sont déduites du comportement 3D VMIS_ISOT_TRAC [R5.03.02] : on y représente une relation de comportement de type élastoplastique à écrouissage isotrope, liant les efforts dans l'élément discret à la différence de déplacement des deux nœuds dans la direction y locale.
Dans la direction x locale, le comportement est élastique, linéaire, et le coefficient reliant l'effort Fx au déplacement Dx est la raideur Kx fournie par l'intermédiaire de AFFE_CARA_ELEM.
Le comportement non linéaire ne concerne que la direction y locale.
En notant $\Delta\varepsilon=\Delta u_y^1-\Delta u_y^2$ et $\sigma=F_y^1=F_y^2$.
Les relations s'écrivent sous la même forme que les relations de Von Mises 1D [R5.03.09] :

$$\dot{e}^p=\dot{p}\frac{s}{|s|}$$
$$s=E\left(e-e^p\right)$$
$$s_{eq}-R(p)=|s|-R(p)\leq 0$$
$$s_{eq}-R(p)<0\Rightarrow\dot{p}=0$$
$$s_{eq}-R(p)=0\Rightarrow\dot{p}\geq 0$$

Dans ces expressions, p représente un "déplacement plastique cumulé", et la fonction d'écrouissage isotrope $R(p)$ est affine par morceaux, donnée sous forme d'une courbe effort – déplacement définie point par point, fournie sous le mot clé facteur TRACTION de l'opérateur DEFI_MATERIAU [U4.43.01].
Le premier point correspond à la fin du domaine linéaire, et sert donc à définir à la fois la limite de linéarité (analogue à la limite d'élasticité), et E qui est la pente de cette partie linéaire (E est indépendant de la température). La fonction $R(p)$ est déduite d'une courbe caractéristique de l'assemblage (modélisation de quelques filets) exprimant l'effort sur le goujon en fonction de la différence de déplacement moyen entre le goujon et la bride [bib1] : $F=f(u-v)$.

2.2 Intégration de la relation DIS_GOUJ2E_PLAS

Par discrétisation implicite directe des relations de comportement, de façon analogue à l'intégration 1D [R5.03.09] on obtient :

$$E\Delta\varepsilon-\Delta\sigma=E\Delta p\frac{\sigma^-+\Delta\sigma}{|\sigma^-+\Delta\sigma|}$$
$$|\sigma^-+\Delta\sigma|-R\left(p^-+\Delta p\right)\leq 0$$
$$|\sigma^-+\Delta\sigma|-R\left(p^-+\Delta p\right)<0\Rightarrow\Delta p=0$$
$$|\sigma^-+\Delta\sigma|-R\left(p^-+\Delta p\right)=0\Rightarrow\Delta p\geq 0$$

Deux cas se présentent :
- $|\sigma^-+\Delta\sigma|<R(p^-+\Delta p)$ alors $\Delta p=0$ soit $\Delta\sigma=E\Delta\varepsilon$ donc $|\sigma^-+E\Delta\varepsilon|<R(p^-)$
- $|\sigma^-+\Delta\sigma|=R(p^-+\Delta p)$ alors $\Delta p\geq 0$ donc $|\sigma^-+E\Delta\varepsilon|\geq R(p^-)$

On en déduit l'algorithme de résolution :
posons $\sigma^e=\sigma^-+E\Delta\varepsilon$
si $|\sigma^e|\leq R(p^-)$ alors $\Delta p=0$ et $\Delta\sigma=E\Delta\varepsilon$
si $|\sigma^e|>R(p^-)$ alors il faut résoudre :

$$\sigma^e=\sigma^-+\Delta\sigma+E\Delta p\frac{\sigma^-+\Delta\sigma}{|\sigma^-+\Delta\sigma|}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\sigma^e=(\sigma^-+\Delta\sigma)\left(1+\frac{E\Delta p}{|\sigma^-+\Delta\sigma|}\right)$$

donc en prenant la valeur absolue :

$$|\sigma^e|=|\sigma^-+\Delta\sigma|\left(1+\frac{E\Delta p}{|\sigma^-+\Delta\sigma|}\right)$$

soit, en utilisant $|\sigma^-+\Delta\sigma|=R(p^-+\Delta p)$

$$|\sigma^e|=R(p^-+\Delta p)+E\Delta p$$

En tenant compte de la linéarité par morceaux de $R(p)$, on peut résoudre explicitement cette équation pour trouver Δp

On en déduit : $\frac{\sigma^e}{|\sigma^e|}=\frac{\sigma}{R(p^-+\Delta p)}$

alors : $\sigma=\sigma^-+\Delta\sigma=\frac{\sigma^e}{|\sigma^e|}R(p)=\frac{\sigma^e}{1+\frac{E\Delta p}{R(p)}}$

De plus, l'option FULL_MECA permet de calculer la matrice tangente $\mathbf{K}_i^n$ à chaque itération. L'opérateur tangent qui sert à la construire est calculé directement sur le système discrétisé précédent. On obtient directement :

- Si $|\sigma^e|>R(p^-)$ alors $\frac{\delta\sigma}{\delta\epsilon}=E_t=\frac{ER'(p)}{E+R'(p)}$
- sinon $\frac{\delta\sigma}{\delta\epsilon}=E$

2.3 Variables internes

La relation de comportement DIS_GOUJ2E_PLAS produit deux variables internes :

$V1$: le « déplacement plastique cumulé » p, et

$V2$: un indicateur valant 1 si l'accroissement de déformation plastique est non nul et 0 dans le cas contraire.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Comportement élastique bi-linéaire : DIS_BILI_ELAS

3.1 Définition

Le comportement DIS_BILI_ELAS est utilisé pour modéliser un comportement élastique bilinéaire réversible en translation, dans chaque direction. La loi de comportement a été conçue pour être utilisée avec tous les éléments discrets. Le comportement est caractérisé par deux pentes (KDEB et KFIN) et par effort (FPRE) qui définit la rupture de pente.

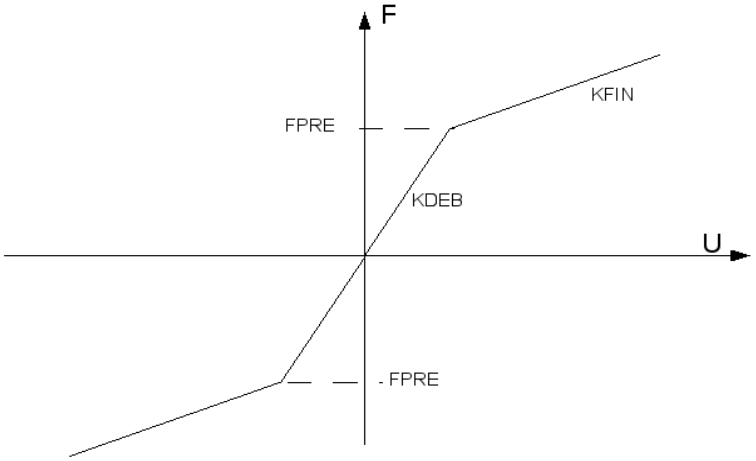


Figure 3.1-a : Comportement élastique bilinéaire

Pour cette loi et cela quel que soit le degré de liberté considéré, le comportement du discret est soit élastique soit élastique-bilinéaire. Si dans une des directions le comportement bilinéaire n'est pas défini, le comportement dans cette direction est alors élastique et ce sont les valeurs données dans la commande AFFE_CARA_ELEM qui sont prises. La loi DIS_BILI_ELAS ne concerne que les degrés de translation, cela implique donc que le comportement est élastique pour les degrés de liberté de rotation qui existent pour ce discret. Ce repère local est défini de façon classique dans la commande AFFE_CARA_ELEM sous le mot clef facteur ORIENTATION.

Les 3 caractéristiques (KDEB, KFIN, FPRE) sont obligatoirement données dans le repère local de l'élément, il est donc nécessaire dans la commande AFFE_CARA_ELEM sous le mot clef facteur DISCRET de préciser REPERE='LOCAL'. Une erreur fatale est émise par *Code_Aster* si cette condition n'est pas respectée.

Les grandeurs KDEB et KFIN sont des fonctions qui dépendent de la température et peuvent être définies sous forme de fonction, de nappe ou de formule.

Les équations incrémentales de la loi de comportement sont simplement :

$$\text{Si } |F| \leq FPRE \Rightarrow dF = \text{KDEB}.dU \text{ Sinon } dF = \text{KFIN}.dU$$

F étant l'effort à l'instant t considéré dans une des directions de translation, et dU l'incrément de déplacement de translation dans cette direction.

3.2 Variables internes

Il y a une « variable interne » par degré de liberté de translation. Elle peut prendre 3 valeurs :

- $V1=0$, le discret n'a jamais été sollicité dans cette direction.
- $V1=1$, on est dans le cas où $|F| \leq FPRE$
- $V1=2$, on est dans le cas où $|F| > FPRE$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Comportement DIS_ECRO_CINE

4.1 Définition

Le comportement DIS_ECRO_CINE est une loi de comportement élastoplastique à écrouissage cinématique non linéaire pour éléments discrets. Cette loi est définie pour chaque composante du torseur des efforts résultants. Les coefficients matériau sont fournis sous le mot-clé DIS_ECRO_CINE. Par exemple pour la direction X :

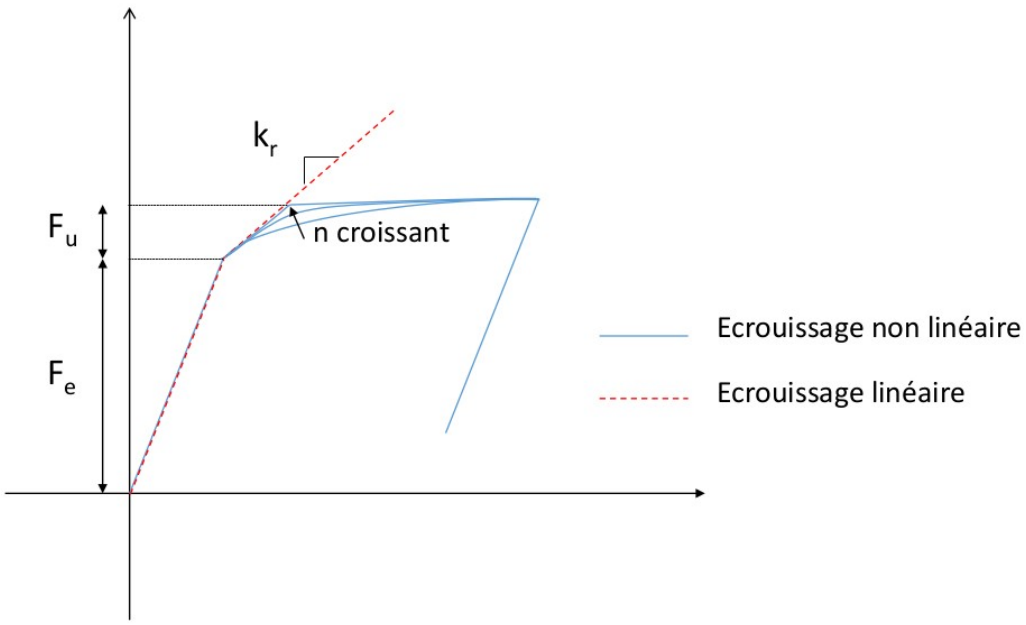
- LIMY_DX : F_e Effort limite élastique suivant l'axe local x de l'élément
- KCIN_DX : k_r Raideur suivant l'axe local x de l'élément
- PUIS_DX : n Coefficient de non-linéarité suivant l'axe local x de l'élément (supérieur à 1)
- LIMU_DX : F_u Différence entre l'effort limite et l'effort limite élastique suivant l'axe local x de l'élément.
  - Seuil : $f=|F-X|-F_e$
  - Si $f\leq 0$ le comportement est élastique $\dot{F}=K_e.\dot{U}$
  - Sinon :

$$f=0 \text{ et } \dot{f}=0$$

$$\dot{U^{an}}=\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial F} \quad -\dot{\alpha}=\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial X} \qquad \text{[éq 4.1-1]}$$

$$\dot{F}=K_e(\dot{U}-\dot{U^{an}}) \qquad \text{[éq 4.1-2]}$$

$$X=\frac{k_r.\alpha}{\left(1+\left(\frac{k_r.\alpha}{F_u}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}} \qquad \text{[éq 4.1-3]}$$



Loi DIS_ECRO_CINE : Description des paramètres

On précise que cette loi de comportement n'est pas compatible avec un chargement cyclique alterné.

4.2 Intégration du comportement

La résolution est obtenue après discrétisation en temps de la façon suivante :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\Delta F = K_e(\Delta U - \Delta U^{an})$ où $\Delta F, \Delta U$ peuvent représenter soit des efforts et des translations, soit des moments et des rotations.

En calculant : $F^- = K_e(U^- - U^-_{an})$, on effectue un essai élastique :

Si $\left|F^- + K_e(\Delta U) - X^-\right| \leq 0$ alors $\Delta F = K_e.\Delta U$

Sinon, le système à résoudre est :

$$f = 0 \Rightarrow \left|F^- + \Delta F - X^- - \Delta X\right| = F_e$$
$$\Delta U^{an} = \Delta\alpha = \Delta\lambda \frac{F^- + \Delta F - X^- - \Delta X}{F_e} \quad \text{[éq 4.2-1]}$$
$$\Delta F = K_e(\Delta U - \Delta U^{an})$$

Les 3 inconnues sont : $\Delta F ; \Delta U^{an} = \Delta\alpha ; \Delta\lambda$ car $\Delta X = \frac{k(\alpha^- + \Delta\alpha)}{\left(1 + \left(k(\alpha^- + \Delta\alpha)\right)^n\right)^{1/n}} - X^-$ est une fonction analytique de $\Delta\alpha$.

On peut simplifier ce système de la façon suivante :

$$\left|F^- + \Delta F - X^- - \Delta X\right| = F_e$$
$$\Delta U^{an} = \Delta\lambda \frac{F^- + \Delta F - X^- - \Delta X}{F_e}$$
$$\Delta F + F^- - X^- - \Delta X = K_e(\Delta U - \Delta U^{an}) + F^- - X^- - \Delta X$$

donc :

$$\left|F^- + \Delta F - X^- - \Delta X\right| = F_e$$
$$\Delta U^{an} = \Delta\lambda \frac{F^- + \Delta F - X^- - \Delta X}{F_e} \quad \text{[éq 4.2-2]}$$
$$\Delta F + F^- - X^- - \Delta X = K_e\Delta U + F^- - X^- - \Delta X - K_e\Delta\lambda \frac{F^- + \Delta F - X^- - \Delta X}{F_e}$$

La dernière équation fournit :

$(\Delta F + F^- - X^- - \Delta X)(1 + K_e\Delta\frac{\lambda}{F_e}) = K_e\Delta U + F^- - X^- - \Delta X$ où ΔX fonction de $\Delta\alpha$ donc de $\Delta\lambda$ (et du signe de $F - X$). En prenant la norme à droite et à gauche on obtient :

$$F_e + K_e\Delta\lambda = \left|K_e\Delta U + F^- - X^- - \Delta X\right|$$

Cette unique équation scalaire peut être résolue par une méthode classique de recherche de zéro de fonction (Newton, sécante , etc. voir par exemple [R5.03.04]). Dans le cas où l'écrouissage cinématique est linéaire, (seul cas justifié thermodynamiquement [bib 8] on obtient analytiquement la solution $\Delta\lambda$: $F_e + (K_e + k)\Delta\lambda = \left|K_e\Delta U + F^- - X^-\right|$

On calcule ensuite les autres inconnues par :

$$\Delta F = \frac{K_e\Delta U + F^- - X^- - \Delta X}{(1 + K_e\frac{\Delta\lambda}{F_e})} - F^- + X^- + \Delta X \text{ et } \Delta U^{an} = \Delta\lambda \frac{F^- + \Delta F - X^- - \Delta X}{F_e}$$

La programmation actuelle résout le système de façon simplifiée :

$f = |F - X| - F_e$ est discrétisé de façon explicite : $f = \left|F - X^-\right| - F_e$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

alors : $F_e+K_e\Delta\lambda=\left|K_e\Delta U+F^-X^-\right|$.

On calcule ensuite $\alpha=\alpha^-+\Delta U^{an}$, ce qui permet d'actualiser : $X=\dfrac{k_{r.}\alpha}{\left(1+\left(\dfrac{k_{r.}\alpha}{F_u}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}}$.

La raideur tangente dans cette direction est approchée par :

$$K_{tgt}=\frac{\Delta F}{\Delta U}$$ [éq 4.2-3]

4.3 Variables internes

Il y a 3 variables internes par degré de liberté :

- $V1$ contient U^{an} à chaque instant
- $V2$ contient α à chaque instant
- $V3$ contient l'énergie totale réactualisée à chaque instant.

5 Comportement viscoélastique non linéaire DIS_VISC

5.1 Définition

Le comportement DIS_VISC est un comportement rhéologique viscoélastique non linéaire, de type *Zener* étendu, permettant de schématiser le comportement d'un amortisseur uniaxial, seulement suivant le degré de liberté DX local des éléments discrets à deux nœuds (maille SEG2) ou et des éléments discrets à un nœud (maille POI1), dans le cas d'une liaison avec un bâti fixe non maillé (voir des exemples statiques et dynamiques dans le cas test SSND101). L'agencement des composants élastiques linéaires permet de prendre en compte une large gamme de situations d'environnement de la partie amortissante de l'appareil et de ses fixations.

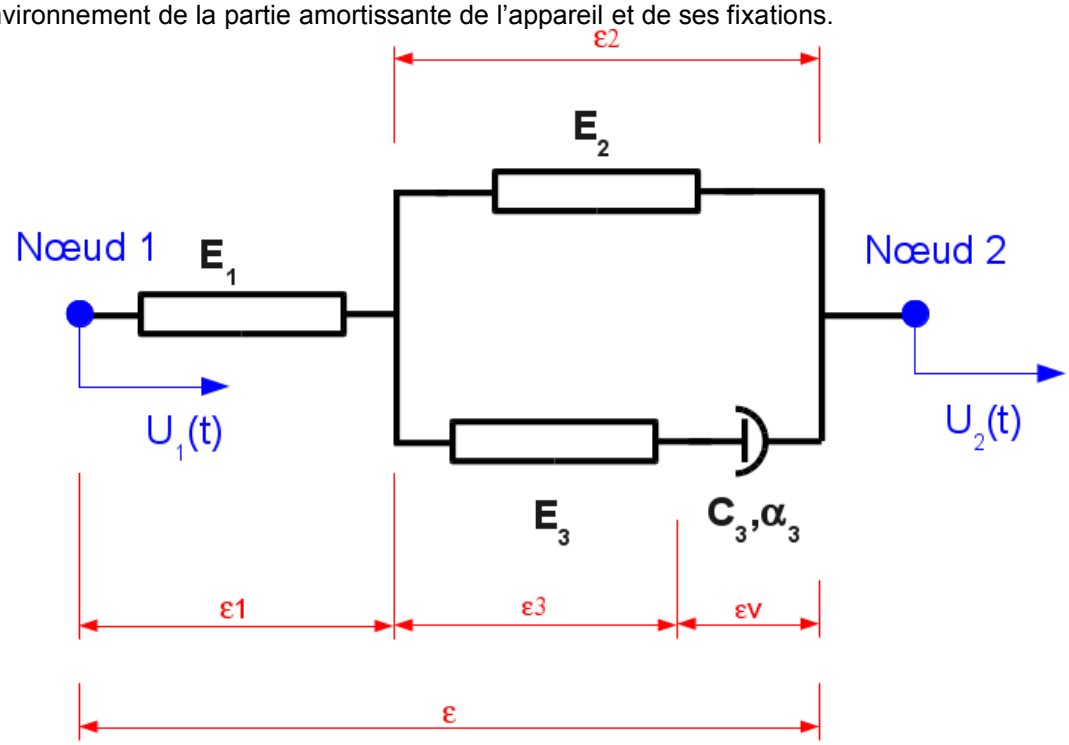


Figure 5.1-a : Modèle rhéologique viscoélastique non linéaire discret.

La loi visqueuse non linéaire s'écrit, pour $\alpha\in\left]0,\ 1\right]$:

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\sigma_3 = E_3 \varepsilon_3 = C.\, sgn\left(\dot{\varepsilon}_v\right).\left|\dot{\varepsilon}_v\right|^{\alpha} \qquad \text{[éq 5.1-1]}$$

La constante d'amortissement C étant positive. Pour $\alpha = 1$, le modèle est visqueux linéaire. On note que la dimension « temps » de ce problème est, par les règles de similitude, directement associée au coefficient C : en effet, en notant le temps réduit par $\tau = \lambda t$, la loi non linéaire s'écrit : $\sigma_3 = C.\,\lambda^{\alpha}\, sgn\left(\dot{\varepsilon}_v\right).\left|\dfrac{d\,\varepsilon_v}{d\,\tau}\right|^{\alpha}$. Ainsi envisager un chargement dynamique avec une pulsation différente (en rapport λ) est identique à changer en proportion de λ^{α} le coefficient C de la loi. On note que le cas $E_2 \to \infty$ est non-admissible, mais on peut choisir $E_2 = 0$ (système en série pure, type MAXWELL) ; de même on ne prendra pas $E_1 \to \infty$ et $E_3 \to \infty$ en même temps (modèle de KELVIN-VOIGT), faute de quoi la raideur initiale du système serait infinie.

5.2 Formulation du comportement

On note ci-après par ε la « déformation » de l'élément discret, à savoir la différence des déplacements axiaux (direction x dans le repère local) des nœuds aux extrémités de l'élément défini :

$\varepsilon = U_x^{N2} - U_x^{N1}$ sur la maille SEG2 ou $\varepsilon = U_x^{N1}$ sur la maille POI1 [éq 5.2-1]

De même, on note ci-après par σ la « contrainte » de l'élément discret, à savoir l'effort axial transitant dans l'élément défini sur la maille SEG2 ou POI1 :

$$\sigma = F_x^{N2} = F_x^{N1} \qquad \text{[éq 5.2-2]}$$

La compatibilité des déformations donne, cf. Figure 5.1-a :

$$\begin{cases} \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_3 + \varepsilon_v \end{cases} \qquad \text{[éq 5.2-3]}$$

L'équilibre et les relations de comportement donnent respectivement (en se plaçant ci-après dans le cas $sgn\left(\dot{\varepsilon}_v\right) = +1$, pour ε et σ positifs) :

$$\begin{cases} \sigma &= E_1 \varepsilon_1 \\ \sigma &= \sigma_2 + \sigma_3 = E_2 \varepsilon_2 + E_3 \varepsilon_3 \\ \sigma_3 &= E_3 \varepsilon_3 = C\left(\dot{\varepsilon}_v\right)^{\alpha} \end{cases} \qquad \text{[éq 5.2-4]}$$

On déduit respectivement que :

$$\dot{\varepsilon}_2 = \left(\frac{\sigma_3}{C}\right)^{1/\alpha} + \frac{\dot{\sigma}_3}{E_3} \qquad \text{[éq 5.2-5]}$$

$$\dot{\sigma} = E_2 . \left(\frac{\sigma_3}{C}\right)^{1/\alpha} + \frac{\dot{\sigma}_3\left(E_2 + E_3\right)}{E_3} \qquad \text{[éq 5.2-6]}$$

Et l'évolution de la déformation est :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\dot{\varepsilon}=\frac{E_1+E_2}{E_1}\left(\frac{\sigma_3}{C}\right)^{1/\alpha}+\frac{\dot{\sigma}_2\left(E_1+E_2+E_3\right)}{E_1E_3} \quad \text{[éq 5.2-7]}$$

Donc la loi de comportement globale du système rhéologique s'écrit en vitesse :

$$\dot{\sigma}=\frac{E_1.\left(E_2+E_3\right)\dot{\varepsilon}-E_1E_3.\dot{\varepsilon}_v}{E_1+E_2+E_3} \quad \text{[éq 5.2-8]}$$

La vitesse $\dot{\varepsilon}$ est calculée sur la base des déplacements et l'incrément de temps choisi :

$$\dot{\varepsilon}=\left(U_x^{N2}-U_x^{N1}\right)/\Delta t$$

Il reste à exprimer $\dot{\varepsilon}_v$ à partir des variables d'état :

$$\dot{\varepsilon}_v=\left(\frac{1}{C}\left(\frac{\sigma\left(E_1+E_2\right)}{E_1}-E_2\varepsilon\right)\right)^{1/\alpha} \quad \text{[éq 5.2-9]}$$

La raideur tangente élastique en vitesse du modèle, qui sert à la phase de prédiction, est :

$$K_t=\frac{E_1.\left(E_2+E_3\right)}{E_1+E_2+E_3}=\frac{1+E_2/E_3}{1/E_1+E_2/(E_1\times E_3)+1/E_3} \quad \text{[éq 5.2-10]}$$

La puissance dissipée s'exprime par :

$$P_{diss}=C\left|\dot{\varepsilon}_v\right|^{1+\alpha} \quad \text{[éq 5.2-11]}$$

Dans le plan vitesse de déformation-contrainte dans le modèle rhéologique, pour différentes valeurs de α, on observe les cycles suivants :

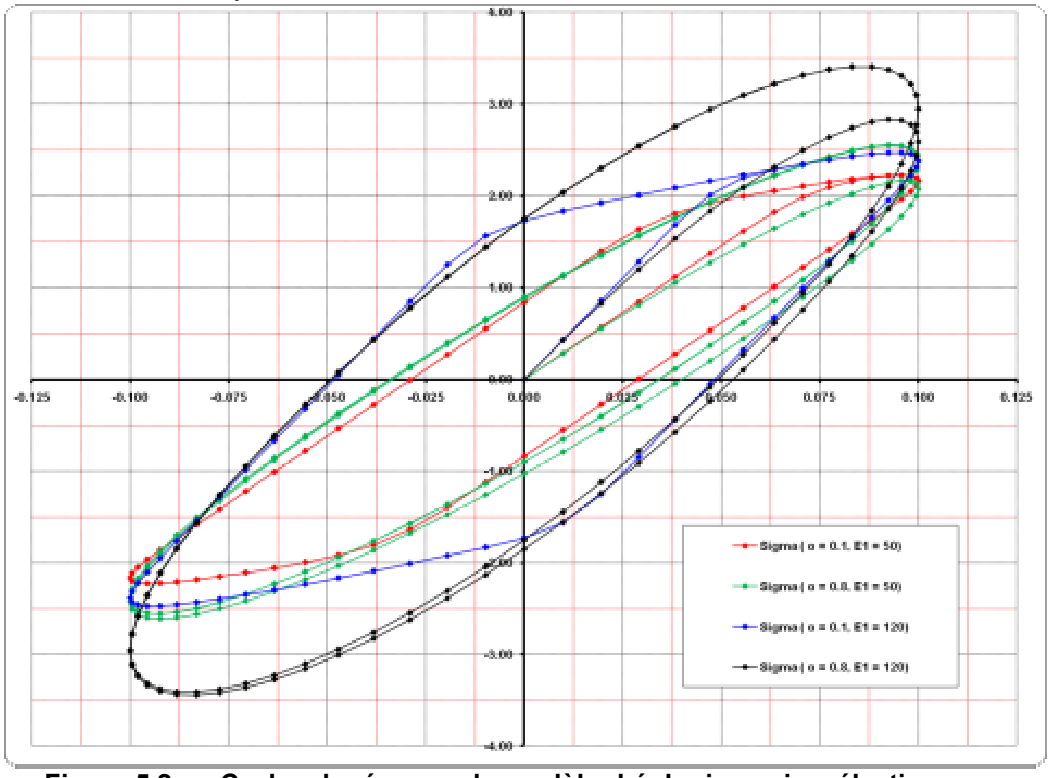


Figure 5.2-a : Cycles de réponse du modèle rhéologique viscoélastique non linéaire discret (modèle Zener généralisé).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Force en Newton fonction du déplacement en mètres.

Remarque :
L'inclinaison des cycles provient de l'effet des raideurs en parallèle dans le comportement rhéologique (Kelvin-Voigt ou Zener) ou en série (modèle Maxwell). En effet, dans le cas d'un amortisseur seul sans raideur, les cycles sont nécessairement symétriques par rapport à l'axe des déplacements nuls. Si l'on dispose de courbes expérimentales de comportement d'un tel appareil amortisseur, on pourra par recalage déterminer ainsi les divers coefficients de cette loi DIS_VISC.

5.3 Mise en données

Les coefficients matériau sont fournis par le mot-clé DIS_VISC de la commande DEFI_MATERIAU.
Pour la direction locale x (et seulement celle-là) de l'élément discret, on fournit 5 coefficients, soit les raideurs, soit les souplesses, puis les caractéristiques amortissantes :

- K1 : raideur élastique E_1 de l'élément 1 du modèle rhéologique,
- K2 : raideur élastique E_2 de l'élément 2 du modèle rhéologique,
- K3 : raideur élastique E_3 de l'élément 3 du modèle rhéologique,

- UNSUR_K1 : souplesse élastique $1/E_1$ de l'élément 1 du modèle rhéologique,
- UNSUR_K2 : souplesse élastique $1/E_2$ de l'élément 2 du modèle rhéologique,
- UNSUR_K3 : souplesse élastique $1/E_3$ de l'élément 3 du modèle rhéologique,

- PUIS_ALPHA : puissance α de la loi non linéaire du comportement visqueux de l'élément,
- C : coefficient du comportement visqueux de l'élément.

Les conditions à respecter pour ces coefficients sont (notamment pour assurer la positivité et la finitude de la matrice tangente) :

$$E_1 \geqslant 10^{-8} \ ; \ 1/E_1 \geqslant 0 \ ; \ E_3 \geqslant 10^{-8} \ ; \ 1/E_3 \geqslant 0$$
$$1/E_2 \geqslant 10^{-8} \ ; \ E_2 \geqslant 0 \ ; \ C \geqslant 10^{-8} \ ; \ 10^{-8} \leqslant \alpha \leqslant 1$$

De plus, on ne peut avoir à la fois : $1/E_1 = 0$, $1/E_3 = 0$ et $E_2 = 0$, c'est-à-dire le cas de l'amortisseur seul.

5.4 Intégration du comportement

5.4.1 Intégration locale

Un schéma d'EULER implicite est bien moins précis (il faudrait calculer l'erreur à l'ordre 2) qu'un schéma de RUNGE-KUTTA d'ordre 5 avec un contrôle de l'erreur. Le schéma RK5 est une combinaison du schéma d'ordre 4 et du schéma d'ordre 6 (bib [9]), pour lequel les coefficients sont déterminés de façon à minimiser l'erreur entre l'ordre 4 et l'ordre 6.
C'est pourquoi dans *Code_Aster*, l'intégration locale de ce modèle utilise le schéma de RUNGE-KUTTA d'ordre 5. De plus, la raideur tangente après discrétisation discrète en temps du comportement dF/dU est obtenue directement via l'expression du schéma RUNGE-KUTTA, à la fin du pas de temps.
L'erreur est connue, il est donc possible de déclencher des subdivisions locales du pas de temps si le critère de convergence n'est pas respecté.

5.4.2 Intégration temporelle et équilibre global

Par ailleurs, si on envisage l'équilibre dynamique d'un système à un degré de liberté, de masse M, comportant un amortisseur seul (sans raideurs) obéissant à la loi [éq 5.1-1], l'équation du mouvement s'écrit, ayant adopté le « temps réduit » $\tau = \lambda t$:

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$M\,\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}+C.\lambda^{2-\alpha}.sgn\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right).\left|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|^{\alpha}=0 \qquad \text{[éq 5.4.2-1]}$$

Adoptons par exemple le schéma d'intégration temporelle de Newmark, cf. [R5.05.05], section § 3.1 ; on note à l'instant τ_i les grandeurs déplacement, vitesse et accélération : u_i , v_i , a_i et $\Delta\tau$ le pas de « temps réduit ». On a donc à l'instant τ_{i+1} :

$$\begin{cases} v_{i+1}=\dfrac{\gamma}{\beta\,\Delta\tau}\left(u_{i+1}-u_i\right)+\dfrac{\beta-\gamma}{\beta}v_i+\dfrac{2\beta-\gamma}{2\beta}\Delta\tau\,.\,a_i \\ a_{i+1}=\dfrac{1}{\beta\,\Delta\tau^2}\left(u_{i+1}-u_i\right)-\dfrac{1}{\beta\,\Delta\tau}v_i+\dfrac{2\beta-1}{2\beta}.a_i \end{cases} \qquad \text{[éq 5.4.2-2]}$$

Injectons ces expressions [éq 5.2-4] pour écrire l'équilibre [éq 5.4.2-1] à l'instant τ_{i+1} , dans le cas $v_i\geqslant 0$, développé au premier ordre en Δv :

$$\hat{K}\,u_{i+1}=\frac{M\,u_i}{\beta\,\Delta\tau^2}+\frac{M\,v_i}{\beta\,\Delta\tau}-\frac{2\beta-1}{2\beta}.M\,a_i+C.\lambda^{2-\alpha}.\left(\frac{\beta-\gamma}{\beta}v_i+\frac{2\beta-\gamma}{2\beta}\Delta\tau\,.\,a_i\right)^{1-\alpha} \qquad \text{[éq 5.4.2-3]}$$

la matrice tangente étant :

$$\hat{K}=\frac{M}{\beta\,\Delta\tau^2}+\frac{\alpha\gamma\,C.\lambda^{2-\alpha}}{\beta\,\Delta\tau}.\left(\frac{\beta-\gamma}{\beta}v_i+\frac{2\beta-\gamma}{2\beta}\Delta\tau\,.\,a_i\right)^{\alpha-1} \qquad \text{[éq 5.4.2-4]}$$

Dans le cas $\alpha=1$ (amortisseur linéaire), on retrouve la matrice tangente $\hat{K}$ et la dépendance au pas de temps Δt habituelles du schéma de Newmark pour le cas linéaire, cf. [R5.05.05].

Dans le cas $\alpha\neq 1$ (amortisseur non linéaire), on observe que v_i et a_i ne pouvant être nuls ensemble (sauf en statique), la matrice tangente $\hat{K}$ du schéma de Newmark voit sa dépendance au pas de temps affectée par le facteur $C.\lambda^{2-\alpha}$. Donc si on fait varier le coefficient C de la loi, on devra faire varier le pas de temps d'intégration temporelle. On pourra aussi adopter une technique de subdivision du pas de temps, cf. opérateur STAT_NON_LINE [U4.51.03] et opérateur DYNA_NON_LINE [U4.53.01].

Ce modèle de comportement sur élément discret est aussi disponible à l'identique au sein des opérateurs DYNA_VIBRA [U4.53.03] et DYNA_TRAN_MODAL [U4.53.21], pour une analyse dynamique sur base modale avec non-linéarités localisées sur des nœuds, et des schémas d'intégration en temps de la dynamique de type Euler ou de type Runge-Kutta d'ordre 5 et d'ordre 3, à pas adaptatif. Il y est intégré localement en temps de la même manière : voir §5.4.1. On devra, comme en dynamique sur base physique, définir le pas de temps du schéma en fonction des paramètres de la loi DIS_VISC, dont les valeurs sont définies directement dans les opérateurs DYNA_VIBRA et DYNA_TRAN_MODAL.

5.5 Variables internes

Le comportement DIS_VISC possède 4 variables internes :

- $V1$: FORCE : contient l'effort σ à chaque instant dans le modèle rhéologique.
- $V2$: UVISQ : déplacement visqueux de l'amortisseur ε_v .
- $V3$: DISSTHER : contient l'énergie dissipée réactualisée à chaque instant :

$$V3=\sum\left|\frac{\sigma^{+}\left(E_1+E_2\right)}{E_1}-E_2\varepsilon^{+}\right|.\left|\varepsilon_v^{+}-\varepsilon_v^{-}\right|$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- $V4$: RAIDEUR : raideur tangente au comportement dF/dU .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Comportement non-linéaire DIS_ECRO_TRAC

6.1 Définition

Le comportement DIS_ECRO_TRAC est un comportement non linéaire qui s'applique soit :
- au degré de liberté DX local des éléments discrets à deux nœuds (maille SEG2) ou et des éléments discrets à un nœud (maille POI1). Le comportement est du type "écrouissage isotrope".
- dans le plan tangent YZ local des éléments discrets à deux nœuds (maille SEG2) ou et des éléments discrets à un nœud (maille POI1). Le comportement est du type "écrouissage isotrope" ou "écrouissage cinématique" .

Le comportement non-linéaire est donné par une courbe $F = fonction(\Delta U)$:
- pour un SEG2, ΔU représente le déplacement relatif des 2 nœuds dans le repère local de l'élément.
- pour un POI1, ΔU représente le déplacement absolu du nœud dans le repère local de l'élément.
- pour un SEG2 ou un POI1, F représente l'effort exprimé dans le repère local de l'élément.

6.2 Mise en données

La seule donnée nécessaire est la fonction décrivant le comportement non-linéaire. Cette fonction doit respecter les critères suivant :
- C'est une fonction au sens de code_aster : définie avec l'opérateur DEFI_FONCTION,
- Les interpolations sur les axes des abscisses et des ordonnées sont linéaires,
- Le nom de l'abscisse lors de la définition de la fonction est DX,ou DTAN,
- Les prolongements à gauche et à droite de la fonction sont exclus,
- La fonction doit être définie par au moins 3 points, pour une fonction d'écrouissage isotrope,
- La fonction doit être définie par exactement 3 points, pour une fonction d'écrouissage cinématique,
- Le premier point est $(0.0, 0.0)$ et doit être donné,
- La fonction doit être strictement croissante,
- La dérivée de la fonction doit être inférieure ou égale à sa dérivée au point $(0.0,0.0)$.

Les deux premiers points de la fonction permettent de définir la pente élastique au comportement. Les unités des abscisses et des ordonnées doivent être cohérentes avec celles du problème :
- l'abscisse doit être homogène à un déplacement,
- l'ordonnée (valeur de la fonction) doit être homogène à un effort.

6.3 Formulation du comportement

La formulation est identique à celle que l'on utilise en plasticité isotrope ou cinématique:
- Le seuil est représenté par la fonction décrivant le comportement non-linéaire
- La raideur élastique k_{elas} est définie par la pente initiale de la courbe.

Dans ces conditions : $f = \|\mathbf{F} - \mathbf{X}\| - R(p)$
Où :
- $\mathbf{F}$: est le vecteur effort (F_x, F_y, F_z).
- $\mathbf{X}$: est le vecteur d'écrouissage cinématique (X_x, X_y, X_z).
- p : l'écoulement plastique.
- R : la fonction d'écrouissage isotrope ou cinématique.

Le comportement est décrit par les équations suivantes, avec i l'axe local (x, y, z) :

$$\dot{F}_i = K_{elas}.\left(\dot{U}_i - \dot{U}_i^p\right)$$

si $f \leq 0$:

$$\dot{\lambda} = 0$$

si $f = 0$ et $\dot{f} = 0$:

$$\dot{U}_i^p = \dot{\lambda}.\frac{\partial f}{\partial F_i}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- cas de l'écrouissage cinématique :
  $\dot{\alpha}_i = -\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial X_i}$ avec $\dot{X}_i = -C.\dot{\alpha}_i$ et C pente de l'écrouissage cinématique.
- cas de l'écrouissage isotrope
  $\dot{p}_i = -\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial R}$

L'incrément de dissipation est donné par : $\dot{W} = \mathbf{F}.\dot{\mathbf{U}}^P$

6.4 Intégration locale du comportement

Le schéma utilisé est celui de RUNGE-KUTTA d'ordre 5 avec un contrôle de l'erreur. Le schéma RK5 est une combinaison du schéma d'ordre 4 et du schéma d'ordre 6 (bib [9]), pour lequel les coefficients sont déterminés de façon à minimiser l'erreur entre l'ordre 4 et l'ordre 6.
Dans c*ode_aster*, l'intégration locale de ce modèle utilise le schéma de RUNGE-KUTTA d'ordre 5.
L'erreur est connue, il est donc possible de déclencher des subdivisions locales du pas de temps si le critère de convergence n'est pas respecté.

6.5 Variables internes

Le comportement DIS_ECRO_TRAC possède 14 variables internes :

	Nom de la variable	
V1	FORCEX	Force suivant l'axe local x de l'élément.
V2	FORCEY	Force suivant l'axe local y de l'élément.
V3	FORCEZ	Force suivant l'axe local z de l'élément.
V4	DEPLX	Déplacement suivant l'axe local x de l'élément.
V5	DEPLY	Déplacement suivant l'axe local y de l'élément.
V6	DEPLZ	Déplacement suivant l'axe local z de l'élément.
V7	DISSTHER	Dissipation.
V8	PCUM	Indicateur plastique.
V9	DEPLPX	Déplacement anélastique suivant l'axe local x de l'élément.
V10	DEPLPY	Déplacement anélastique suivant l'axe local y de l'élément.
V11	DEPLPZ	Déplacement anélastique suivant l'axe local z de l'élément.
V12	FORCXX	Écrouissage cinématique suivant l'axe local x de l'élément.
V13	FORCXY	Écrouissage cinématique suivant l'axe local y de l'élément.
V14	FORCXZ	Écrouissage cinématique suivant l'axe local z de l'élément.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation des chocs et du frottement : DIS_CHOC

Le comportement DIS_CHOC traduit le contact avec choc et frottement entre deux structures, via deux types de relations :

- la relation de contact unilatéral qui exprime la non inter-pénétrabilité entre les corps solides,
- la relation de frottement qui régit la variation des efforts tangentiels dans le contact. On retiendra pour les présents développements une relation simple : la loi de frottement de Coulomb.

Attention :

Ce comportement est explicite et il est traité par pénalisation. Les raideurs qui interviennent dans le comportement ne sont donc pas « physiques ». Il n'est pas conseillé d'utiliser ce comportement pour modéliser des éléments dont les raideurs ont un sens « physique ».

Recommandation :

Il est souhaitable et recommandé d'utiliser le comportement DIS_CONTACT, qui a les mêmes paramètres matériaux et avec un formalisme proche d'une loi de plasticité.

7.1 Relation de contact unilatéral

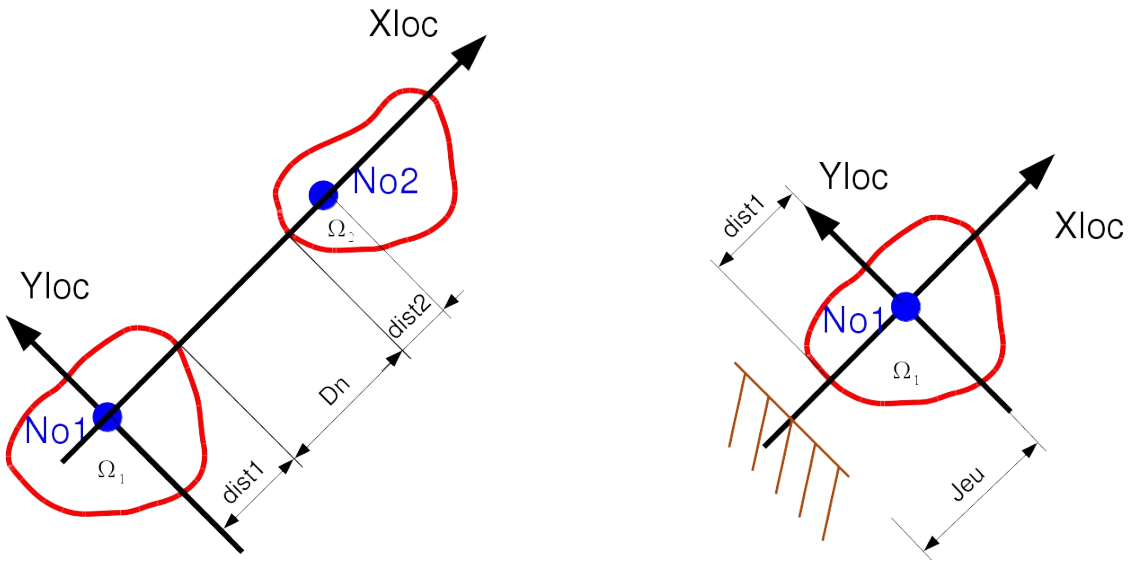


Figure 7.1-a : Définition des distances pour la relation DIS_CHOC.

- Dans le cas d'un discret à 2 nœuds (basé sur un SEG2).
  Soient deux structures Ω_1 et Ω_2. On note d_N la distance normale entre les structures, $F_N^{1/2}$ la force de réaction normale de Ω_1 sur Ω_2.
  Dans le repère local à l'élément, la distance normale d_N a pour expression :
  $d_N=((X^0_{loc2}+u_2)-(X^0_{loc1}+u_1))-dist_1-dist_2$.
  Il y aura " choc " lorsque $d_N \leq 0$.

- Dans le cas d'un discret à un nœud (basé sur un POI1).
  Il n'y a qu'une seule structure Ω_1. On note d_N la distance normale entre la structure et le plan de choc (qui n'est pas modélisé). $F_N^{1/2}$ la force de réaction normale de Ω_1 sur le plan.
  Dans le repère local à l'élément, la distance normale d_N a pour expression :
  $d_N=u_1+(Jeu-dist_1)$. Il y aura " choc " lorsque $d_N \leq 0$.

La loi de l'action et de la réaction impose :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$F_N^{2/1} = -F_N^{1/2}$$ [éq 7.1-1]

Les conditions de contact unilatéral, encore appelées conditions de Signorini [bib5], s'expriment de la façon suivante :

$$d_N \geq 0 \, , F_N^{1/2} \geq 0 \, , d_N \cdot F_N^{1/2} = 0 \text{ et } F_N^{2/1} = -F_N^{1/2}$$ [éq 7.1-2]

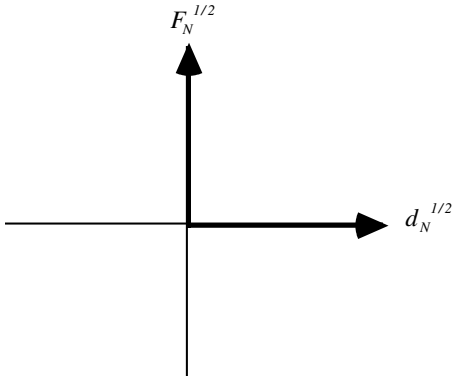


Figure 7.1-b : Graphe de la relation de contact unilatéral.

Ce graphe traduit une relation force-déplacement qui n'est pas différentiable. Il n'est donc pas utilisable de façon simple dans un algorithme de calcul dynamique.

7.2 Loi de frottement de Coulomb

La loi de Coulomb exprime une limitation de l'effort tangentiel $\mathbf{F}_\mathbf{T}^{1/2}$ de réaction tangentielle de Ω_1 sur Ω_2 . Soit $\dot{\mathbf{u}}_\mathbf{T}^{1/2}$ la vitesse relative de Ω_1 par rapport à Ω_2 en un point de contact et soit μ le coefficient de frottement de Coulomb, on a [bib5] :

$$s = \|\mathbf{F}_\mathbf{T}^{1/2}\| - \mu \cdot F_{N^{1/2}} \leq 0, \quad \exists \lambda \ \dot{\mathbf{u}}_\mathbf{T}^{1/2} = \lambda \ \mathbf{F}_\mathbf{T}^{1/2}, \ \lambda \leq 0, \ \lambda . s = 0$$ [éq 7.2-1]

et la loi de l'action et de la réaction :

$$\mathbf{F}_\mathbf{T}^{2/1} = -\mathbf{F}_\mathbf{T}^{1/2}$$ [éq 7.2-2]

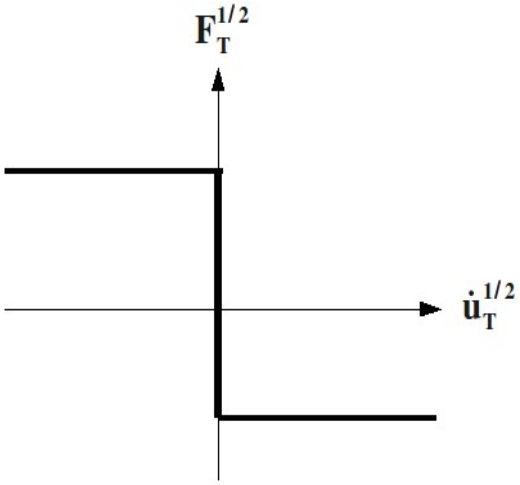


Figure 7.2-a : Graphe de la loi de frottement de Coulomb.

Le graphe de la loi de Coulomb est lui aussi non différentiable et n'est donc pas simple à utiliser dans un algorithme dynamique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7.3 Modélisation approchée des relations de contact par pénalisation

7.3.1 Modèle de force normale de contact

Le principe de la pénalisation consiste à introduire une relation univoque $F_N^{1/2}=f_\varepsilon\left(d_N\right)$ au moyen d'un paramètre ε. Le graphe de f_ε doit tendre vers le graphe de Signorini lorsque ε tend vers zéro [bib6].
Une des possibilités consiste à proposer une relation linéaire entre d_N et $F_N^{1/2}$:

$$\text{si } d_N \leq 0 \, alors F_N = \frac{1}{\varepsilon} d_N \text{ sinon } F_N = 0 \qquad \text{[éq 7.3.1-1]}$$

Si l'on note $K_N=\frac{1}{\varepsilon}$ appelée communément "**raideur de choc**", on retrouve la relation classique, modélisant un choc élastique :

$$F_N^{1/2}=-K_N\cdot d_N^{1/2} \qquad \text{[éq 7.3.1-2]}$$

Le graphe approché de la loi de contact avec pénalisation est le suivant :

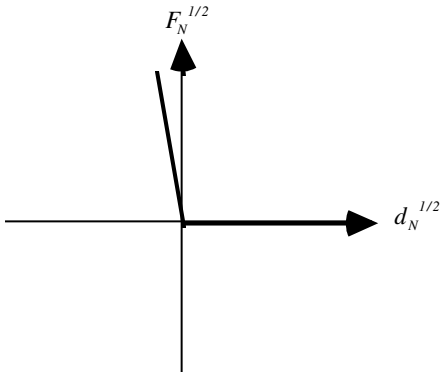


Figure 7.3.1-a : Graphe de la relation de contact unilatéral approchée par pénalisation.

En dynamique, pour tenir compte d'une éventuelle perte d'énergie dans le choc, on introduit un "amortissement de choc" C_N. L'expression de la force normale de contact s'exprime alors par :

$$F_{N^{1/2}}=-K_N\cdot d_N-C_N\cdot \dot{u}_{N^{1/2}} \qquad \text{[éq 7.3.1-3]}$$

où $\dot{u}_N^{1/2}$ est la vitesse normale relative de Ω_1 par rapport à Ω_2. Pour respecter la relation de Signorini (pas d'adhérence en contact), il faut que $F_N^{1/2}$ soit positive ou nulle. On ne prendra donc que la partie positive $\langle\rangle^+$ de l'expression [éq 7.3.1-3] :

$$\langle x\rangle^+=x \text{ si } x\geq 0$$
$$\langle x\rangle^+=0 \text{ si } x<0$$

La relation complète donnant la force normale de contact qui est retenue pour l'algorithme est la suivante:

$$\left.\begin{array}{ll} si & d_N\leq 0 \quad F_N^{1/2}=\langle -K_N.d_N-C_N.\dot{u}_N^{1/2}\rangle^+; \quad F_N^{2/1}=-F_N^{1/2} \\ sinon & F_N^{2/1}=F_N^{1/2}=0 \end{array}\right\} \qquad \text{[éq 7.3.1-4]}$$

7.3.2 Modèle de force tangentielle de contact en dynamique

Le graphe décrivant la force tangentielle avec loi de Coulomb est non-différentiable pour la phase d'adhérence $\dot{\mathbf{u}}_T^{1/2}=0$. On introduit donc une relation univoque liant le déplacement tangentiel relatif

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\mathbf{d}_{\mathbf{T}}^{1/2}$ et la force tangentielle $\mathbf{F}_{\mathbf{T}}^{1/2}=f_{\xi}\left(\mathbf{d}_{\mathbf{T}}^{1/2}\right)$ au moyen d'un paramètre ξ. Le graphe de F_{ξ} doit tendre vers le graphe de Coulomb lorsque ξ tend vers zéro [bib6].

Une des possibilités consiste à écrire une relation linéaire entre $\mathbf{d}_{\mathbf{T}}^{1/2}$ et $\mathbf{F}_{\mathbf{T}}^{1/2}$:

en notant a^{0} la valeur d'une quantité a au début du pas de temps :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{T}}^{1/2}-\mathbf{F}_{\mathbf{T}}^{1/2\,0}=-\frac{1}{\xi}\cdot\left(\mathbf{d}_{\mathbf{T}}^{1/2}-\mathbf{d}_{\mathbf{T}}^{1/2\,0}\right) \qquad \text{[éq 7.3.2-1]}$$

Si l'on introduit une "raideur tangentielle" $K_T=\frac{1}{\xi}$, on obtient la relation :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{T}}^{1/2}=\mathbf{F}_{\mathbf{T}}^{1/2\,0}-K_T\cdot\left(\mathbf{d}_{\mathbf{T}}^{1/2}-\mathbf{d}_{\mathbf{T}}^{1/2\,0}\right) \qquad \text{[éq 7.3.2-2]}$$

Pour des raisons numériques, liées à la dissipation de vibrations parasites [bib7] en phase d'adhérence, on est amené à ajouter un "amortissement tangentiel" C_T dans l'expression de la force tangentielle. Son expression finale est :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{T}}^{1/2}=\mathbf{F}_{\mathbf{T}}^{1/2\,0}-K_T\cdot\left(\mathbf{d}_{\mathbf{T}}^{1/2}-\mathbf{d}_{\mathbf{T}}^{1/2\,0}\right)-C_T\cdot\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{T}}^{1/2},\ \mathbf{F}_{\mathbf{T}}^{2/1}=-\mathbf{F}_{\mathbf{T}}^{1/2} \qquad \text{[éq 7.3.2-3]}$$

Il faut de plus que cette force vérifie le critère de Coulomb, soit :

$$\left\|\mathbf{F}_{\mathbf{T}}^{1/2}\right\|\leq\mu\cdot F_N^{1/2} \text{ sinon on applique } F_T^{1/2}=-\mu\cdot F_N^{1/2}\cdot\frac{\dot{\mathbf{u}}_T^{1/2}}{\left\|\dot{\mathbf{u}}_T^{1/2}\right\|},\ \mathbf{F}_{\mathbf{T}}^{2/1}=-\mathbf{F}_{\mathbf{T}}^{1/2} \qquad \text{[éq 7.3.2-4]}$$

Le graphe approché de la loi de frottement de Coulomb modélisé par pénalisation est le suivant :

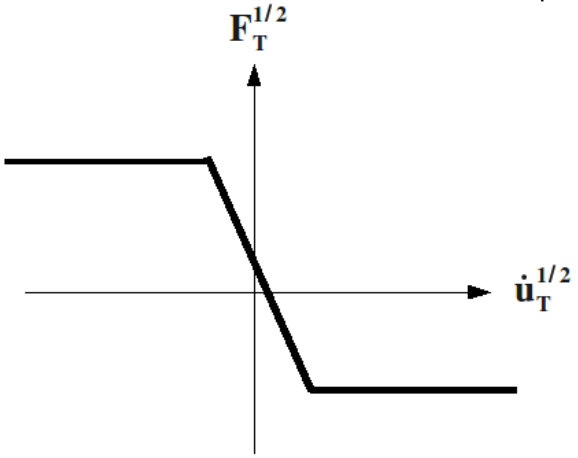


Figure 7.3.2-a : Graphe de la loi de frottement approchée par pénalisation.

7.4 Définition des paramètres de contact

On précise ici les mots-clés permettant de définir les paramètres de contact, amortissement et frottement [U4.43.01] :

- L'opérande RIGI_NOR permet de donner la valeur de raideur normale de choc K_N.
- L'opérande AMOR_NOR permet de donner la valeur d'amortissement normal de choc C_N.
- L'opérande RIGI_TAN permet de donner la valeur de raideur tangentielle K_T.
- L'opérande AMOR_TAN permet de donner la valeur d'amortissement tangentielle de choc C_T.
- L'opérande COULOMB permet de donner la valeur du coefficient de Coulomb.
- L'opérande DIST_1 permet de définir la distance caractéristique de matière entourant le premier nœud de choc
- L'opérande DIST_2 permet de définir la distance caractéristique de matière entourant le deuxième nœud de choc (choc entre deux structures mobiles)
- L'opérande JEU définit la distance entre le nœud de choc et un obstacle non modélisé (cas d'un choc entre une structure mobile et un obstacle indéformable et immobile).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7.5 Variables internes

Elles sont au nombre de huit :

- $V1$: déplacement dû au glissement dans le plan tangent suivant l'axe local y .
- $V2$: déplacement dû au glissement dans le plan tangent suivant l'axe local z .
- $V3$: vitesse suivant l'axe local y .
- $V4$: vitesse suivant l'axe local z .
- $V5$: composante de l'effort tangent suivant l'axe local y : F_{cy}
- $V6$: composante de l'effort tangent suivant l'axe local z : F_{cz}
- $V7$: gestion du critère du Coulomb, phase adhérente ou de glissement.
- $V8$: .déplacement dû au glissement dans le plan tangent suivant l'axe local x .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Modélisation des chocs et du frottement : DIS_CONTACT

Le comportement DIS_CONTACT traduit le contact avec choc et frottement entre deux structures, via deux types de relations :

- la relation de contact unilatéral qui exprime la non inter-pénétrabilité entre les corps solides,
- la relation de frottement qui régit la variation des efforts tangentiels dans le contact. On retiendra pour les présents développements une relation simple : la loi de frottement de Coulomb.

Attention :

Ce comportement est intégré avec un schéma implicite direct en temps et est écrit comme une loi de comportement classique. Les paramètres de raideurs et amortissement qui interviennent dans ce comportement sont donc « physiques ».

Recommandation :

Dans ce cas, il est souhaitable d'utiliser le comportement DIS_CHOC, qui a les mêmes paramètres matériaux et cette relation est intégrée explicitement en traitant le contact et le frottement par pénalisation.

8.1 Relation de contact unilatéral

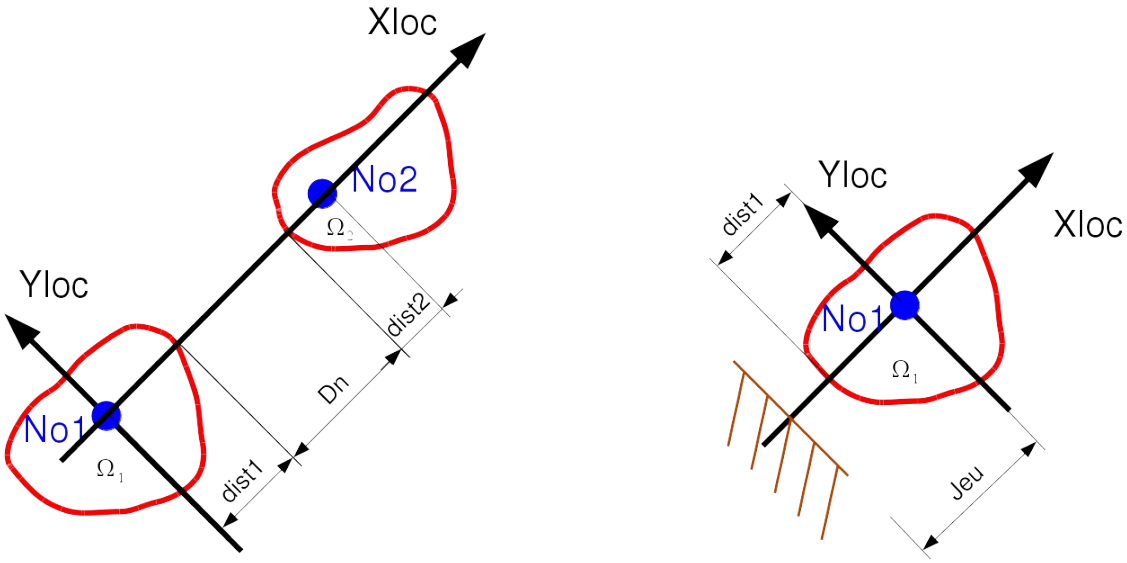


Figure 8.1-a : Définition des distances pour la relation DIS_CHOC.

8.1.1 Définition de la distance de contact

Dans le cas d'un discret à 2 nœuds :

$$DistanceContact = LongueurDiscret - dist\ 1 - dist\ 2$$

Dans le cas d'un discret à 1 nœud :

$$DistanceContact = Jeu - dist\ 1$$

La distance de contact est positive dans la direction de l'axe local $Xloc$. Pour établir un contact initial, il faut donc choisir judicieusement les valeurs des paramètres : $dist\ 1, dist\ 2, Jeu$.

8.1.2 Formulation du comportement

La formulation du comportement est très similaire à celle que l'on trouve en plasticité parfaite.

- Le frottement est représenté par un seuil décrivant le comportement non linéaire.
- Les raideurs élastiques suivant les axes locaux K_x, K_y, K_z .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans ces conditions : $f=\sqrt{(F_{cy}^2+F_{cz}^2)}-\mu|Fx|$
Où :
- F_{cy}, F_{cz} : est l'effort tangent de Coulomb..
- F_x : est l'effort normal.
- μ : est le coefficient de frottement de Coulomb.

Le comportement est décrit par les équations suivantes :

$$\dot{F}_{cy} = K_{tangent.}\left(\dot{U}_y-\dot{U}_y^p\right)+C_{T.}\gamma_y$$
$$\dot{F}_{cz} = K_{tangent.}\left(\dot{U}_z-\dot{U}_z^p\right)+C_{T.}\gamma_z$$

Les efforts dans le discret sont :

$$\dot{F}_x = K_{normal.}\dot{U}_x+C_{N.}\gamma_x$$
$$\dot{F}_y = K_y.\dot{U}_y+\dot{F}_{cy}$$
$$\dot{F}_z = K_z.\dot{U}_z+\dot{F}_{cz}$$

si $f\leq 0$:

$$\dot{\lambda} = 0$$

si $f=0$ et $\dot{f}=0$:

$$\dot{U}_y^p = \dot{\lambda}.\frac{\partial f}{\partial F_y} \quad \text{et} \quad \dot{U}_z^p = \dot{\lambda}.\frac{\partial f}{\partial F_z}$$

avec : $Ft=\sqrt{(F_{cy}^2+F_{cz}^2)}$

$$\dot{\lambda}=\frac{F_{cy}}{F_t}.\dot{U}_y+\frac{F_{cz}}{F_t}.\dot{U}_z-\frac{K_{normal}}{K_{tangent}}.\mu\,\dot{U}_x.\,sgn(F_x)$$

8.2 Intégration locale du comportement

Le schéma utilisé est celui de RUNGE-KUTTA d'ordre 5 avec un contrôle de l'erreur. Le schéma RK5 est une combinaison du schéma d'ordre 4 et du schéma d'ordre 6 (bib [9]), pour lequel les coefficients sont déterminés de façon à minimiser l'erreur entre l'ordre 4 et l'ordre 6.
Dans c*ode_aster*, l'intégration locale de ce modèle utilise le schéma de RUNGE-KUTTA d'ordre 5.
L'erreur est connue, il est donc possible de déclencher des subdivisions locales du pas de temps si le critère de convergence n'est pas respecté.

8.3 Définition des paramètres de contact

On précise ici les mots-clés permettant de définir les paramètres de contact, amortissement et frottement [U4.43.01] :
- L'opérande RIGI_NOR permet de donner la valeur de raideur normale de choc K_N.
- L'opérande AMOR_NOR permet de donner la valeur d'amortissement normal de choc C_N.
- L'opérande RIGI_TAN permet de donner la valeur de raideur tangentielle K_T.
- L'opérande AMOR_TAN permet de donner la valeur d'amortissement tangentielle de choc C_T.
- L'opérande COULOMB permet de donner la valeur du coefficient de Coulomb.
- L'opérande DIST_1 permet de définir la distance caractéristique de matière entourant le premier nœud de choc
- L'opérande DIST_2 permet de définir la distance caractéristique de matière entourant le deuxième nœud de choc (choc entre deux structures mobiles)
- L'opérande JEU définit la distance entre le nœud de choc et un obstacle non modélisé (cas d'un choc entre une structure mobile et un obstacle indéformable et immobile).
- L'opérande EVOLJEU qui est une fonction du temps multiplicative du JEU. Cette fonction permet d'établir progressivement la distance de contact, comme définit précédemment.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8.4 Variables internes

Elles sont au nombre de neuf :

- $V1$: com posante de l'effort tangent suivant l'axe local y : F_{cy} .
- $V2$: composante de l'effort tangent suivant l'axe local z : F_{cz} .
- $V3$: déplacement dû au glissement dans le plan tangent suivant l'axe local y .
- $V4$: déplacement dû au glissement dans le plan tangent suivant l'axe local z .
- $V5$: vitesse suivant l'axe local x .
- $V6$: vitesse suivant l'axe local y .
- $V7$: vitesse suivant l'axe local z .
- $V8$: gestion de l'interpénétration initiale du discret.
- $V9$: gestion du contact initial.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Comportements : CHOC_ENDO et CHOC_ENDO_PENA

Ces comportements sont dédiés aux éléments discret de type K_T_D_L. Ils permettent de modéliser des chocs en tenant compte :
- d'une fonction seuil, qui limite l'effort de choc au cours du chargement dépendant du déplacement,
- l'endommagement des raideurs de choc au cours du chargement,
- l'évolution du "gap", du fait des chocs répétés,
- l'amortissement variable au cours du calcul.

Le matériau qui permet de donner les caractéristiques est DIS_CHOC_ENDO [U4.43.01] .

Attention :

> ***Le comportement CHOC_ENDO est implicite et est écrit de façon similaire à une loi de comportement plastique. Le comportement CHOC_ENDO_PENA est intégré explicitement et traite le contact par pénalisation.***

9.1 Formulation du comportement CHOC_ENDO

La formulation du comportement est très similaire à celle que l'on trouve en plasticité parfaite.
L'effort de choc est limité par un seuil dépendant du déplacement relatif des nœuds du discret.
On a donc : $f=\left|\widetilde{F}_x\right|-R(p)$
Où :
- $\widetilde{F}_x$: est l'effort dans le discret, avec ou sans l'amortissement.
- $R(p)$: l a fonction seuil limitant l'effort du discret .

Le comportement est décrit par l'équation suivante :
Avec prise en compte de l'amortissement dans le seuil

$$\widetilde{F}_x = K_{nor}(p).\left(U_x-U_x^p\right)+A_n(p).\dot{U}_x$$

Sans prise en compte de l'amortissement dans le seuil

$$\widetilde{F}_x = K_{nor}(p).\left(U_x-U_x^p\right)$$

O ù :
- $K_{nor}(p)$ représente la fonction de la raideur de choc.
- U_x , $\dot{U}_x$ représente respectivement le déplacement et la vitesse relative des nœuds du discret.
- U_x^p représente le déplacement anélastique correspondant à l'évolution du jeu.
- $A_n(p)$ représente la fonction de l'amortissement.

La formulation se place dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. D ans ce cadre les équations s'écrivent de la façon suivante :

si $f\le 0$:

$$\dot{F}_x = K_{nor}(p).\left(\dot{U}_x-\dot{U}_x^p\right)+A_n(p).\ddot{U}_x \text{ et } \dot{p}=0 .$$

sinon :

$f=0$ et $\dot{f}=0$

Le multiplicateur plastique :

Prise en compte de l'amortissement dans le seuil

$$\dot{p}=\frac{K_{nor}.\dot{U}_x+A_n.\ddot{U}_x}{R'+K_{nor}+k'_{nor}.\left(U_x-U_x^P\right)+A'_n.\dot{U}_x}$$

Sans amortissement dans le seuil

$$\dot{p}=\frac{K_{nor}.\dot{U}_x}{R'+K_{nor}+k'_{nor}.\left(U_x-U_x^P\right)}$$

Dans tous les cas l e déplacement anélastique est : $\dot{U}_x^p=\dot{p}$

L'incrément de l'effort dans le discret :

$$\dot{F}_x=K_{nor}(p).\left(\dot{U}_x-\dot{U}_x^p\right)+K'_{nor}(p).\dot{p}.\left(U_x-U_x^P\right)+A_n(p).\ddot{U}_x+A'_n(p).\dot{p}.\dot{U}_x$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9.2 Variables internes

Les quatre variables internes sont :
- $V1$: la plasticité cumulée p .
- $V2$: déplacement anélastique U_x^p .
- $V3$: la vitesse relative des nœuds du discret $\dot{U}_x$.
- $V4$: l'évolution du jeu.

9.3 Formulation du comportement CHOC_ENDO_PENA

Le comportement est exprimé de façon explicite et le choc est traité par pénalisation :
- L'effort de choc est un effort de compression, il est donc négatif lorsqu'il y a contact.
- Les enfoncements sont négatifs.
- L'amortissement peut être inclus ou exclus lors de l'évaluation du seuil.
  - si inclus : $A_{\text{in}}=A_n$, $A_{\text{out}}=0$
  - si exclus : $A_{\text{in}}=0$, $A_{out}=A_n$

Quelques notations :
- Dx : enfoncement.
- Dxm : enfoncement maximum $\text{Sup}(Dx)$.
- Dxr : enfoncement résiduel ou anélastique.
- K_{nor} , A_n , $Seuil$: sont des fonctions de l'enfoncement.

À l'état initial l'enfoncement maximum et l'enfoncement résiduel sont nuls. Ce sont des variables internes de la loi de comportement.

En prédiction élastique, l'effort est donné par :

$$F_x=K_{nor}(Dxm).(Dx-Dxr)$$

Si $F_X>Seuil(Dxm)$ alors

$$Dxr=Dx+Seuil(Dxm)/K_{nor}(Dxm)$$

Prise en compte de l'amortissement lorsqu'il est inclus dans la vérification du seuil.

$$F_x=K_{nor}(Dxm).(Dx-Dxr)+A_{\text{in}}.\dot{D}x$$

Si $F_X>Seuil(Dx)$ alors

$$F_X=Seuil(Dx)+A_{out}.\dot{D}x$$

sinon

$$F_x=K_{nor}(Dxm).(Dx-Dxr)+A_n.\dot{D}x$$

Si $F_x>0$ alors $F_x=0$. L'effort ne peut être que négatif.

9.4 Variables internes

Les trois variables internes sont :
- $V1$: enfoncement maximum Dxm .
- $V2$: enfoncement résiduel Dxr .
- $V3$: indicateur de charge (0 pas de contact, 1 contact élastique, 2 sur le seuil)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9.5 Définition des paramètres matériaux

On précise ici les mots-clés permettant de définir les paramètres du matériau DIS_CHOC_ENDO [U4.43.01] :

- FX permet de donner la fonction seuil de l'effort de choc, qui dépend des déplacements relatifs des nœuds du discret.
- RIGI_NOR permet de donner la fonction de la raideur normale de choc, qui dépend des déplacements relatifs des nœuds du discret.
- AMOR_NOR permet de donner la fonction d'amortissement, qui dépend des déplacements relatifs des nœuds du discret.
- DIST_1 permet de définir la distance caractéristique de matière entourant le premier nœud de choc.
- DIST_2 permet de définir la distance caractéristique de matière entourant le deuxième nœud de choc.
- CRIT_AMOR permet d'inclure ou d'exclure l'amortissement dans l'évaluation du seuil.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

10 Modélisation de la liaison grille-crayon : DIS_GRICRA

Le comportement DIS_GRICRA est utilisé pour modéliser le comportement en translation et en rotation des ressorts de liaison grille – crayon des assemblages combustibles. La loi de comportement a été conçue pour être utilisée avec des discrets à deux nœuds MECA_DIS_TR_L.

10.1 Présentation générale

Le maintien des crayons dans les cellules de grille est assuré par le système de bossettes et de ressorts représenté sur la figure suivante :

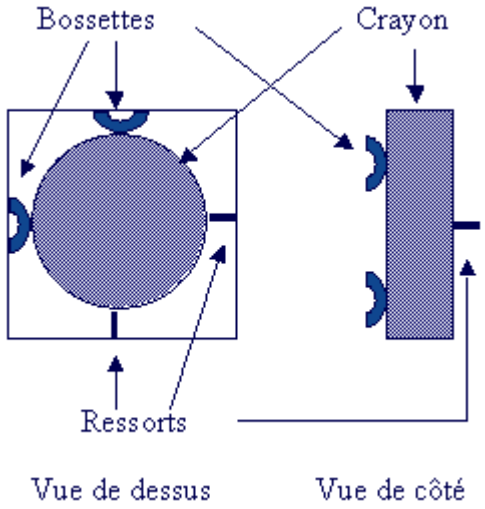


Figure 10.1-a : Schéma d'une cellule de grille.

Le crayon est donc maintenu dans la cellule de grille par six points de contact (cf. figure 10.1-a) : quatre bossettes et deux ressorts. Il est possible de modéliser chacun des éléments de contact (bossettes et ressorts) grâce à des éléments discrets, auxquels on affecte une loi de frottement de type DIS_CHOC. Une telle modélisation permet de représenter de manière satisfaisante le comportement d'une cellule de grille en translation (extraction du crayon) et en rotation. Une telle méthode a cependant les désavantages suivants :

- Complexité du maillage à produire, car il faut six discrets par cellule de grille (ou par grille dans un modèle homogénéisé), avec des hauteurs différentes pour les bossettes et les ressorts.
- Complexité dans la définition des caractéristiques des discrets, car il faut différencier les bossettes et les ressorts
- Dissymétrie de la modélisation (bossette d'un côté et ressort en opposition), alors que le comportement homogénéisé sur une grille peut être considéré comme symétrique, compte-tenu de l'alternance de l'orientation des cellules de grille dans les grilles.
- Difficultés pour identifier les paramètres du comportement des discrets à l'échelle d'un assemblage combustible.

Une modélisation équivalente appelée DIS_GRICRA a été proposée, qui permet de retrouver le même comportement que le système de six discrets en translation et en rotation, tout en évitant les désavantages cités ci-dessus :

- La liaison grille-crayon est modélisée par quatre éléments discrets en croix dans un même plan, ce qui simplifie le maillage et permet de symétriser le problème.
- Les quatre éléments sont affectés des mêmes paramètres pour la loi de comportement DIS_GRICRA.
- Les comportements en translation et en rotation sont traités séparément, ce qui facilite une identification des paramètres.

Remarque :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Afin de représenter correctement le comportement de la liaison dans toutes les directions, surtout en rotation, il est nécessaire d'utiliser quatre discrets disposés en croix, le crayon étant lié aux discrets au milieu du dispositif en croix.

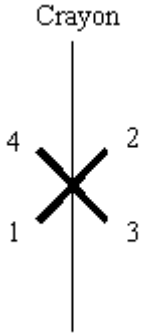


Figure 10.1-b : Dispositif de 4 discrets en croix nécessaire à la modélisation du comportement d'une cellule de grille.

10.2 Définition du repère local

Les équations de la loi de comportement sont écrites dans le repère local du discret. Compte-tenu du caractère orthotrope du comportement dans les directions tangentielles au discret, on adopte la convention suivante pour la définition du repère locale du discret : l'axe x représente l'axe du discret, l'axe y correspond à la direction du crayon, et l'axe z est l'axe orthogonal à x et y. Pour les angles de rotation, on notera Φ l'angle de rotation autour de l'axe x (DRX) et θ l'angle de rotation autour de l'axe z (DRZ). On ne s'intéresse pas à l'angle de rotation autour de y (DRY), car il faut bloquer cette rotation (condition limite) dans le fichier de commande.
Avec cette définition du repère local, la direction y est commune à tous les discrets du système en croix représenté sur la figure 10.1-b. La direction x des discrets 1 et 2 correspond à la direction z des discrets 3 et 4 (et vice versa). L'angle Φ de 1 et 2 correspond à l'angle θ de 3 et 4 (et vice versa).

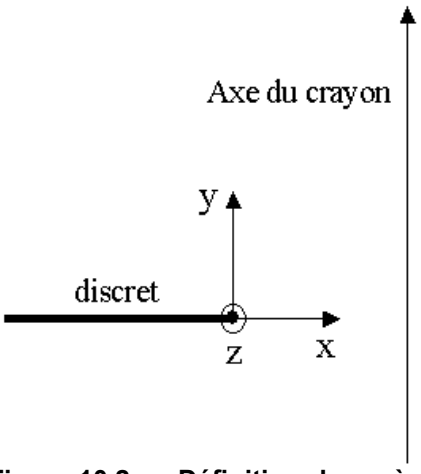


Figure 10.2-a : Définition du repère local.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

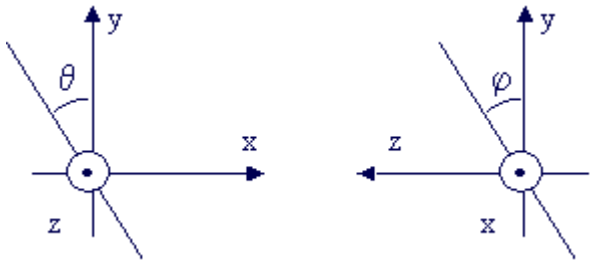


Figure 10.2-b : Définition des angles.

10.3 Comportement en translation

10.3.1 Présentation du comportement

Le comportement en translation est modélisé par une loi de type frottement de Coulomb [Figure 10.2-a].

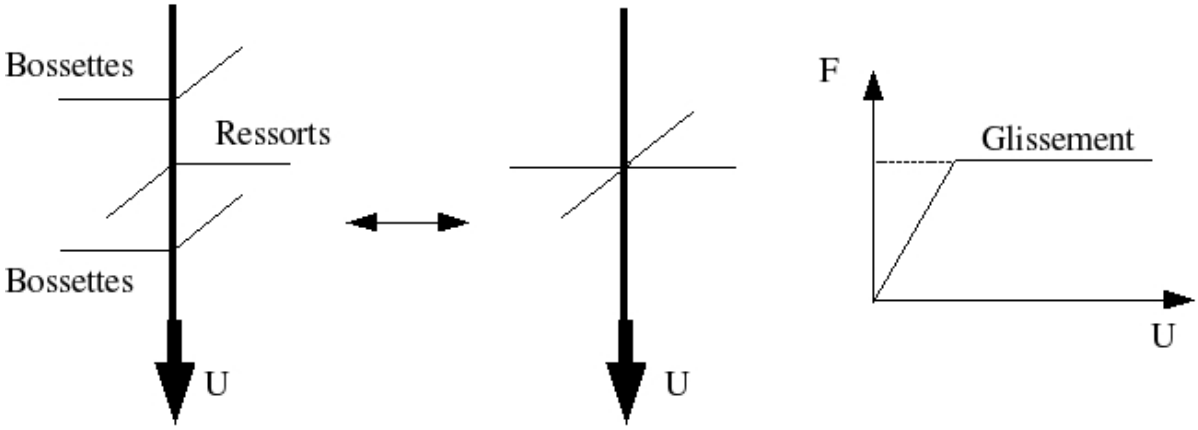


Figure 10.3.1-a : Lo i de comportement en translation.

Des types de comportements différents sont affectés selon les directions :

Direction x
On considère un comportement élastique, avec une force initiale à déplacement nul égale à l'opposé de la force de serrage (la force exercée par le crayon sur le discret comprime le discret) :

$$F_x = K_N \Delta x - F_N^0$$

Direction y
On considère un comportement élastoplastique quasi-parfait pour modéliser le frottement de Coulomb et la possibilité de glissement. La force s'exprime de la façon suivante :

$$F_y = K_T \left[\Delta y - U_y^p \right]$$

où Δy est la déformation du discret selon y et U_y^p représente le glissement
Le critère de glissement est le suivant :

$$\|F_y\| \leq F^S + \kappa \lambda \text{ avec } F^s = -\mu F_N^0$$

où κ est un paramètre du modèle, λ est le paramètre d'écrouissage et μ est le coefficient de Coulomb. La loi d'écoulement est la suivante : $\dot{U}_y^p = \dot{\lambda} \dfrac{F_y}{\|F_y\|}$

On se référera au document [R5.03.09] sur l'intégration des lois non linéaires $1D$ pour l'intégration numérique de cette loi élastoplastique de type Von Mises avec écrouissage isotrope.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Cette force est identique pour les 4 discrets du système en croix, car ils ont la même direction y.

Direction z
On rappelle que la loi de comportement grille-crayon DIS_GRICRA doit être utilisée avec une configuration de discrets en croix. Il est dès lors inutile de définir une force dans la direction z du discret, car la rigidité est « reprise » par les discrets orthogonaux (cf. section précédente).

10.3.2 Paramètres introduits

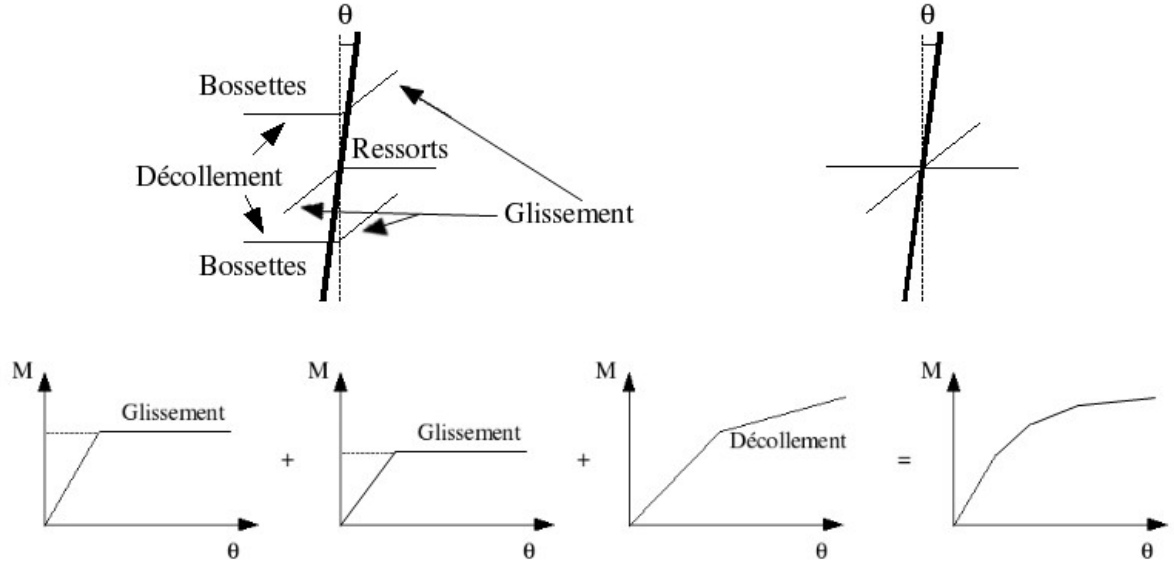
Le comportement en translation nécessite l'introduction de 5 paramètres :
- KN_AX : rigidité axiale du discret
- KT_AX : rigidité tangentielle (dans la direction de glissement) du discret
- F_SER ou F_SER_FO : force de serrage du crayon dans la grille, dans la direction axiale du discret
- COUL_AX : coefficient de Coulomb pour la loi de frottement
- ET_AX : paramètres d'écrouissage permettant de faire converger la loi de frottement. Ce paramètre est facultatif, une valeur de 10^{-7} est proposée par défaut dans Code_Aster.

La force nécessaire pour extraire un crayon d'une grille est égale à F_SER*COUL_AX (force d'extraction).

10.4 Comportement en rotation

10.4.1 Présentation du comportement

L'étude de la liaison grille-crayon en rotation avec le système bossettes-ressorts a montré qu'on pouvait décrire le comportement en superposant trois comportements simples :
- un phénomène de glissement du ressort orthogonal au plan de rotation, modélisé par une loi de Coulomb similaire à celle utilisée en translation [Figure 10.3.1-a].
- un phénomène de glissement des bossettes orthogonales au plan de rotation, modélisé par une loi de Coulomb similaire à celle utilisée en translation [Figure 10.3.1-a].
- un comportement élastique bilinéaire dans le plan de rotation, induit par la possibilité de décollement du crayon par rapport à une bossette à partir d'un certain angle [Figure 10.3.1-a].



Figu re 10.4.1-a : Sch éma du comportemen t de la liaison grille-crayon en rotation.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

C'est pour assurer cette superposition de deux comportements élastoplastiques avec un comportement élastique bilinéaire que la configuration de 4 discrets en croix est nécessaire. Si on considère une rotation d'un angle θ dans le repère global correspondant au repère local des discrets 1 et 2, cet angle correspond à l'angle Φ des discrets 3 et 4. Il suffit alors d'imposer aux discrets les lois élastoplastiques sur l'angle θ (du repère local) et la loi élastique bilinéaire sur l'angle Φ (du repère local) pour avoir une superposition des trois comportements grâce au système de discrets en croix.

Des types de comportements différents sont affectés selon les angles :

Rotation autour de l'axe x
On considère deux comportements élastoplastiques de type Von Mises avec écrouissage isotrope pour modéliser le frottement en rotation du ressort et des bossettes. Pour chaque loi, le moment s'exprime en fonction de l'angle et d'un angle « plastique » ou angle de glissement :

$$M_x = K_\Phi \left[\Phi - \Phi^p\right]$$

où Φ est l'angle de rotation autour de x et Φ^p représente l'angle de glissement
Le critère de glissement est le suivant :

$\|M_\Phi\| \leq M^S + \kappa\,\lambda$ où κ est un paramètre du modèle, λ est le paramètre d'écrouissage et M^s est le moment-seuil défini par des paramètres du modèle.

La loi d'écoulement est la suivante :

$$\dot{M}^p_\Phi = \dot{\lambda}\frac{M_\Phi}{\|M_\Phi\|}$$

On se référera au document [R5.03.09] sur l'intégration des lois non linéaires 1D pour l'intégration numérique de cette loi élastoplastique de type Von Mises avec écrouissage isotrope, en remplaçant la force par le moment et la déformation par la différence d'angle.

Rotation autour de l'axe z
Le comportement autour de l'axe z est considéré élastique bilinéaire. Le moment autour de l'axe z s'exprime en fonction de l'angle de rotation autour de l'axe z de la façon suivante :

$$M_\theta = K^1\theta \text{ si } \theta \in \left[-\theta^s, \theta^s\right]$$

$$M_\theta = K^2\theta\left[\theta - \theta^s\right] + K^1\theta\ \theta^s$$

où θ^s est l'angle de changement de pente élastique.

Rotation autour de l'axe y
En ce qui concerne la rotation autour de l'axe y, il est impératif de bloquer cette rotation car aucune loi n'a été identifiée pour ce degré de liberté, le crayon ne tournant pas. Cependant, afin de limiter le mauvais conditionnement de la matrice de rigidité, une rigidité est introduite dans le code, à partir des autres rigidités en rotation. Cette rigidité est invisible pour l'utilisateur et n'a pas d'influence sur les calculs, le degré de liberté correspondant étant bloqué.

10.4.2 Paramètres introduits

Le comportement en rotation nécessite l'introduction de 5 paramètres, soit sous forme de constantes (ANG1, ANG2,ANG3, PEN1, PEN2, PEN3, PEN4), soit sous forme de fonctions de la température et de l'irradiation (ANG1_FO, ANG2_FO, ANG3_FO, PEN1_FO, PEN2_FO, PEN3_FO, PEN4_FO). Un paramètre supplémentaire facultatif ET_ROT (égal à 10^{-7} par défaut) permet de faire converger le comportement de glissement. Le rôle de chacun des paramètres s'explique aisément sur la courbe angle-moment représentée sur les figures 10.4.1-a et 10.4.2-b:

- Au départ, il n'y a pas de glissement et pas de décollement, la rigidité en rotation est égale à PEN1 (ou PEN1_FO).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- À partir de l'angle ANG1 (ou ANG1_FO), le phénomène de glissement sur les bossettes orthogonales au plan de rotation est activé, ces éléments ne participent donc plus à la rigidité en rotation et la pente diminue et devient PEN2 (ou PEN2_FO). Le phénomène d'adhérence sur le ressort orthogonal au plan de rotation est toujours présent.
- À partir de l'angle ANG2 (ou ANG2_FO), par rapport à la situation précédente le décollement du crayon intervient par rapport à certaines bossettes, d'où une diminution de la rigidité. Celle-ci devient égale à PEN3 (ou PEN3_FO).
- À partir de l'angle ANG3 (ou ANG3_FO) le phénomène de glissement sur le ressort orthogonal au plan de rotation est activé, celui-ci ne participe donc plus à la rigidité en rotation et la pente diminue et devient PEN4 (ou PEN4_FO). Le phénomène de glissement sur les bossettes orthogonales au plan de rotation est toujours présent.
- Lorsqu'on décharge, il y a toujours décollement, mais il n'y a plus glissement du ressort et des bossettes sur le plan orthogonal, la pente devient PEN1-PEN2+PEN3 (ou PEN1_FO-PEN2_FO+PEN3_FO).
- Lorsqu'on atteint deux fois ANG1 (ou ANG1_FO) à partir du début de la décharge, le glissement des bossettes est réactivé, et on a toujours décollement, d'où une pente égale à PEN3 (ou PEN3_FO). Le phénomène d'adhérence sur le ressort orthogonal au plan de rotation est toujours présent.

Suivant l'angle maximal atteint avant la décharge, et la valeur des paramètres deux situations peuvent ensuite intervenir. Soit le recollement du crayon intervient avant le glissement du ressort dans le plan orthogonal [F igure 10.4.2-a] :

- À partir de ANG2 (ou ANG2_FO), on a recollement du crayon sur les bossettes, d'où une pente égale à PEN2 (ou PEN2_FO). Le phénomène d'adhérence sur le ressort orthogonal au plan de rotation est toujours présent..
- Lorsqu'on atteint deux fois ANG3 (ou ANG3_FO) à partir du début de la décharge, le glissement du ressort dans le plan orthogonal est réactivé, la pente devient PEN2-PEN3+PEN4 (ou PEN2_FO-PEN3_FO+PEN4_FO).

Soit le glissement du ressort dans le plan orthogonal intervient avant le recollement du crayon [Figure 10.4.2-b] :

- Lorsqu'on atteint deux fois ANG 3 (ou ANG 3 _FO) à partir du début de la décharge, l e glissement d u ressort dans le plan orthogonal est réactivé, et on a toujours décollement, la pente devient PEN 4 (ou PEN4_FO).
- À partir de ANG2 (ou ANG2_FO), on a recollement du crayon sur les bossettes, d'où une pente égale à PEN2-PEN3+PEN4 (ou PEN2_FO-PEN3_FO+PEN4_FO).

Les valeurs de paramètres utilisés pour les figures 10.4.2-a et 10.4.2-b sont les suivants :

$ANG1 = 0.001\,\mathrm{rad}$, $ANG2 = 0.004\,rad$, $ANG3 = 0.01\,rad$

$PEN1 = 1000\,N.m.rad^{-1}$, $PEN2 = 250\,N.m.rad^{-1}$, $PEN3 = 90\,N.m.rad^{-1}$,

$PEN4 = 15\,N.m.rad^{-1}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

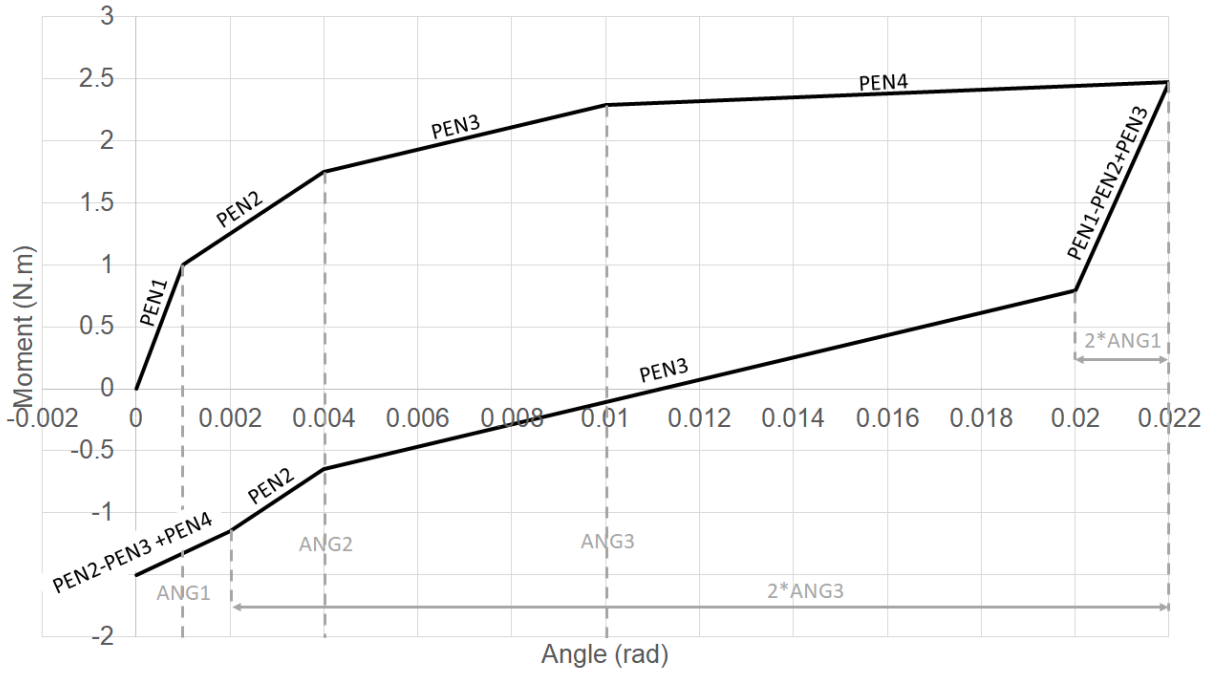


Figure 10.4.2-a : Courbe angle-moment sur un essai de charge et décharge en rotation pour la loi DIS_GRICRA.
Recollement du crayon avant le glissement du ressort en décharge

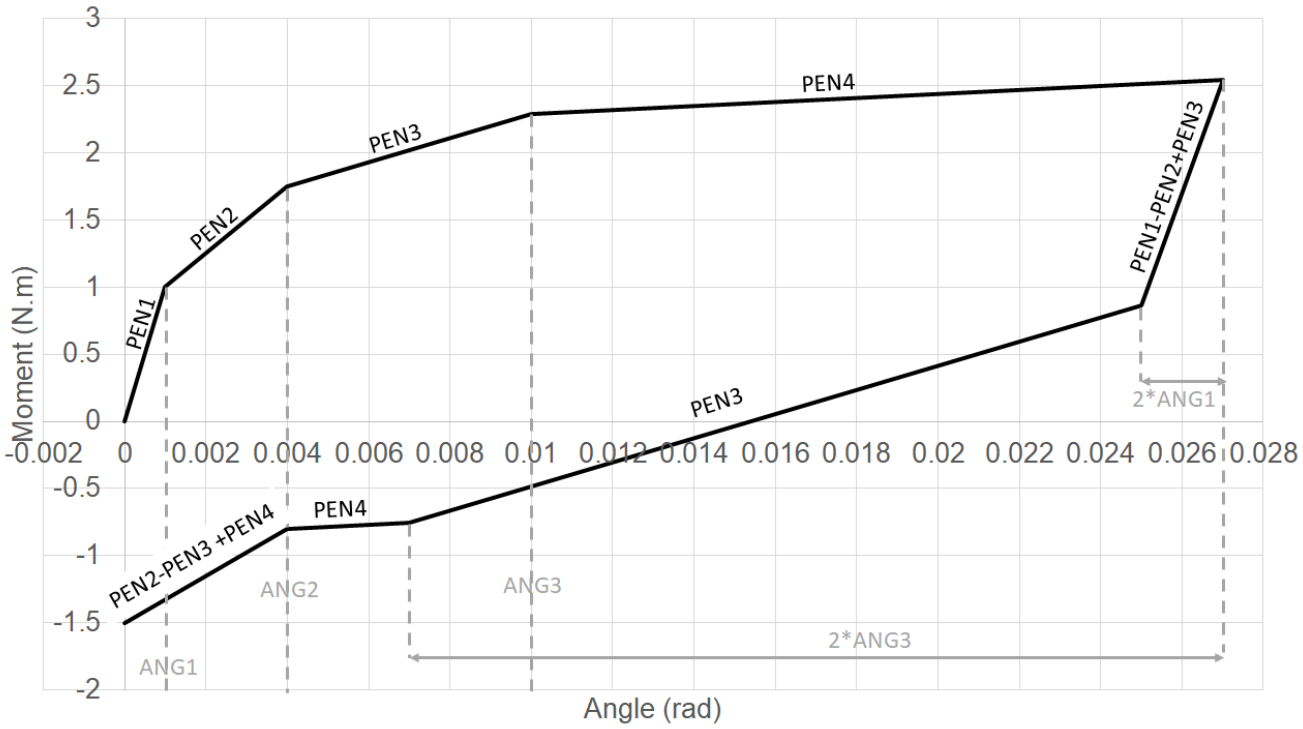


Figure 10.4.2-b : Courbe angle-moment sur un essai de charge et décharge en rotation pour la loi DIS_GRICRA.
Glissement du ressort en décharge avant le recollement du crayon.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

10.5 Remarque

Les forces et moments dépendent des déplacements et angles de rotation relatifs entre les deux nœuds du discret. On écrit dans cette section les forces et moments au nœud 2, et on prend comme convention d'écriture $\Delta\alpha=\Delta\alpha(n2)-\Delta\alpha(n1)$, qui représente la « déformation » associée au degré de liberté α pour le discret exprimée au nœud $n2$. La force au nœud $n1$ est égale à l'opposé de la force au nœud $n2$. Il en résulte que la matrice tangente est de la forme suivante :

$$\mathbf{K}^{\tan}=\begin{pmatrix} \underline{\underline{K}} & -\underline{\underline{K}} \\ -\underline{\underline{K}} & \underline{\underline{K}} \end{pmatrix}$$

Le comportement de la liaison grille crayon est différent pour chacun des degrés de liberté, et indépendant des autres degrés de libertés. Il en résulte que chacune des composantes de la force ne dépend que du degré de liberté auquel elle est associée, et que les blocs $\underline{\underline{K}}$ de la matrice tangente $\mathbf{K}^{\tan}$ sont diagonaux.

10.6 Utilisation

10.6.1 Type d'éléments

Les caractéristiques suivantes des éléments discrets doivent être affectées dans la commande AFFE_CARA_ELEM pour pouvoir utiliser DIS_GRICRA (cf. document [V6.02.131]) :

```
AFFE_CARA_ELEM(
    MODELE=modele,
    DISCRET=_F(  GROUP_MA=('mailles'),
                 CARA = 'K_TR_L',
                 VALE = 'liste de 78 termes',
                 REPERE='LOCAL')
```

Le comportement DIS_GRICRA pour la liaison grille-crayon ne peut être utilisé qu'avec des éléments discrets à deux nœuds et 6 degrés de libertés MECA_DIS_TR_L. On doit donc spécifier 'K_TR_L' sous CARA.
Contrairement aux autres comportements pour les discrets, DIS_GRICRA n'utilise pas la rigidité du discret donnée dans AFFE_CARA_ELEM sous le mot-clé VALE. Étant donné que le mot-clé VALE doit tout de même être rempli, il est conseillé d'affecter une liste de 78 termes nuls. Dans le cas d'un calcul de mode propre, la loi de comportement DIS_GRICRA n'est pas sollicitée, donc il faut alors rentrer les rigidités du discret qui correspondent au régime élastique de DIS_GRICRA.

On travaille dans le repère local.

```
ORIENTATION=_F(  GROUP_MA=('mailles',),
                 CARA='VECT_Y', VA LE = vect_crayon)
```

vect_crayon est un vecteur directeur du crayon. La direction du crayon doit impérativement être donnée sous le mot-clé ORIENTATION.
Par ailleurs, le champ d'irradiation est obtenu par cumul de l'historique vécu (stocké en variable interne) et de l'incrément du champ introduit par les variables de commandes entre le pas de temps courant et l'instant précédent.

10.6.2 Définition des caractéristiques du matériau

Le comportement DIS_GRICRA nécessite l'introduction de 10 paramètres. Ces données doivent être fournies dans DEFI_MATERIAU. Les paramètres d'entrée de cette loi sont les suivants :

Comportement en glissement axial : 5 paramètres (dont un paramètre arbitraire, purement numérique) :

- rigidité normale du discret KN_AX ;
- rigidité tangentielle (dans la direction du glissement) KT_AX ;

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- coefficient de frottement de Coulomb COUL_AX ;
- force de serrage F_SER (limite de glissement = COUL_AX*F_SER) ;
- paramètre d'écrouissage ET_AX (la loi de comportement peut être assimilée à de la plasticité parfaite. Le paramètre d'écrouissage ne sert qu'à assurer la convergence du calcul ; une valeur par défaut de $1.0\,10^{-7}$ lui est affectée) ;

Comportement en rotation : 6 paramètres (dont un paramètre purement numérique)
- pentes successives PEN1, PEN2 et PEN3 de la courbe Moment = f(angle) ;
- angles ANG1 et ANG2 des points d'inflexion de la courbe ;
- paramètre d'écrouissage ET_ROT (paramètre ne servant qu'à assurer la convergence du calcul ; une valeur par défaut de $1.0\,10^{-7}$ lui est affectée).

Les forces de serrage peuvent varier en fonction de la température et de l'irradiation. Ces dépendances sont affectées sur les pentes PEN1 et PEN2 pour le comportement en rotation et sur la force de serrage F_SER pour le comportement en glissement axial. Les fonctions de dépendance sont définies directement sous forme d'une FORMULE dans le fichier de commande.

Les noms des paramètres suivis du suffixe _FO permettent de renseigner la valeur sous la forme d'une fonction. Un certain nombre de paramètres supplémentaires, disponibles pour ce comportement mais qui ne figurent pas dans le présent document, sont explicités dans [V6.04.131]. Les paramètres de dépendance en température et en irradiation de la force de serrage sont définis dans le document [V6.02.131].

10.6.3 Variables internes

Elles sont au nombre de six :
- $V1$: déplacement plastique cumulé (direction axiale)
- $V2$: indicateur de contact/frottement (1 si glissement, 0 si non glissement)
- $V3$: indicateur de décollement en rotation,
- $V4$: angle plastique (glissement),
- $V5$: angle plastique cumulé,
- $V6$: mémorisation de l'historique d'irradiation (fluence).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

11 Comportement ARME

11.1 Définition

Le comportement ARME est utilisé pour modéliser le comportement d'un armement de ligne aérienne. Le bras de chaque armement de phase rompue, représenté par un élément discret, a un comportement non-linéaire en force-déplacement.
La loi de comportement non-linéaire ne s'applique que dans la direction locale y et est définie par les paramètres suivants:

- d_e déplacement limite du domaine élastique,
- d_l déplacement limite du domaine plastique,
- K_{el} pente du domaine élastique,
- K_{pl} pente du domaine plastique,
- K_G pente ultime,

Elle relie le déplacement différentiel U_y (repère local) entre les deux nœuds de l'élément discret et la force aux nœuds F_y (repère local).

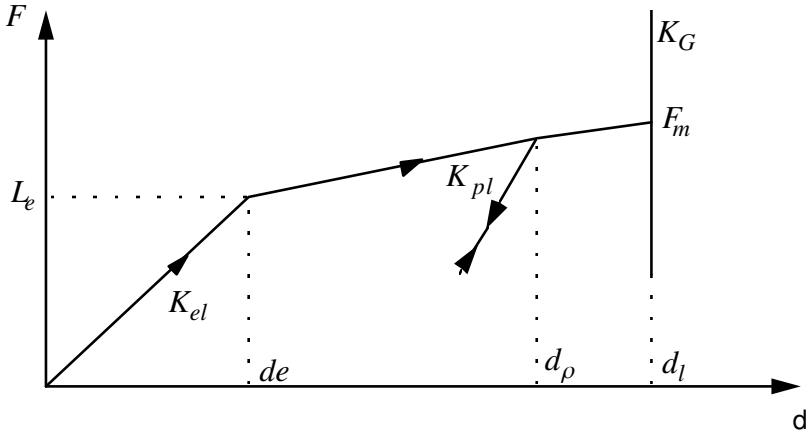


Figure 11.1-a : Comportement de la loi ARME

Pour les trois domaines de réponse identifiés, la loi de comportement s'exprime par :

$$\dot{F}_y = k \cdot \dot{U}_y$$

Où la raideur k varie suivant la phase :

- D ans la phase élastique et la phase de décharge :
  $k = K_{el}$ si $U_y < d_e$ ou $U_y < d_l$ et $\Delta U_y / U_y < 0$
- Dans la phase plastique :
  $k = K_{pl}$ si $U_y < d_l$ et $\Delta U_y / U_y > 0$
- Dans la phase limite ou décharge sur la courbe limite :
  $k = K_G$ si $U_y > d_l$ ou $V_1 \geq (d_l - d_e)$ et $\Delta U_y / U_y < 0$

Où V_1 est la variable interne correspondant au maximum de la différence entre le déplacement et le déplacement limite $V_1 = |U_y| - d_e$.

Intégration du comportement
L'intégration de la loi de comportement respecte les équations suivantes :

- Si on est en charge $\Delta U_y / U_y > 0$, on détermine si on est sur la courbe élastique, plastique ou limite, suivant la valeur de la variable interne V_1^- au pas précédent.
  - si $V_1^- < (d_l - d_e)$, on teste la nouvelle position

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- si $\left|F^-\right|+K_{el}\left|\Delta U_y\right|\leq K_{el}\cdot d_e$, on se trouve sur la courbe élastique et donc :
$$\begin{cases} k_t=K_{el} \\ V_1^+=V_1^- \end{cases}$$
- si $F^-+K_{el}\Delta U_y\geq K_{el}\cdot d_e$ et $U_y\leq d_l$, on se trouve sur la courbe plastique et donc :
$$\begin{cases} k_t=\dfrac{K_{el}\cdot d_e+K_{pl}\cdot(\left|U_y\right|-d_e)-\left|F^-\right|}{\left|\Delta U_y\right|} \\ V_1^+=\left|U_y\right|-d_e \end{cases}$$
- si $F^-+K_{el}\Delta U_y\geq K_{el}\cdot d_e$ et $U_y>d_p$, on se trouve sur la courbe limite :
$$\begin{cases} k_t=\dfrac{K_{el}\cdot d_e+K_{pl}\cdot d_l+K_G\cdot(\left|U_y\right|-d_l)-\left|F^-\right|}{\left|\Delta U_y\right|} \\ V_1^+=\left|U_y\right|-d_e \end{cases}$$

  - si $V_1^-\geq(d_l-d_e)$, on se trouve sur la courbe limite :
$$\begin{cases} k_t=K_G \\ V_1^+=d_l-d_e \end{cases}$$

- Si on est en décharge $\Delta U_y/U_y<0$, on détermine si on est sur la courbe élastique ou limite, suivant la valeur de la variable interne V_1^- au pas précédent.
  - si $V_1^-<(d_l-d_e)$, on décharge suivant la courbe élastique soit $k_t=K_{el}$ et $V_1^+=V_1^-$.
  - si $V_1^-\geq(d_l-d_e)$, on décharge suivant la courbe limite soit $k_t=K_G$ et $V_1^+=d_l-d_e$.

La force dans l'élément s'exprime alors par $F^+=F^-+k_t\Delta U_y$.

11.2 Variables internes

Il y a une variable interne :

- $V1$: Valeur maximale de la différence déplacement local-déplacement limite.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

12 Comportement DASHPOT

12.1 Définition

Le comportement DASHPOT est une loi permettant d'introduire une forme d'amortissement dans les calcul quasi-statiques. Pour l'activer il faut utiliser le mot-clef RELATION='DASHPOT'. A chaque instant de calcul t_i, elle lie la force nodale $F(t_i)$ à l'incrément de déplacement $\Delta_x(t_i)$ (et non au déplacement total comme le fait la loi ELAS) de la manière suivante : $F(t_i)=K\Delta_x(t_i)$ où K est un paramètre de raideur fourni par l'utilisateur via la commande AFFE_CARA_ELEM [U4.42.01] (CARA='K_T_D_L' ou 'K_T_D_N').

Cette loi n'a pas réellement de sens physique, elle est utilisée dans certains calculs complexes où on a besoin de limiter les mouvements de corps rigides tout en réduisant l'intensité de la force de rappel dans l'élément discret . L'idée étant de limiter le plus possible les effets non désirables dues à ces forces de rappel.

Les spécificités de la formulation Dashpot quasi-statique sont :

- A contrario des ressorts élastiques , le modèle ne prend pas en compte l'histoire du chargement au début du pas de temps ;
- Le Dashpot s'adapte aux changements cinématique s brusques (sauts de déplacement); Si l'incrément de déplacement est grand, la force de rappel est grande. P ar contre si l'incrément est petit, la force de rappel est petite ; ce qui a pour conséquence d'introduire un pilotage plus régulier en force que les ressorts ;
- Le modèle de Dashpot quasi-statique implémenté dans le code n'est pas sensible aux effets liés aux petits pas de temps ;
- Dans les cas où on a un seul pas de temps et qu'on est pas en mode réutilisation d'un calcul non linéaire précédent, le Dashpot se ramène à un ressort élastique.

12.2 Variables internes

Ce comportement n'a pas de variable interne.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

13 Comportement FONDATION

13.1 Définition

Ce document décrit le comportement élasto-plastique non linéaire d'une fondation superficielle rectangulaire soumise à une sollicitation tridimensionnelle statique ou sismique. Cette loi de comportement est affectée sur les éléments discrets 3D composé d'un unique nœud en translation et rotation (DIS_TR) affecté d'une matrice de raideur diagonale (K_TR_D_N) au moyen de la relation FONDATION appelée par les opérateurs de résolution de problèmes non linéaires STAT_NON_LINE [R5.03.01] ou DYNA_NON_LINE [R5.05.05]. Le mot clé utilisé pour définir les caractéristiques dans DEFI_MATERIAU est FONDA_SUPERFI.

La loi représente à la fois le mécanisme de glissement, le mécanisme de perte de capacité portante ainsi que le mécanisme de décollement de la fondation. Avant de mettre en jeu un des mécanismes précédemment cités, toutes les directions de chargement présentent un comportement élastique linéaire décrit par des caractéristiques classiques de rigidité.

On distingue dans la loi de comportement trois mécanismes qui peuvent se combiner :
- le premier représentant le glissement entre la sous-face de la fondation et le sol (traité comme un mécanisme plastique avec écrouissage) ;
- le second représentant le phénomène de perte de capacité portante sous l'effet d'une charge verticale trop importante (traité, là aussi, comme un mécanisme plastique avec écrouissage) ;
- le troisième représentant le phénomène de décollement-recollement de la fondation sous l'effet d'un moment important (traité comme un mécanisme élastique non linéaire).

P our plus de détail sur la loi de comportement, voir la documentation de référence associé e [R5.03.31] .

13.2 Variables internes

Elles sont au nombre de 21.

5 variables internes qui décrivent le déplacement plastique associé au critère de glissement :
- $V1$ DASLX : translation $U^{pl}_{x,s}$ selon x
- $V2$ DASLY : translation $U^{pl}_{y,s}$ selon y
- $V3$ DASLZ : translation $U^{pl}_{z,s}$ selon z
- $V4$ DASLRX : rotation $\theta^{pl}_{x,s}$ selon x
- $V5$ DASLRY : rotation $\theta^{pl}_{y,s}$ selon y

5 variables internes qui décrivent le déplacement plastique associé au critère de capacité portante :
- $V6$ DACPX : translation $U^{pl}_{x,CP}$ selon x
- $V7$ DACPY : translation $U^{pl}_{y,CP}$ selon y
- $V8$ DACPZ : translation $U^{pl}_{z,CP}$ selon z
- $V9$ DACPRX : rotation $\theta^{pl}_{x,CP}$ selon x
- $V10$ DACPRY : la rotation $\theta^{pl}_{y,CP}$ selon y

2 variables internes qui décrivent l'écrouissage associé au critère de glissement :
- $V11$ DAQSLX : translation $q_{h,x}$ selon x
- $V12$ DAQSLY : translation $q_{h,y}$ selon y

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 variables internes qui décrivent l'écrouissage associé au critère de capacité portante :

- $V13$ DAQCPX : écrouissage cinématique de la translation $R_{h,x}$ selon x
- $V14$ DAQCPY : écrouissage cinématique de la translation $R_{h,y}$ selon y
- $V15$ DARCP : écrouissage isotrope R
- $V16$ DAQCPRX : écrouissage cinématique de la rotation $R_{r,x}$ selon x
- $V17$ DAQCPRY : écrouissage cinématique de la rotation $R_{r,y}$ selon y

1 variable interne

- $V18$ DAUTRE : état de plasticité de l'élément $d_{état}$.

3 variables intermédiaires des écrouissages des critères de rupture :

- $V19$ DABSSLX : écrouissage cinématique de la translation $v_{x,s}^{pl}$ selon x
- $V20$ DABSSLY : écrouissage cinématique de la translation $v_{y,s}^{pl}$ selon y
- $V21$ DABSCPZ : écrouissages du critère de capacité portante $v_{z,CP}^{pl}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

14 Comportement JONC_ENDO_PLAS

14.1 Définition

Le comportement JONC_ENDO_PLAS est utilisé pour modéliser sur des éléments discrets (rotules), de type DIS_TR sur des mailles SEG2 , à deux nœuds, le comportement non linéaire d'une liaison en flexion hors-plan, cf. [U2.02.03]. Ce modèle a été conçu pour traiter la jonction entre un voile et un plancher ou un radier, en béton armé, modélisés en éléments finis de plaques, voire en éléments finis volumiques. La relation non linéaire s'exprime dans le plan moment M - rotation relative θ selon l'axe local Oz . Ce modèle de comportement a été développé dans le cadre de (bib [10] , [11]).

La mise en œuvre est décrite sur la Figure 14.1-a : vue en coupe et vue en perspective. SH désigne le cœur de la jonction, qui est modélisé par un élément fini linéaire, sur maille hexaédrique à huit nœuds, sur lequel on a affecté un comportement élastique linéaire – on consultera [U2.03.10] – et FL désigne les éléments discrets à deux nœuds, supports de la loi de comportement JONC_ENDO_PLAS. Cette dernière soit être comprise comme la « condensation » le long de l'arête de jonction des contributions linéiques de moments transmis par les deux éléments structurels (voile, plancher) liaisonnés.

La phénoménologie, cf. Figure 14.1-c, du modèle de comportement de jonction est initialement élastique, puis endommageable (dégradation de raideur), et enfin intègre un comportement plastique (déformations irréversibles en rotation) pour décrire les phénomènes observés, cf. Figure 14.1-b. On distingue les trajets en rotation « positive » et en rotation « négative », pour lesquels la dégradation peut se produire de manière non symétrique selon les caractéristiques des sections.

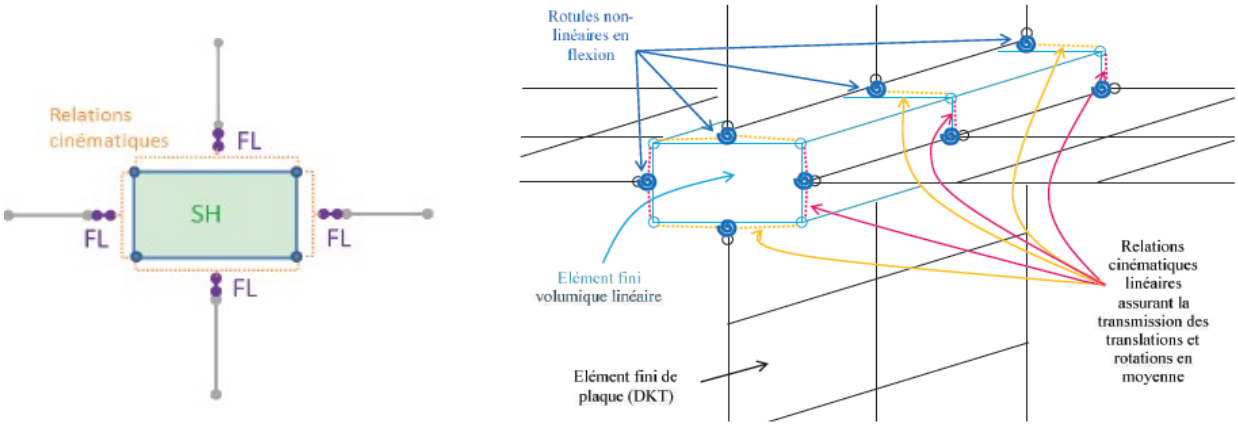


Figure 14.1-a : Mise en œuvre du modèle non linéaire discret en flexion d'une jonction entre deux voiles et deux planchers (situation courante). À gauche : vue en coupe (plan (x, y)) ; à droite : vue en perspective.

La phénoménologie résulte de situations schématisées sur la Figure 14.1-b suivante.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

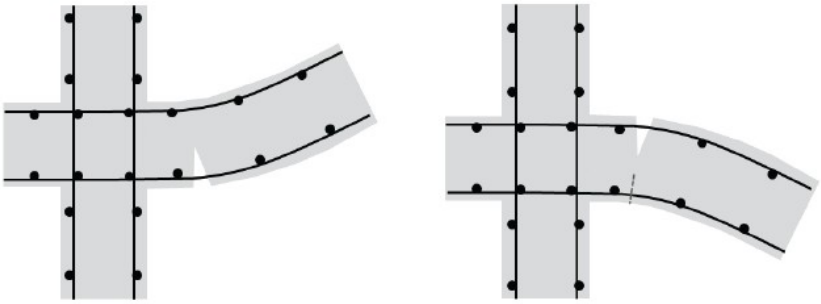


Figure 14.1-b : Schéma montrant l'ouverture d'une fissure en flexion positive dans le plancher (à gauche) puis sa refermeture et l'ouverture d'une seconde fissure en flexion négative (à droite).

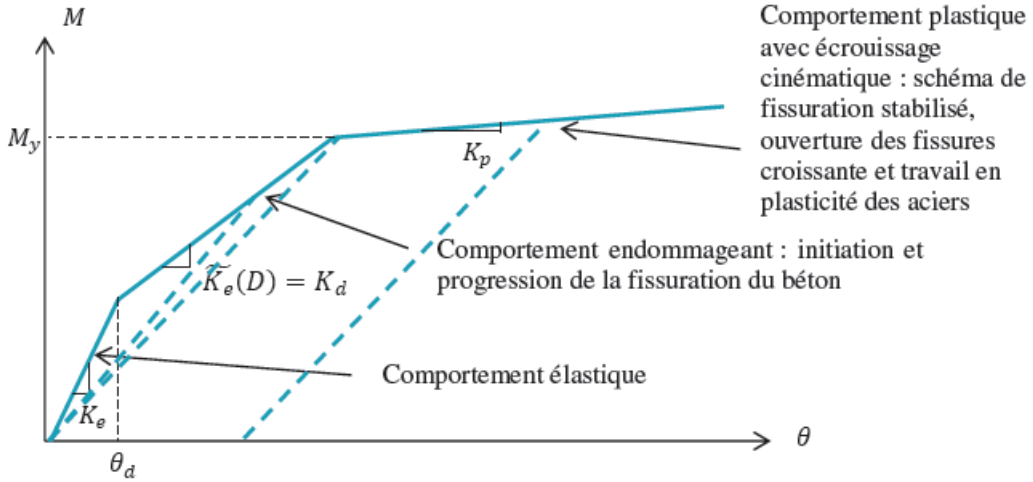


Figure 14.1-c : Modèle rhéologique non linéaire discret en flexion de jonction voile-plancher.

14.2 Paramètres de la loi de comportement

Ils sont au nombre de huit (réels positifs tous obligatoires, cf. [U4.43.01]) :

- KE : raideur en rotation élastique $K_e > 0$;
- KP : pente d'écrouissage plastique $K_p \leqslant K_e$;
- KDP : raideur tangente $K_d^+ \in \left[K_e, K_p \right]$ en phase endommageante pour la flexion positive,
- KDM : raideur tangente $K_d^- \in \left[K_e, K_p \right]$ en phase endommageante pour la flexion négative,
- RDP : rotation seuil d'endommagement $\theta_d^+ > 0$ en flexion positive,
- RDM : rotation seuil d'endommagement $\theta_d^- < 0$ en flexion négative,
- MYP : seuil de plasticité M_y^+ en flexion positive,
- MYM : seuil de plasticité $M_y^- \leqslant K_e \theta_d^-$ en flexion négative.

On décrit dans (bib [10], § 3.5., et [11]) la manière de déterminer les paramètres à partir de l'analyse de la section de béton armé : géométrie et caractéristiques des matériaux. On privilégie l'hypothèse d'un comportement linéaire élastique du béton jusqu'au seuil de fissuration. En compression, on retient l'hypothèse d'un comportement élastoplastique parfait du béton conformément à l'EN1992-1-1. Les aciers sont supposés être élastoplastiques.

Comme il s'agit d'un modèle de comportement pour élément discret, on attribue une longueur de référence le long de l'axe Oz de la jonction : les moments M s'entendent donc en unités de couple (distance * force).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

14.3 Formulation de la loi de comportement

On note dans ce qui suit les parties positives (resp. négatives) d'une grandeur scalaire par :

$$\langle x\rangle_+ = Max(0,x) \quad ; \quad \langle x\rangle_- = Max(0,-x) \qquad \text{[éq 14.3-1]}$$

Ce modèle de comportement est formulé dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. Les variables d'état primales de ce modèle de comportement sont :

- θ la rotation différentielle totale (selon l'axe local Oz) de part et d'autre de la jonction,
- θ^p la rotation relative plastique de la jonction,
- D^+ l'endommagement scalaire, qui représente la dégradation suite à l'initiation d'une fissuration à partir de la face inférieure, évoluant suivant le signe du moment sur la section de béton armé,
- D^- l'endommagement scalaire, qui représente la dégradation suite à l'initiation d'une fissuration à partir de la face supérieure, évoluant suivant le signe du moment sur la section de béton armé,
- α la variable d'écrouissage cinématique.

L'énergie libre s'écrit :

$$\Phi(\theta,\theta^p,D^+,D^-,\alpha) = \frac{1}{2}\tilde{K}_e^+(D^+)\langle\theta-\theta^p\rangle_+^2 + \frac{1}{2}\tilde{K}_e^-(D^-)\langle\theta-\theta^p\rangle_-^2 + \frac{1}{2}K_p\alpha^2 \qquad \text{[éq 14.3-2]}$$

avec respectivement :

$$\tilde{K}_e^{+/-}(D^{+/-}) = K_e(1-D^{+/-}) \quad \text{avec} \quad D^+\in[0,\ 1[\quad \text{et} \quad D^-\in[0,\ 1[\qquad \text{[éq 14.3-3]}$$

où on a défini le paramètre de raideur élastique K_e , cf. Figure 14.1-c.

La première loi d'état du modèle se déduit de14.3-2] :

$$M = \Phi_{,\theta} = \tilde{K}_e^+(D^+)\langle\theta-\theta^p\rangle_+ - \tilde{K}_e^-(D^-)\langle\theta-\theta^p\rangle_- \qquad \text{[éq 14.3-4]}$$

Les forces thermodynamiques associées aux variables internes du modèle sont respectivement :

$$\begin{cases} M_p = -\Phi_{,\theta^p} = \tilde{K}_e(D^+)\langle\theta-\theta^p\rangle_+ - \tilde{K}_e(D^-)\langle\theta-\theta^p\rangle_- = M \\ Y^+ = -\Phi_{,D^+} = \frac{1}{2}K_e.\langle\theta-\theta^p\rangle_+^2 \\ Y^- = -\Phi_{,D^-} = \frac{1}{2}K_e.\langle\theta-\theta^p\rangle_-^2 \\ X = -\Phi_{,\alpha} = -K_p\alpha \end{cases} \qquad \text{[éq 14.3-5]}$$

où on a défini le paramètre de pente d'écrouissage plastique K_p , cf. Figure 14.1-c.

La dissipation intrinsèque instantanée dans toute évolution admissible s'écrit alors :

$$D_{diss} = M_p.\dot{\theta^p} + Y^+.\dot{D^+} + Y^-.\dot{D^-} + X.\dot{\alpha} \qquad \text{[éq 14.3-6]}$$

soit :

$$\begin{aligned} D_{diss} = {} & \tilde{K}_e^+(D^+)\langle\theta-\theta^p\rangle_+.\dot{\theta}^p - \tilde{K}_e^-(D^-)\langle\theta-\theta^p\rangle_-.\dot{\theta}^p \\ & + \frac{1}{2}K_e.\langle\theta-\theta^p\rangle_+^2.\dot{D^+} + \frac{1}{2}K_e.\langle\theta-\theta^p\rangle_-^2.\dot{D^-} - K_p.\alpha.\dot{\alpha} \end{aligned} \qquad \text{[éq 14.3-7]}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans toute évolution admissible, $\dot{D}^-$ et $\dot{D}^+$ sont positifs ou nuls : l'endommagement ne peut que croître.

On utilise deux variables intermédiaires de rotation en flexion positive et négative :

$$\theta^+ = Max\left(\langle \theta - \theta^p \rangle_+ , \theta_d^+\right) \qquad \theta^- = Max\left(\langle \theta - \theta^p \rangle_- , |\theta_d^-|\right) \qquad \text{[éq 14.3-8]}$$

pour simplifier l'écriture des incréments des variables d'endommagement et de rotation plastique.

Dans un trajet de chargement monotone croissant en flexion positive ou négative, on obtient directement :

$$\begin{cases} \dot{D}^+ = 0 \quad pour \quad |\theta - \theta^p| \leqslant \theta_d^+ \\ \dot{D}^- = 0 \quad pour \quad |\theta - \theta^p| \leqslant \theta_d^- \\ D^+ = \left(1 - \dfrac{K_d^+}{K_e}\right).\left(1 - \dfrac{\theta_d^+}{\theta^+}\right) \quad pour \quad |\theta - \theta^p| > \theta_d^+ \\ D^- = \left(1 - \dfrac{K_d^-}{K_e}\right).\left(1 - \dfrac{|\theta_d^-|}{\theta^-}\right) \quad pour \quad |\theta - \theta^p| > \theta_d^- \end{cases} \qquad \text{[éq 14.3-9]}$$

où on a défini quatre paramètres à identifier sur un trajet en charge positive, cf. Figure 14.1-c, puis un trajet en charge négative :

$$K_d^+ \in \left[K_e, K_p\right] \ , \ K_d^- \in \left[K_e, K_p\right] \ , \ \theta_d^+ > 0 \text{ et } \theta_d^- > 0 \qquad \text{[éq 14.3-10]}$$

Les deux derniers paramètres, sans unité, correspondent à la rotation relative observée au début de la fissuration en flexion de la section de béton armé à la jonction, en charge positive, puis en charge négative.

Les deux fonctions seuil d'endommagement suivantes sont donc compatibles avec ce type d'évolution directement intégrée :

$$f^{d+}_{(Y^+ ; D^+)} = \tilde{f}^{d+}_{(\theta^p, D^+)} = \sqrt{\frac{2.Y^+}{K_e}}.\left(1 - \frac{K_e.D^+}{K_e - K_d^+}\right) - \theta_d^+ = \langle \theta - \theta^p \rangle_+ .\left(1 - \frac{K_e.D^+}{K_e - K_d^+}\right) - \theta_d^+ \leqslant 0 \qquad \text{[éq 14.3-11]}$$

$$f^{d-}_{(Y^- ; D^-)} = \tilde{f}^{d-}_{(\theta^p, D^-)} = \sqrt{\frac{2.Y^-}{K_e}}.\left(1 - \frac{K_e.D^-}{K_e - K_d^-}\right) - |\theta_d^-| = \langle \theta - \theta^p \rangle_- .\left(1 - \frac{K_e.D^-}{K_e - K_d^-}\right) - |\theta_d^-| \leqslant 0 \qquad \text{[éq 14.3-12]}$$

en respectant les conditions de Kuhn-Tucker et la positivité de la dissipation.

Les deux fonctions seuil d'écoulement plastique sont définies respectivement par :

$$f^{p\ +/-}(M ; X) = \langle M - X \rangle_{+/-} - M_y^{+/-} \leqslant 0 \qquad \text{[éq 14.3-13]}$$

avec deux paramètres M_y^+ et M_y^- de seuil de plasticité à identifier sur un trajet en charge positive puis un trajet en charge négative.

La loi d'écoulement plastique s'écrit (règle de normalité), avec $\dot{\lambda}^p \geqslant 0$ et $\dot{\lambda}^p . f^{p\ +/-}(M ; X) = 0$:

$$\dot{\theta}^p = \dot{\alpha} = \dot{\lambda}^p . f^p_{,M} = \dot{\lambda}^p . sgn(M - X) = -\dot{\lambda}^p . f^p_{,X} \qquad \text{[éq 14.3-14]}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

ce qui, assure en particulier :

$$\dot{M}=\dot{X}=K_p.\dot{\alpha}=K_p.\dot{\theta}^p \qquad \text{[éq 14.3-15]}$$

Des équations 14.3-14] et 14.3-15], on déduit une expression plus simple de la dissipation intrinsèque instantanée14.3-7] :

$$D_{diss}=(M-X).\dot{\theta}^p+\frac{1}{2}K_e.\langle\theta-\theta^p\rangle_+^2.\dot{D}^+ +\frac{1}{2}K_e.\langle\theta-\theta^p\rangle_-^2.\dot{D}^- \qquad \text{[éq 14.3-16]}$$

le terme $(M-X).\dot{\theta}^p=|M_y^{+/-}.\dot{\theta}^p|$ étant lui-même obtenu par la valeur atteinte du seuil plastique $M_y^{+/-}$ selon le signe de $(M-X)$, cf. 14.3-13], et les contributions de l'endommagement utilisant 14.3-9].

Les réponses de ce modèle en moment-rotation pour un trajet de chargement cyclique d'amplitude croissante, non alterné puis alterné, sont présentées à la Figure 14.3-a.

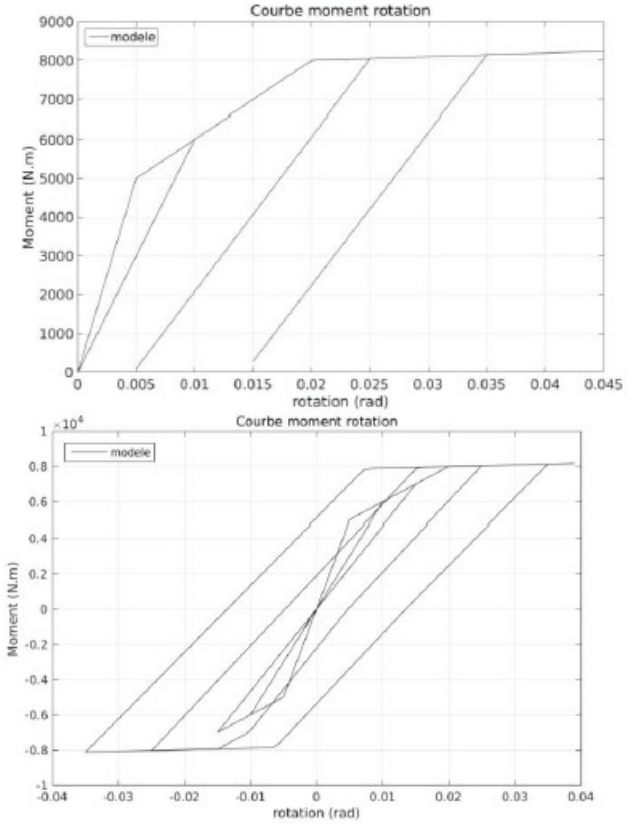


Figure 14.3-a : Réponse du modèle de flexion non linéaire de jonction voile-plancher pour un chargement cyclique d'amplitude croissante non alterné (à gauche) et alterné (à droite).

14.4 Intégration numérique locale de la loi de comportement

Le schéma numérique d'intégration temporelle de la loi repose sur la méthode de RUNGE-KUTTA d'ordre 5 avec un contrôle de l'erreur et découpage. Le schéma RK5 est une combinaison du schéma d'ordre 4 et du schéma d'ordre 6 (bib [9]), pour lequel les coefficients sont déterminés de façon à minimiser l'erreur entre l'ordre 4 et l'ordre 6. La tolérance de convergence est définie par la valeur de RESI_INTE_RELA.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les sept équations non linéaires à résoudre par le schéma RK5 sont :

- la relation d'état en moment M , cf. 14.3-4] ;
- la relation donnant la rotation différentielle θ ;
- la relation donnant la rotation plastique θ^p ;
- la relation donnant D^+ , cf. 14.3-9] ;
- la relation donnant D^- , cf. 14.3-9] ;
- la relation donnant X , cf. 14.3-15] ;
- la relation donnant D_{diss} , cf. 14.3-16].

L'opérateur sécant (le scalaire $\Delta M / \Delta \theta$) est alors retourné au schéma général d'intégration de l'équilibre non linéaire.
L'erreur est connue, il est donc possible de déclencher des subdivisions locales du pas de temps si le critère de convergence n'est pas respecté.

Les deux variables intermédiaires de rotation, cf. 14.3-8], sont initialisées par : $\theta^+(t_0)=\theta_d^+$ et $\theta^-(t_0)=|\theta_d^-|$.

La vérification de l'intégration numérique est disponible dans le cas-test SSND114 [V6.08.114].

14.5 Variables internes

Elles sont au nombre de neuf :

• $V1$: rotation différentielle $\theta_2-\theta_1$ sur l'élément discret, selon l'axe local Oz , nommée ROTATOTA.

• $V2$: rotation plastique θ^p (selon l'axe local Oz), nommée ROTAPLAS,

• $V3$: variable intermédiaire de rotation en flexion positive θ^+ , cf. 14.3-8], nommée ROTAPLUS,

• $V4$: variable intermédiaire de rotation en flexion négative θ^- , cf. 14.3-8], nommée ROTAMOIN,

• $V5$: variable de moment de rappel associé à l'écrouissage cinématique $X=K_p.\alpha$, nommée XCIN_MZZ,

• $V6$: dissipation instantanée D_{diss} (mécanismes d'endommagement et d'écrouissage plastique), nommée DISSTOTA,

• $V7$: variable interne d'endommagement D^+ en paroi inférieure (flexion positive), nommée ENDOPLUS,

• $V8$: variable interne d'endommagement D^- en paroi supérieure (flexion négative), nommée ENDOMOIN,

• $V9$: variable d'initialisation des seuils d'endommagement (activée au premier pas de temps), nommée INISEUIL.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

15 Bibliographie

[1] J.ANGLES : “Modélisation des assemblages filetés…”. Note EDF/DER HI74-99-020A.

[2] J.M.PROIX, B.QUINNEZ, P. MASSIN, P. LACLERGUE : “Assemblages combustibles sous irradiation. Etude de faisabilité”. Note EDF/DER HI-75/97/017/0.

[3] G.JACQUART : "Méthodes de Ritz en dynamique non-linéaire – Application à des systèmes avec choc et frottement localisé" – Rapport EDF/DER HP61/91.105.

[4] M.JEAN, J.J.MOREAU : "Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid bodies collection" Proceedings of the Contact Mechanics International Symposium – ed. A. CURNIER – Presses Polytechniques et Universitaires Romandes – Lausanne, 1992, pp 31-48.

[5] J.T.ODEN, J.A.C.MARTINS : "Models and computational methods for dynamic friction phenomena" – Computational Methods Appl. Mech. Engng. 52, 1992, pp 527-634.

[6] B.BEAUFILS : “Contribution à l’étude des vibrations et de l’usure des faisceaux de tubes en écoulement transversal” – Thèse de doctorat PARIS VI.

[7] Fe.WAECKEL, G.DEVESA : « Dossier de spécifications d’un modèle de choc dans la commande DYNA_NON_LINE du *Code_Aster* ». Note EDF/DER HP-52/97/026/B.

[8] J.LEMAÎTRE, J.L.CHABOCHE « Mécanique des matériaux solides », éditions Dunod, 2ème édition 2004.

[9] W.H. PRESS, S.A. TEUKOLSKY, W.T. VETTERLING, B.P. FLANNERY. Numerical Recipes, 2nd edition, §16.2 (Integration of Ordinary Differential Equations), Cambridge University Press ,1992.

[10] HERVE-SECOURGEON E. « Caractérisation et modélisation du comportement au séisme des jonctions voile-plancher en béton armé pour l’analyse sismique des ouvrages de génie civil et des équipements ». Thèse de Doctorat de l'Université Paris-Saclay, juin 2020.

[11] HERVE-SECOURGEON E., VOLDOIRE F., GATUINGT F., OLIVER-LEBLOND O. « Wall slab connection models for finite element seismic analysis of reinforced concrete structures. » Structural Concrete. Submitted 2020.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

16 Description des versions du document

Version Code_Aster	*Auteur*(s) Organisme(s)	Description des modifications
V.5	*J.-M.Proix, B.Quinnez, EDF-R&D/AMA*	Texte initial, lois de comportement DIS_GOUJ2E_PLAS, DIS_GOUJ2E_ELAS et DIS_CONTACT
V7.4	*G.DEVESA, EDF/R&D/AMA*	Ajout de la loi DIS_CHOC
V8.5	*V.GODARD, EDF/R&D/AMA*	Ajout de la loi DIS_GRICRA
V9	*J.-M.Proix, EDF-R&D/AMA*	Ajout des modèles DIS_BILI_ELAS, de DIS_ECRO_CINE et DIS_VISC
V13	*J.-L.Fléjou, EDF-R&D/AMA*	Description du modèle de comportement DIS_ECRO_TRAC
V15.0	*F.Grange, EDF-R&D/ERMES*	Modification du modèle de comportement DIS_GRICRA
V15.1	*E.Hervé-Secourgeon, J.-L.Fléjou, F.Voldoire,* EDF-R&D/ERMES	Description du modèle discret non linéaire de jonction voile-plancher en flexion JONC_ENDO_PLAS.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)